

# 基于追踪控制的混沌异结构同步

李建芬<sup>1)</sup> 林 辉<sup>1)</sup> 李 农<sup>2)</sup>

1) 西北工业大学自动化学院, 西安 710072)

2) 空军工程大学工程学院, 西安 710038)

(2005 年 12 月 20 日收到, 2006 年 4 月 6 日收到修改稿)

针对连续混沌系统, 提出一种混沌异结构同步追踪控制方案. 利用 Lyapunov 方法证明了当受控系统满足 Lipschitz 条件时, 即可使其状态输出指数收敛到任意给定的参考信号. 设计的控制器结构对不同的混沌系统具有统一的形式, 可实现任意混沌系统之间的异结构同步. 数值仿真进一步表明了该方法的有效性.

关键词: 混沌系统, 追踪控制, 同步

PACC: 0545

## 1. 引 言

最近十多年来, 混沌控制与同步的研究已经蓬勃展开, 由于其在保密通信等领域具有良好的应用前景, 使混沌的控制与同步及其应用成为研究热点. 在混沌控制研究中, 追踪问题即通过施加控制使受控系统的输出信号达到事先给定的参考信号, 更具一般性, 也更困难. 特别是如果追踪的参考信号是由混沌系统产生的, 这种追踪控制便演变成驱动系统和响应系统的同步, 它包括自同步和异结构混沌同步. 从实用角度看, 异结构同步比自同步具有更好的应用前景. 以往这方面的工作大多集中在讨论离散系统<sup>[1]</sup>. 陈士华等<sup>[2]</sup>对 Rössler 系统进行跟踪研究, 实现对目标单一变量的跟踪; 文献[3, 4]提出一种非线性反馈控制方法, 实现了混沌系统的全变量跟踪控制; 文献[5]基于 Lyapunov 稳定性理论针对一类含不确定参数的混沌系统提出一种鲁棒自适应跟踪控制方法, 也实现了系统的全局跟踪控制.

上述方法均需已知受控系统精确的数学模型, 且控制器没有统一的形式. 本文针对一般的连续混沌系统, 提出了一种异结构同步追踪控制方案, 使受控系统的状态输出可以收敛到任意给定的参考信号. 即使系统含有不确定参数, 该方法同样有效. 设计的控制器结构简单、形式统一, 可实现任意混沌系统之间的同步.

## 2. 追踪控制器的设计

考虑一个任意混沌动力学系统

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

式中  $x \in R^n$  为状态向量.

本文的目的是对任意给定的参考信号

$$r(t) = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T$$

设计控制器

$$u(t) = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T,$$

使受控系统(1)式中的  $x$  追踪给定的参考信号  $r$ , 即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - r\| = 0.$$

在(1)式中加入控制器后得到

$$\dot{x} = f(x) + u(t).$$

若用

$$e(t) = [x_1 - r_1, x_2 - r_2, \dots, x_n - r_n]^T \\ = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]^T$$

来表示追踪误差, 则设计的控制器可用下列表达式表示:

$$u(t) = -ku(t)e, \quad (2)$$

式中  $u(t)$  满足  $\dot{u}(t) = 1$ ,  $k$  为控制增益常数.

由(1)和(2)式得误差方程为

$$\dot{e} = f(x) - ku(t)e - \dot{r}.$$

选择 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T e = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} e_i^2(t) \geq 0,$$

则

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{e} = [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{ku}(t)\mathbf{x} - \dot{\mathbf{r}}] \mathbf{e} \\
 &= [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{r}}] \mathbf{e} - \mathbf{ku}(t)\mathbf{x}^T \mathbf{e} \\
 &= \sum_{i=1}^n (f_i(\mathbf{x}) - \dot{r}_i) x_i - \mathbf{ku}(t)\mathbf{x}^T \mathbf{e} \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [(f_i(\mathbf{x}) - \dot{r}_i)^2 + e_i^2] - \mathbf{ku}(t)\|\mathbf{e}\|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{r}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}\|^2 - \mathbf{ku}(t)\|\mathbf{e}\|^2.
 \end{aligned}$$

假设

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{r}}\| \leq M \|\mathbf{e}\|,$$

只要原混沌系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

有界,且参考信号  $\mathbf{r}(t)$  的各分量在  $[0, +\infty]$  上满足对时间  $t$  一次可微,即可满足该条件.连续混沌系统均为有界函数.实际上,当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{r}\| = 0$$

成立时,有

$$\dot{\mathbf{r}} \approx \mathbf{f}(\mathbf{r}),$$

若函数  $f(t)$  满足 Lipschitz 条件,则存在一个正数  $M$  使

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})\| \leq M \|\mathbf{e}\|$$

成立.因此,有

$$\dot{\mathbf{V}}(t) \leq \left[ \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{2} - \mathbf{ku}(t) \right] \|\mathbf{e}\|^2.$$

当  $\|\mathbf{e}\| = 0$ , 有  $\dot{\mathbf{V}}(t) = 0$ ; 若  $\mathbf{ku}(t)$  足够大, 使  $\left[ \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{2} - \mathbf{ku}(t) \right] < 0$ , 则有  $\dot{\mathbf{V}}(t) < 0$ , 因此,  $\mathbf{e}(t)$  在零点是渐近稳定的. 由于  $\dot{u}(t) = 1$ , 则  $u(t) = t$ , 当  $t$  充分大时, 即可满足

$$\left[ \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{2} - \mathbf{ku}(t) \right] < 0.$$

### 3. 数值计算

下面将利用几种典型的混沌系统(如蔡氏电路、Lorenz 系统、Rössler 系统、细胞神经网络(CNN)超混沌系统和超混沌 LC 振子系统)分别模拟三阶同维混沌系统之间、不同维之间及超混沌之间的异结构同步情况来说明上述的方法.模拟中,均选取受控系统控制增益常数  $k = 50$ .

#### 3.1. 蔡氏电路与 Lorenz 系统的异结构同步

这是两个同维三阶混沌系统,将蔡氏电路作为受控系统, Lorenz 系统为参考系统.蔡氏电路的归一

化状态方程为

$$\dot{x}_1 = -\alpha(x_1 - x_2 - f(x_1)),$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3,$$

式中

$$f(x_1) = bx + 0.5(a - b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|),$$

其中  $a, b$  为分段线性电阻的归一化斜率.当参数  $\alpha = 10, \beta = 14.31, \gamma = 0.12$  时,上述系统处于混沌态.

加入控制器后的状态方程为

$$\dot{x}_1 = -\alpha(x_1 - x_2 - f(x_1))$$

$$- \mathbf{ku}(t)(x_1 - r_1),$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 - \mathbf{ku}(t)(x_2 - r_2), \quad (3)$$

$$\dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3 - \mathbf{ku}(t)(x_3 - r_3),$$

$$\dot{w}(t) = 1.$$

Lorenz 系统的状态方程为

$$\dot{y}_1 = -10(y_1 - y_2),$$

$$\dot{y}_2 = 28y_1 - y_1 y_3 - y_2,$$

$$\dot{y}_3 = y_1 y_2 - \frac{8}{3} y_3.$$

取参考信号

$$[r_1, r_2, r_3] = [y_1, y_2, y_3],$$

受控的蔡氏电路对 Lorenz 系统追踪的模拟结果见图 1.

由图 1(a)可见,随着时间的增加两系统的同步误差逐渐趋于零,此时受控的蔡氏电路的状态输出与 Lorenz 系统相同,由图 1(b)可见,蔡氏电路的混沌相图具有与 Lorenz 相同的形状.

#### 3.2. CNN 超混沌系统与 Rössler 系统的异结构同步

下面将模拟两个不同维之间的异结构同步过程.选取受控系统为 CNN 超混沌系统, Rössler 系统为受控系统追踪的目标系统.

CNN 是由 Chua 和 Yang<sup>[8]</sup>在 1988 年首创的.由于 CNN 规则的结构和每个细胞单元仅与邻近的细胞相结合,易于用超大规模集成电路实现三维甚至更高维动力学行为的结构,从而得到了广泛的应用.其四阶的状态方程可写为

$$\dot{x}_1 = -x_3 - x_4,$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 + x_3,$$

$$\dot{x}_3 = 14x_1 - 14x_2,$$

$$\dot{x}_4 = 100x_1 - 100x_4$$

$$+ 100(|x_4 + 1| - |x_4 - 1|).$$

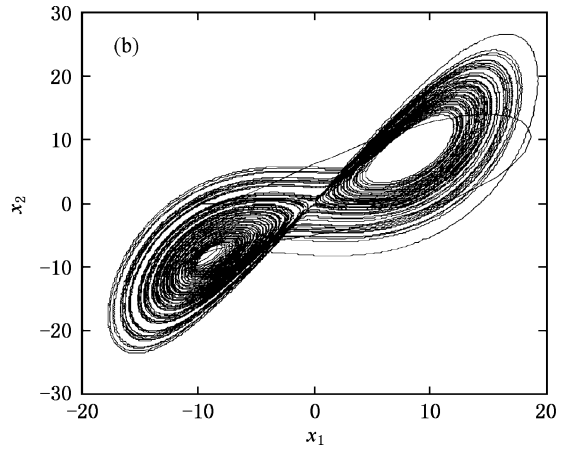
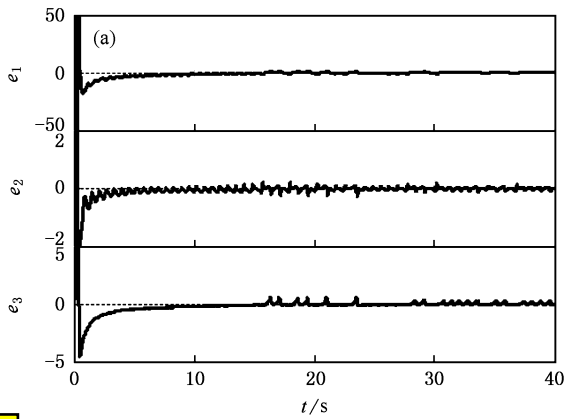


图 1 蔡氏电路与 Lorenz 系统的异结构同步 (a)蔡氏电路与 Lorenz 系统的同步误差 (b)受控系统(3)的混沌吸引子

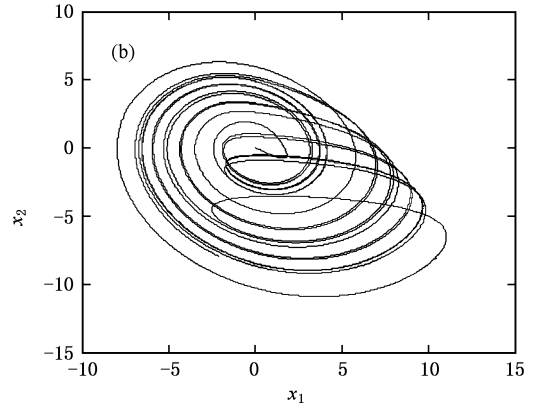
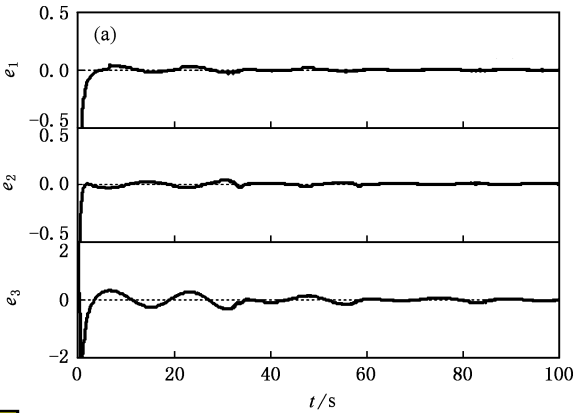


图 2 CNN 超混沌系统与 Rössler 系统的异结构同步 (a)CNN 系统与 Rössler 系统的同步误差 ,(b)受控系统(4)的混沌吸引子

加入控制器后的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_3 - x_4 - ku(t) \mathfrak{F}(x_1 - r_1), \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + x_3 - ku(t) \mathfrak{F}(x_2 - r_2), \\ \dot{x}_3 &= 14x_1 - 14x_x - ku(t) \mathfrak{F}(x_3 - r_3), \\ \dot{x}_4 &= 100x_1 - 100x_4 \\ &\quad + 100(|x_4 + 1| - |x_4 - 1|), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{w}(t) = 1.$$

Rössler 系统状态方程如下：

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -(z_2 + z_3), \\ \dot{z}_2 &= z_1 + az_2, \\ \dot{z}_3 &= b + z_3(z_1 - c), \end{aligned}$$

式中  $a, b, c$  为系统参数.当  $a = 0.34, b = 0.34, c = 4.5$  时,系统处于混沌态.取参考信号

$$[r_1, r_2, r_3] = [z_1, z_2, z_3],$$

受控的 CNN 对 Rössler 系统追踪的模拟结果见图 2.

由图 2 可以得出与图 1 类似的结论.

### 3.3. 超混沌 LC 振子系统与 CNN 超混沌系统的异结构同步

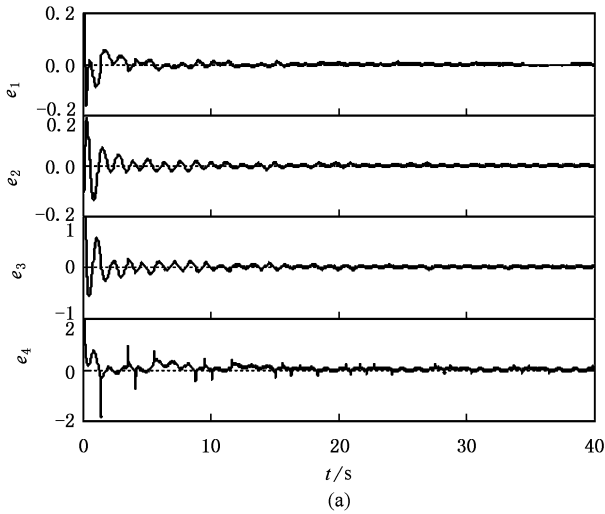
将 CNN 的 4 个状态输出作为参考信号,受控系统则采用超混沌 LC 振子<sup>[9]</sup>,超混沌 LC 振子模型加入控制器后的动力学方程如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.7x_1 - x_2 - x_3 - ku(t) \mathfrak{F}(x_1 - r_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - ku(t) \mathfrak{F}(x_2 - r_2), \\ \dot{x}_3 &= \mathfrak{F}(x_1 - x_4) - ku(t) \mathfrak{F}(x_3 - r_3), \\ \dot{x}_4 &= \mathfrak{F}(x_3 - 10(x_4 - 1)\mathfrak{F}(x_4 - 1)) \\ &\quad - ku(t) \mathfrak{F}(x_4 - r_4), \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\mathfrak{F}(u)$  为单位阶跃函数,满足  $\mathfrak{F}(u < 0) = 0, \mathfrak{F}(u \geq 0) = 1$ .未加控制时,系统的 Lyapunov 指数分别为  $\lambda_1 = 0.123, \lambda_2 = 0.067, \lambda_3 = 0.00, \lambda_4 = -9.75$ ,由于系统有两个正的 Lyapunov 指数,所以系统处于超混

沌状态.

图 3 给出了受控系统 LC 振子与目标系统 CNN



的同步误差和受控系统 LC 振子状态输出的混沌相图.

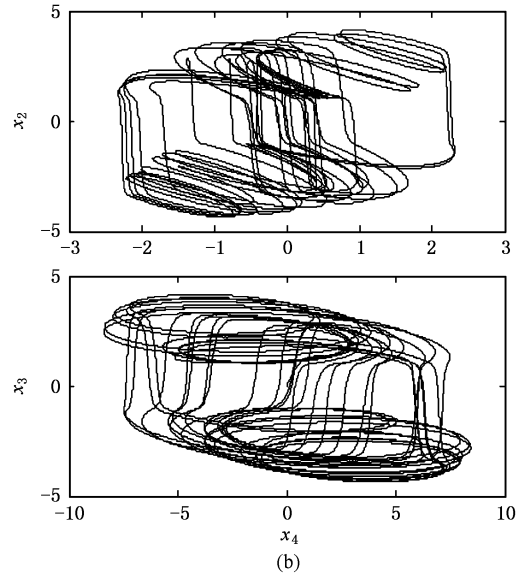


图 3 超混沌 LC 振子系统与 CNN 超混沌系统的异结构同步 (a) LC 振子系统与 CNN 系统的同步误差 (b) 受控系统 (5) 的  $x_4-x_2$  和  $x_4-x_3$  混沌相图

以上分别模拟了三种异结构同步情况,由图 1—图 3 的模拟结果可以看出,三种情况可以得出相同的结论:受控系统与参考系统通过控制器的作用都达到了同步,从而实现了混沌系统的异结构同步.

## 4. 结 论

本文提出的同步跟踪方法适用范围较大,只要

受控系统满足 Lipchitz 条件,即可实现受控系统跟踪任意给定的参考信号,若参考信号来自另一混沌系统的输出即可实现同维或不同维混沌系统的异结构同步.尤其当受控系统为一稳定系统,而参考信号为混沌信号时,可实现混沌的反控制.设计的控制器结构简单、形式统一,且与系统结构基本无关.由此可以预测,当系统存在结构不确定性或外界干扰导致系统变化时,同步将不受影响,具有较好的鲁棒性.

- [1] Li L X, Peng H P, Lu H B *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 692 (in Chinese) [李丽香、彭海朋、卢辉斌等 2001 物理学报 **50** 692]
- [2] Chen S H, Xie J, Lu J A *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 749 (in Chinese) [陈士华、谢进、陆君安等 2002 物理学报 **51** 749]
- [3] Wu W G, Gu T X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1922 (in Chinese) [伍维根、古天祥 2000 物理学报 **49** 1922]
- [4] Li G H, Xu D M, Zhou S P 2003 *Chin. J. Quantum Electron.* **20** 181 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2003 量子电子学报 **20** 181]

- [5] Li Z, Chen G R, Shi S J *et al* 2003 *Phys. Lett. A* **310** 40
- [6] Tang G N, Luo X S, Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 30 (in Chinese) [唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 30]
- [7] Guan X P, Peng H P, Li L X *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26 (in Chinese) [关新平、彭海朋、李丽香等 2001 物理学报 **50** 26]
- [8] Chua L O, Yang L 1988 *IEEE Trans. CAS I* **35** 1257
- [9] Tamasevicius A, Namajunas A, Cenas A 1996 *Electron. Lett.* **32** 957

# Chaotic synchronization with diverse structures based on tracking control

Li Jian-Fen<sup>1)</sup> Lin Hui<sup>1)</sup> Li Nong<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *School of Automation, Northwestern Polytechnology University, Xi'an 710072, China*

<sup>2)</sup> *Institute of Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China*

(Received 20 December 2005 ; revised manuscript received 6 April 2006)

## Abstract

A tracking control method is proposed for chaotic synchronization with diverse structures. When the controlled system satisfies Lipchitz condition, it's proved by means of Lyapunov function that this method can make the controlled chaotic system approach to any desired smooth orbit at an exponenting rate. The model of a designed controller has unique structure for different chaotic systems, and synchronization between any chaotic systems can be achieved. Computer simulations are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** : chaotic system, tracking control, synchronization

**PACC** : 0545