第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3928-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.8,August,2006

一类不确定混沌系统的观测器同步*

陈 晶 张天平
(扬州大学信息工程学院,扬州 225009)
(2005 年 10 月 17 日收到;2006 年 4 月 17 日收到修改稿)

基于降维观测器的方法实现了一类具有外部扰动的混沌系统的同步.无需知道系统外部扰动项的任何信息,就可对驱动系统设计基于降维观测器的响应系统,从而实现了混沌系统的同步.数值仿真表明该方法是有效的.

关键词:混沌同步,混沌系统,观测器
PACC:0545

1.引 言

混沌系统是一种特殊的非线性系统,由于它对初值具有极度敏感性,混沌系统的同步曾一度被认为是控制界的难点.自从 Pecora 和 Carroll[1,2] 于 20 世纪 90 年代初首先提出用 PC 方法实现混沌系统同步后,混沌同步已经引起了学者们的广泛兴趣,并随之出现了多种同步方法[3—9].

近年来,混沌同步已广泛应用于工程领域,如保密通信、化学化工、航空航天等领域.在工程领域中,观测器方法是一种较为理想的方法[10—17],它易于工程实现,且不需要计算 Lyapunov 指数.文献[12,13]基于观测器方法实现了混沌系统的同步,但其设计过程中需要知道系统的精确模型.文献[14,15]考虑了具有外部干扰的混沌系统的同步,但需要知道外部干扰的上界.文献[16,17]考虑了具有外部干扰的混沌系统的同步,且无需知道系统外部干扰的任何信息.可是,文献[16]引入了辅助变量,其设计过程中如果 $m<q$,则矩阵变换就不可行,且变换后输出是不可由原系统测出的,亦即输出不可作为已知的量来设计观测器.文献[17]对系统的非线性项和系统的输出结构有较强的限制条件,且设计过程较为繁琐.

本文基于一种新的非线性降维观测器设计思想,对一类具有未知扰动的混沌系统实现了同步.该方法首先通过矩阵变换将系统的状态方程变为一种特殊的结构,再通过初等行变换来改变系统输出结构,最后设计降维观测器实现了系统的同步.本文设计的方法取消了文献[17]中对系统非线性项 $\tilde{f}_2=0$ 的限制及对系统输出结构的限制,且无需引入辅助变量,设计过程简单.

2.问题的描述及基本假设

考虑如下一类混沌系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+f(X,t)+Dd(t),\\ y(t)&=CX(t),\end{aligned}\tag{1}$$

式中,$X\in R^n$ 为系统的状态,$y\in R^p$ 是系统的输出,$d(t)$是未知的外界干扰,$A\in R^{n\times n}$,$D\in R^{n\times m}$,$C\in R^{p\times n}$是常数矩阵,$f(X,t)$是系统的非线性项.

对系统(1)有如下假设:

(i)(A,C) 是能观测的.

(ii)$p>m$.

(iii)$\mathrm{rank}(CD)=m$.

(iv)系统非线性项满足 Lipschitz 条件

$$\|f(X,t)-f(\hat{X},t)\|\leqslant r\|X-\hat{X}\|,$$

其中 r 是已知正常数.

假设(ii)表明系统的输出维数大于系统的干扰维数.假设(iii)是数学上的技术假设.由混沌吸引子的有界性,假设(iv)显然是满足的.

对系统(1)进行初等行变换得

* 国家自然科学基金(批准号:60074013,10371106)、江苏省教育厅科研基金(批准号:0310067)和扬州大学信息科学学科群基金(批准号:030606)资助的课题.

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_1(\bar{X},t)\\ f_2(\bar{X},t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}I_m\\ 0\end{bmatrix}d(t),$$

$$y=[c_1\quad c_2]\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}. \tag{2}$$

这里，

$$\bar{X}(t)=S\cdot X(t),$$

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=S\cdot A\cdot S^{-1},$$

$$\begin{bmatrix}f_1(\bar{X},t)\\ f_2(\bar{X},t)\end{bmatrix}=S\cdot f(X,t),$$

$$\bar{X}(t)=[\bar{x}_1(t)\quad \bar{x}_2(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$[c_1\quad c_2]=C\cdot S^{-1},$$

$$S\in R^{n\times n}.$$

3. 观测器的设计

考虑系统(2)，由假设(ⅱ)、假设(ⅲ)可知

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(CD)&=\mathrm{rank}(CS^{-1}SD)\\&=\mathrm{rank}\left([c_1\quad c_2]\begin{bmatrix}I_m\\ 0\end{bmatrix}\right)\\&=\mathrm{rank}(c_1)=m.\end{aligned} \tag{3}$$

于是对系统(2)的输出进行初等行变换后得

$$PI_py=P[c_1\quad c_2]\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_m & b_1\\ 0 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}I_m & b_1\\ 0 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}, \tag{4}$$

式中 $P\in R^{p\times p}$.

由(4)式得

$$\begin{aligned}P_1y&=\bar{x}_1+b_1\bar{x}_2,\\ P_2y&=b_2\bar{x}_2,\end{aligned} \tag{5}$$

即

$$\bar{x}_1=P_1y-b_1\bar{x}_2. \tag{6}$$

将(6)式代入系统(2)得

$$\dot{\bar{x}}_2=A_{21}(P_1y-b_1\bar{x}_2)+A_{22}\bar{x}_2+f_2(\bar{X},t). \tag{7}$$

联合(5)，(7)式得到 $n-m$ 维的降阶混沌系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_2&=(A_{22}-A_{21}b_1)\bar{x}_2+A_{21}P_1y+f_2(\bar{X},t),\\ \tilde{y}&=b_2\bar{x}_2,\end{aligned} \tag{8}$$

式中 $\tilde{y}=P_2y$ 是可以通过原系统输出进行测量的.

下面对系统(8)设计观测器，

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_2&=(A_{22}-A_{21}b_1)\hat{x}_2+A_{21}P_1y\\&\quad+f_2(\hat{X},t)+L(\tilde{y}-\hat{y}),\\ \hat{y}&=b_2\hat{x}_2,\end{aligned} \tag{9}$$

将(9)，(8)两式相减得

$$\begin{aligned}\dot{e}_2&=(A_{22}-A_{21}b_1)e_2+f_2(\hat{X},t)\\&\quad-f_2(\bar{X},t)-Lb_2e_2,\end{aligned} \tag{10}$$

式中 $e_2=\hat{x}_2-\bar{x}_2$.

由假设(ⅰ)知$(A_{22}-A_{21}b_1,b_2)$是能观测的，如选择适当的 L，则总可使(10)式渐近稳定，那么 $e_2\to 0$，亦即 $\hat{x}_2\to\bar{x}_2$.

定理 1　对于(10)式，如 L 满足条件

$$\begin{aligned}&(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2+rI_{n-m})^{\mathrm{T}}\\&+(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2+rI_{n-m})<0,\end{aligned} \tag{11}$$

则(10)式是渐近稳定的，亦即系统(9)和(8)渐近达到同步.

证明　取

$$V(t)=e_2^{\mathrm{T}}e_2,$$

对 $V(t)$进行求导

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&=\dot{e}_2^{\mathrm{T}}e_2+e_2^{\mathrm{T}}\dot{e}_2\\&=[(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2)e_2\\&\quad+(f_2(\hat{X},t)-f_2(\bar{X},t))]^{\mathrm{T}}e_2\\&\quad+e_2^{\mathrm{T}}[(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2)e_2\\&\quad+(f_2(\hat{X},t)-f(\bar{X},t))]\\&\leqslant e_2^{\mathrm{T}}(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2)^{\mathrm{T}}e_2\\&\quad+(f_2(\hat{X},t)-f_2(\bar{X},t))^{\mathrm{T}}e_2\\&\quad+e_2^{\mathrm{T}}(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2)e_2\\&\quad+e_2^{\mathrm{T}}(f_2(\hat{X},t)-f_2(\bar{X},t))\\&\leqslant e_2^{\mathrm{T}}[(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2)^{\mathrm{T}}\\&\quad+(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2)]e_2\\&\quad+2r\|e_2^{\mathrm{T}}\|\cdot\|e_2\|\\&=e_2^{\mathrm{T}}[(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2)^{\mathrm{T}}\\&\quad+(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2)]e_2\\&\quad+2re_2^{\mathrm{T}}e_2\\&=e_2^{\mathrm{T}}[(A_{22}-A_{21}b_1-Lb_2+rI_{n-m})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (A_{22} - A_{21} b_1 - L b_2 + r I_{n-m})] e_2 \\
&< - \delta \| e_2 \|^2 ,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

式中 δ 为足够小的正常数. 由(12)式知 $e_2 \in L_2$. 再由(10)式及混沌系统的特性所有状态有界,可得

$$
e_2 \in L_\infty ,
$$

$$
\dot{e}_2 \in L_\infty .
$$

于是由 Barbalat 引理[18]可知,

$$
\lim_{t \to \infty} e_2(t) = 0 .
$$

定理得证.

对系统(2)可设计如下的观测器:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_2 &= (A_{22} - A_{21} b_1) \hat{x}_2 + A_{21} P_1 y \\
&\quad + f_2(\hat{X}, t) + L(\tilde{y} - \hat{y}), \\
\hat{y} &= b_2 \hat{x}_2 , \\
\hat{x}_1 &= P_1 y - b_1 \hat{x}_2 .
\end{aligned}
\tag{13}
$$

定理 2 满足一定条件的系统(1),通过等价变换为系统(2),对于系统(2)可设计形如(13)的系统,使之与系统(2)渐近达到同步.

4. 数值算例

对 Lorenz 系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) + d(t), \\
\dot{x}_2 &= r x_1 - x_2 - x_1 x_3 , \\
\dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b x_3 , \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

进行仿真研究,结果如图 1—图 3 所示.

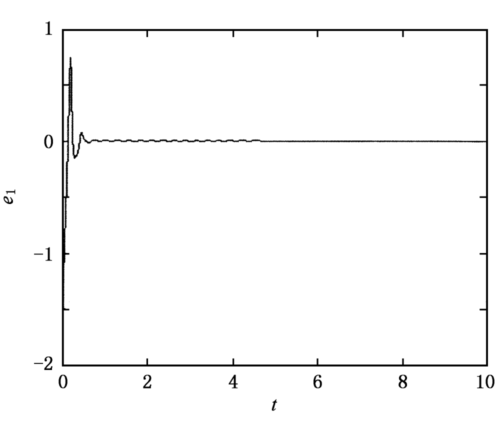

图 1 同步误差 e_1 效果图

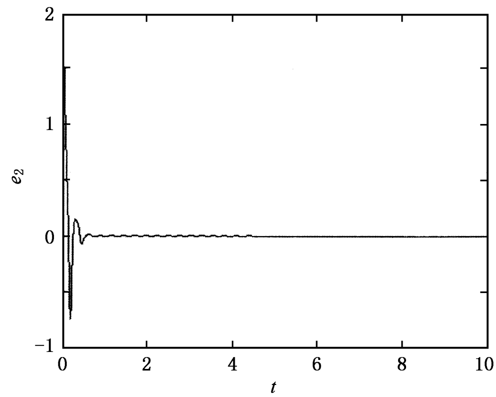

图 2 同步误差 e_2 效果图

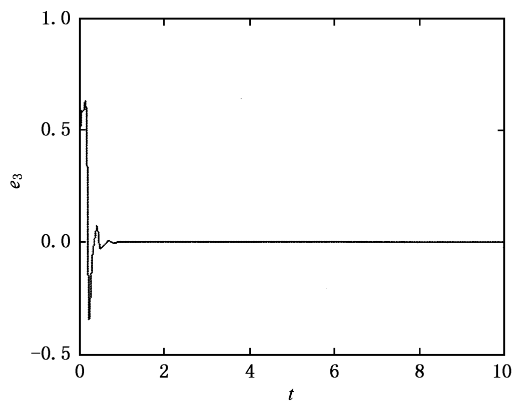

图 3 同步误差 e_3 效果图

在仿真过程中为了设计观测器的需要,将系统(14)转化为形如系统(1)的形式,

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

式中,$(\sigma, r, b) = (10, 28, 8/3)$, $d(t) = 5\sin(t)$. 显然,(15)式也满足系统(2)的形式

进一步对输出进行分析,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

于是可得

$$\begin{aligned} [1 \quad 0]\, y &= x_1 + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\ [-2 \quad 1]\, y &= [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{16}$$

即得到下列降阶系统：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -([1 \quad 0]\, y - x_3)\, x_3 \\ ([1 \quad 0]\, y - x_3)\, x_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{y} &= [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{17}$$

于是，设计如下的观测器：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -([1 \quad 0]\, y - \hat{x}_3)\, \hat{x}_3 \\ ([1 \quad 0]\, y - \hat{x}_3)\, \hat{x}_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + L(\tilde{y} - \hat{y}), \\ \hat{y} &= [1 \quad -1] \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

由定理 1，则可选择 $L = [-5 \quad 10]$. 从仿真结果（图 1、图 2、图 3）可以看出，在存在外部扰动的情况下系统仍能保持良好的同步性能，即表明本文的方法是有效的.

5. 结 论

本文基于观测器的方法，对一类具有外部扰动的混沌系统实现了同步. 该方法不需知道外部扰动的任何信息，且研究的混沌系统及其输出驱动信号具有一般性. 观测器的设计方法简单，由于设计的是降维观测器，更利于工程应用. 仿真结果表明，本文的方法具有较强的鲁棒性和抗干扰能力.

[1] Pecora L M，Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[2] Carroll T L，Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circ. Syst.* Ⅰ **38** 453

[3] Wang C C，Su J P 2003 *Chaos Solitons Fract.* **18** 275

[4] Tao C H，Lu J A，Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese)［陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497］

[5] Yassen M T 2005 *Phys. Lett.* A **337** 335

[6] Yin X H，Ren Y，Shan X M 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 1949 (in Chinese)［尹逊和、任 勇、山秀明 2002 物理学报 **51** 1949］

[7] Li G H，Xu D M，Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 (in Chinese)［李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379］

[8] Wang C，Ge S S 2001 *Chaos Solitons Fract.* **12** 1199

[9] Li Z，Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9

[10] Millerioux G，Daafouz J 2003 *IEEE Trans. Circ. Syst.* Ⅰ **50** 1270

[11] Chen M Y，Zhou D H，Shang Y 2005 *Chaos Solitons Fract.* **24** 1025

[12] Nijmeijer H，Mareels M Y 1997 *IEEE Trans. Circ. Syst.* Ⅰ **44** 882

[13] Liu F，Ren Y，San X M *et al* 2002 *Chaos Solitons Fract.* **13** 723

[14] Liao T L，Tsai S H 2000 *Chaos Solitons Fract.* **11** 1387

[15] Morgvl O，Solak E 1997 *Int. J. Bifurc. Chaos* **7** 1307

[16] Guan X P，He Y H，Fan Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese)［关新平、何宴辉、范正平 2003 物理学报 **52** 276］

[17] Feki M，Bruno R 2003 *Chaos Solitons Fract.* **15** 831

[18] Popov V M 1973 *Hyperstability of Control System* (Berlin：Springer-Verlag)

Synchronization of a class of uncertain chaotic systems by observer*

Chen Jing Zhang Tian-Ping

(*College of Information Engineering, Yangzhou University, Yangzhou* 225009, *China*)

(Received 17 October 2005; revised manuscript received 17 April 2006)

Abstract

This paper investigates the synchronization of a class of uncertain chaotic systems based on reduced-order observer. Without any prerequisite on the nature of the perturbation, a reduced-order observer-based response system is designed for synchronization with the drive system. Numerical simulation shows the effectiveness of the proposed method.

Keywords: chaos synchronization, chaotic systems, observer

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60074013, 10371106), the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Jiangsu Province, China (Grant No. 0310067) and the Foundaion of Information Science Subject Group of Yangzhou University, China (Grant No. 030606).