第 55 卷 第 9 期 2006 年 9 月
1000-3290/2006/55(09)/4397-10

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.9,September,2006

线性瞬态涡流电磁场定解问题解的唯一性和稳定性*

谢 莉 雷银照

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院,北京 100083)

(2005 年 11 月 8 日收到;2006 年 2 月 23 日收到修改稿)

线性瞬态涡流电磁场定解问题的主要特点是边界条件使用磁感应强度的法向分量边界条件代替了电场强度的切向分量边界条件,约束方程中忽略了位移电流.这种具有特殊性的定解问题的解是否唯一和稳定对于求解瞬态涡流电磁场而言是一个基本问题.本文在非涡流区引入标量位函数,证明了在推导过程中起重要作用的辅助函数的存在性.通过推导线性瞬态涡流电磁场定解问题的能量估计式,证明了该定解问题的解是唯一的,并且关于初始条件和外源项是稳定的.本结果对于线性瞬态涡流电磁场的求解有一定的指导意义.作为应用,给出了通有单脉冲电流的单匝圆环线圈与球形导体共轴的涡流问题的解析解.

关键词:瞬态涡流电磁场,能量估计式,唯一性,稳定性
PACC:0200,0350D,4110

1. 引 言

瞬态涡流电磁场是指随时间缓慢变化的场源在导电媒质中产生的电磁场.电气工程中所涉及的电磁场大部分都可认为是瞬态涡流电磁场.为了分析、求解瞬态涡流电磁场,需要建立场的定解问题并研究解的性质.其中,定解问题的解是否唯一以及解关于初始条件和外源是否稳定是本文重点考察的内容.因为解的唯一性保证求解定解问题时可任意选择简便的方法[1];解的稳定性意味着当初始条件和场源发生微小变化时,解的变化也很小,这对场的数值计算来说具有重要的指导意义[2].

20 年来,人们围绕涡流场的求解开展了大量研究[3,4],建立了多种类型的定解问题.其中典型的定解问题的提法见文献[5],其特点是内边界条件使用磁感应强度 B 的法向分量边界条件代替了电场强度 E 的切向分量边界条件,约束方程中忽略了位移电流.由于这两个特点,瞬态涡流电磁场定解问题与一般时变电磁场定解问题相比,数学结构发生了一定变化.这种具有一定特殊性的定解问题的解是否唯一和稳定,是求解瞬态涡流电磁场之前应首先研究的基本问题.从目前已发表的文献看,人们在分析、求解线性瞬态涡流电磁场时,似乎较少考虑解的唯一性和稳定性,而是直接用数值方法求解.文献[5]基于用电场强度和磁感应强度表示的线性瞬态涡流电磁场定解问题,给出了由它衍生出的多种位函数表示的定解问题,在假定电场强度和磁感应强度表示的线性瞬态涡流电磁场定解问题有唯一解的前提下,证明了多种位函数表示的定解问题有唯一解.文献[6]给出了电场强度和磁感应强度表示的线性瞬态涡流电磁场定解问题唯一性定理的表述和证明,为本文提供了一定的研究基础.截至目前,我们尚未见到研究者讨论线性瞬态涡流电磁场定解问题的稳定性.定解问题的稳定性可由定解问题的能量估计式给出,能量估计式需要从非齐次定解问题出发而得到.对于非齐次定解问题而言,要在非涡流区引入标量位函数有一定难度.在文献[6]中,假定了一个在内边界面上具有连续一阶偏导数的函数,利用它证明了定解问题的唯一性,该函数的存在性对定解问题唯一性的证明过程有重要作用.本文在文献[6]的基础上,利用非齐次线性瞬态涡流电磁场定解问题,证明了对推导过程起重要作用的辅助函数的存在性,推导出线性瞬态涡流电磁场定解问题的能量估计式,得到了线性瞬态涡流电磁场定解问题解的唯一性和稳定性.作为应用,本文研究了通有单脉冲电流的单匝圆环线圈与球形导体共轴的涡流问题,用拉普拉斯变换的方法求出了场量的解析表达式.

* 国家自然科学基金(批准号:50377002)资助的课题.

2. 定解问题的建立

如图 1 所示，不随时间变化的三维无限大区域

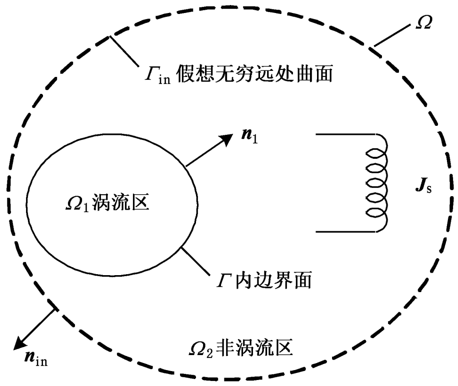

图 1 线性瞬态涡流场的求解区域

Ω 内存在三维有界的线性导电导磁区域 Ω_1，其电导率为 $0<\sigma_1<\infty$，磁导率为 $0<\mu_1<\infty$，σ_1 和 μ_1 是场点的连续函数，并且存在有界常数 μ_m，μ_M，使得 $\mu_m \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_M$. Ω 中除 Ω_1 以外的区域为非涡流区域，记为 Ω_2. Ω_2 为线单连通区域，其电导率为 $\sigma_2=0$，磁导率 μ_2 是与场点和时间无关的有界正常数. 随时间 t 缓慢变化的电流源 $\boldsymbol{J}_s$ 分布在 Ω_2 中的有界区域内. 以下记函数符号上方的圆点'·'表示该函数对时间 t 的偏导数. 忽略位移电流，在以上条件下，电磁场的场量满足以下定解问题：

在 Ω_1 内

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_1-\sigma_1 \boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_1+\dot{\boldsymbol{B}}_1=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_1=0 ; \tag{3}$$

在 Ω_2 内

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{J}_s, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_2=0 ; \tag{5}$$

在 Γ 上

$$\boldsymbol{n}_1 \times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{0}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 ; \tag{7}$$

在无穷远处

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{0} ; \tag{8}$$

在初始时刻

$$\left.\boldsymbol{B}_i\right|_{t=0}=\boldsymbol{B}_{i0}, \quad i=1,2 ; \tag{9}$$

$$\left.\boldsymbol{H}_i\right|_{t=0}=\boldsymbol{H}_{i0}, \quad i=1,2. \tag{10}$$

其中，粗体字母表示矢量函数，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 分别为 Ω_1 和 Ω_2 中的磁感应强度，$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 分别为 Ω_1 和 Ω_2 中的磁场强度，$\boldsymbol{B}_1=\mu \boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{B}_2=\mu_2 \boldsymbol{H}_2$，$\boldsymbol{n}_1$ 为内边界面 Γ 上由 Ω_1 指向 Ω_2 的单位法向矢量，$\boldsymbol{B}_{i0}$ 和 $\boldsymbol{H}_{i0}$ 为仅与场点有关而与时间 t 无关的已知矢量.

3. $\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r}, t)$ 的引入

根据亥姆霍 定理[7]，在 Ω_2 内任意一点处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r})$ 可被表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和，即

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}, t)=-\nabla \Phi(\boldsymbol{r}, t)+\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t),$$

其中

$$\begin{aligned}
\Phi(\boldsymbol{r}, t)= & \int_{\Omega_2} \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t)}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Omega' \\
& +\oint_{\Gamma} \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t) \cdot \boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r}')}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Gamma' \\
& -\oint_{\Gamma_{in}} \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t) \cdot \boldsymbol{n}_{in}(\boldsymbol{r}')}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Gamma',
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)= & \int_{\Omega_2} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t)}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Omega' \\
& -\oint_{\Gamma} \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t) \times \boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r}')}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Gamma' \\
& +\oint_{\Gamma_{in}} \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t) \times \boldsymbol{n}_{in}(\boldsymbol{r}')}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Gamma',
\end{aligned} \tag{12}$$

Γ_{in} 是无界场域中无限远处假想的光滑曲面，$\boldsymbol{n}_{in}$ 是 Γ_{in} 上的单位外法向矢量. 将方程(4)和(5)分别代入(11)和(12)式，可得

$$\begin{aligned}
\Phi(\boldsymbol{r}, t)= & \oint_{\Gamma} \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t) \cdot \boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r}')}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Gamma' \\
& -\oint_{\Gamma_{in}} \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t) \cdot \boldsymbol{n}_{in}(\boldsymbol{r}')}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Gamma',
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)= & \int_{\Omega_2} \frac{\mu_2 \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}', t)}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Omega' \\
& -\oint_{\Gamma} \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t) \times \boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{r}')}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Gamma' \\
& +\oint_{\Gamma_{in}} \frac{\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}', t) \times \boldsymbol{n}_{in}(\boldsymbol{r}')}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Gamma'.
\end{aligned} \tag{14}$$

将(14)式右端的第一项记为

$$\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r}, t)=\int_{\Omega_2} \frac{\mu_2 \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}', t)}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Omega',$$

令

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_s(\boldsymbol{r}, t)=\int_{\Omega} \frac{\mu_2 \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}', t)}{4 \pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d} \Omega'$$

$$=\int_{\Omega_1}\frac{\mu_2 \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Omega'$$

$$+\int_{\Omega_2}\frac{\mu_2 \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Omega',$$

由于 Ω_1 中没有源电流分布，可知在 Ω_2 中，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_s(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r},t)$. 令

$$\boldsymbol{B}_s(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{A}}_s(\boldsymbol{r},t),$$
$$\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_s(\boldsymbol{r},t)/\mu_2,$$

可知

$$\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Omega'$$
$$=\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi}\times\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Omega'$$
$$=-\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\Omega'.\quad(15)$$

根据 $\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r},t)$ 的表达式(15)，可求出 Ω 内 $\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r},t)$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\nabla\times\nabla\times\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Omega'.$$

利用矢量分析公式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2\boldsymbol{A}$，可知

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\nabla\int_{\Omega}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Omega'$$
$$-\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Omega'.$$

根据关系式 $\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\boldsymbol{R})$ 和高斯公式 $\int_{\Omega}\nabla\cdot A\mathrm{d}\Omega=\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma$，上式可以变为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\nabla\oint_{\Gamma_{in}}\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)\cdot\boldsymbol{n}_{in}(\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Gamma'$$
$$+\int_{\Omega}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega'.$$

由于 $\boldsymbol{J}_s$ 只分布在 Ω_2 内的有界区域内，而在假想的无限远处曲面 Γ_{in} 上没有电流源分布，所以上式右端的第一个积分为零. 因此

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\int_{\Omega}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega'=\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t).$$

Ω 内 $\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r},t)$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}_s=\nabla\cdot\nabla\times\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\Omega'.$$

根据矢量公式 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$ 可知上式为 0.

因此，在整个 Ω 内，

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\boldsymbol{J}_s,\quad(16)$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}_s=0.\quad(17)$$

从(15)式出发，可知

$$\lim_{r\to\infty}r\boldsymbol{H}_s=\boldsymbol{0},\quad(18)$$

另外，我们不妨假定

$$\boldsymbol{H}_s|_{t=0}=\boldsymbol{0},\quad(19)$$

(16)—(19)式为 $\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r},t)$ 满足的定解问题. 可以证明该定解问题的解是唯一的[8]，而(15)式满足该定解问题，因此(15)式就是定解问题(16)—(19)的唯一解.

这样，我们引入了一个定义在整个场域中的函数 $\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r},t)$.

4. 能量估计式

4.1. 能量积分关于时间的导数

我们定义线性瞬态涡流场的能量积分为

$$W(t)=\int_{\Omega_1}\frac{1}{2}\mu_1 H_1^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\frac{1}{2}\mu_2 H_2^2\mathrm{d}\Omega,\quad(20)$$

将能量积分对时间 t 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=\int_{\Omega_1}\dot{\boldsymbol{B}}_1\cdot\boldsymbol{H}_1\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_2\mathrm{d}\Omega.\quad(21)$$

方程(4)表明，在 Ω_2 内，$\nabla\times\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{J}_s$ 方程(16)表明，在整个 Ω 内，$\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\boldsymbol{J}_s$. 所以在 Ω_2 内，也有 $\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\boldsymbol{J}_s$. 在 Ω_2 内将两式相减，可得

$$\nabla\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_s)=\boldsymbol{0}.\quad(22)$$

根据矢量公式 $\nabla\times(\nabla\varphi)=\boldsymbol{0}$,，由(22)式，可在 Ω_2 内引入标量位函数 φ，使得

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_s-\nabla\varphi.\quad(23)$$

将方程(2)和(23)代入(21)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=-\int_{\Omega_1}(\nabla\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{H}_1\mathrm{d}\Omega$$
$$+\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot(\boldsymbol{H}_s-\nabla\varphi)\mathrm{d}\Omega.\quad(24)$$

将上式右端的两个积分分别记为 I_1 和 I_2 来计算，则

$$I_1=-\int_{\Omega_1}(\nabla\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{H}_1\mathrm{d}\Omega$$
$$=\int_{\Omega_1}[-(\nabla\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{E}_1+\nabla\cdot(\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{E}_1)]\mathrm{d}\Omega.\quad(25)$$

将方程(1)代入(25)式，有

$$I_1=-\int_{\Omega_1}\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_1}\nabla\cdot(\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{E}_1)\mathrm{d}\Omega,$$

再根据高斯公式,可知

$$\begin{aligned}I_1&=-\int_{\Omega_1}\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Gamma}(\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma\\&=-\int_{\Omega_1}\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Gamma}(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}\tag{26}$$

将边界条件(6)代入(26)式,得

$$\begin{aligned}I_1&=-\int_{\Omega_1}\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Gamma}(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}\Gamma\\&=-\int_{\Omega_1}\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Gamma}(\boldsymbol{H}_2\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}\tag{27}$$

将(23)式代入(27)式得

$$\begin{aligned}I_1&=-\int_{\Omega_1}\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Gamma}(\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\times\boldsymbol{E}_1-\nabla\varphi\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma\\&=-\int_{\Omega_1}\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_1}\nabla\cdot(\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\times\boldsymbol{E}_1)\mathrm{d}\Omega\\&\quad-\oint_{\Gamma}(\nabla\varphi\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma\\&=-\int_{\Omega_1}\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega\\&\quad+\int_{\Omega_1}(\boldsymbol{E}_1\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}_1)\mathrm{d}\Omega\\&\quad-\oint_{\Gamma}(\nabla\varphi\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}\tag{28}$$

由于 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$ 只分布在 Ω_2 内,所以在 Ω_1 内

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{0}.\tag{29}$$

将方程(2)和(29)代入(28)式,得

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{\Omega_1}-\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_1}\dot{\boldsymbol{B}}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega\\&\quad-\oint_{\Gamma}(\nabla\varphi\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}\tag{30}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot(\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}-\nabla\varphi)\mathrm{d}\Omega\\&=\int_{\Omega_2}[\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}-\nabla\cdot(\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2)\\&\quad+\varphi\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_2]\mathrm{d}\Omega.\end{aligned}\tag{31}$$

根据方程(5),可知

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}_2)=0.$$

将上式代入(31)式,可得

$$I_2=\int_{\Omega_2}[\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}-\nabla\cdot(\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2)]\mathrm{d}\Omega.$$

根据高斯公式,有

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Gamma}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma\\&\quad-\oint_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}$$

将边界条件(7)代入上式,得到

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Gamma}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_1\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma\\&\quad-\oint_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}\tag{32}$$

再把方程(2)代入上式,得

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega-\oint_{\Gamma}\varphi(\nabla\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma\\&\quad-\oint_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}\tag{33}$$

这样,我们分别求出了(24)式右端的两个积分,(24)式可以变为下面的形式:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}&=I_1+I_2\\&=\int_{\Omega_1}-\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_1}\dot{\boldsymbol{B}}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega\\&\quad-\oint_{\Gamma}(\nabla\varphi\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma\\&\quad+\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega\\&\quad-\oint_{\Gamma}\varphi(\nabla\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma\\&\quad-\oint_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}\tag{34}$$

4.2. 无限远条件的使用

本部分内容是要利用无限远条件(8)将(34)式中在假想的无限远处边界 Γ_{in} 上的积分求出.

由无限远条件(8)和(18),得

$$\lim_{r\to\infty}r\nabla\varphi=\lim_{r\to\infty}(r\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}-r\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{0}\tag{35}$$

在 Ω_2 内任意作一个不把 Ω_1 中的点包含在内的有界光滑闭曲面 S,S 上的单位外法向矢量为 $\boldsymbol{n}$,S 的内部区域为 V,在 V 内任意一点

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{r}\\&=\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi+\varphi r^{\circ}.\end{aligned}\tag{36}$$

在 V 内对(36)式进行体积分,得

$$\int_V\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{r})\mathrm{d}V=\int_V(\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi+\varphi r^{\circ})\mathrm{d}V.$$

上式左端应用高斯公式,可得

$$\oint_S\varphi\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V(\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi+\varphi r^{\circ})\mathrm{d}V.\tag{37}$$

保持区域 V 的形状、大小不变，将 V 置于无限远处，根据(35)式，有

$$\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi=\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{r}^{\circ}\cdot(r\nabla\varphi)=0. \tag{38}$$

这样，当 $r\to\infty$ 时，(37)式右端第一项积分为 0，令 $\lim_{r\to\infty}\varphi=0$，所以(37)式的右端第二项积分也为零，即

$$\lim_{r\to\infty}\int_V(\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi+\varphi\boldsymbol{r}^{\circ})\mathrm{d}V=0. \tag{39}$$

因此，(37)式的左端也为零，即

$$\lim_{r\to\infty}\oint_S\varphi\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\lim_{r\to\infty}\oint_S\varphi r\boldsymbol{r}^{\circ}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0. \tag{40}$$

由 S 的任意性，可知

$$\lim_{r\to\infty}r\varphi=0. \tag{41}$$

(34)式中的最后一个积分可以写成

$$\oint_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}\mathrm{d}\Gamma=\lim_{r\to\infty}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}S_{\mathrm{in}}. \tag{42}$$

(42)式是用球心位于坐标原点，半径为 r 的球面 S_{in} 来代替 Γ_{in}，Γ_{in} 对原点所张开的立体角为 4π，再根据无限远条件(8)和(41)，(42)式变为

$$\oint_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\varphi\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}\mathrm{d}\Gamma=4\pi\lim_{r\to\infty}r\varphi\frac{\partial}{\partial t}(\lim_{r\to\infty}r\dot{\boldsymbol{B}}_2)\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}=0. \tag{43}$$

(34)式中在假想的无限远处边界 Γ_{in} 上的积分为 0，这样(34)式的形式变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=&\int_{\Omega_1}-\sigma_1E_1^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_1}\dot{\boldsymbol{B}}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega\\&+\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega\\&-\oint_\Gamma(\nabla\varphi\times\boldsymbol{E}_1+\varphi\nabla\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned} \tag{44}$$

4.3. 内边界条件的使用

本部分内容将利用内边界条件(6)和(7)将(34)式中在内边界 Γ 上的积分求出.

(44)式中右端最后一项积分中，$\boldsymbol{E}_1$ 是 Ω_1 中的量，φ 是 Ω_2 中的量，所以不能利用矢量微分公式将 $\nabla\varphi\times\boldsymbol{E}_1+\varphi\nabla\times\boldsymbol{E}_1$ 写成 $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{E}_1)$，这在数学上没有意义.

我们采用与文献[6]类似的方法，通过定义一个在内边界面 Γ 上具有连续一阶偏导数的新矢量函数 $\boldsymbol{G}$ 来研究(44)式，在后文中将给出函数 $\boldsymbol{G}$ 的存在性证明. 令

$$\boldsymbol{G}(P,t)=\begin{cases}\boldsymbol{E}_1(P,t),P\in\Omega_1,\\\boldsymbol{F}(P,t),P\in\Omega_2,\end{cases} \tag{45}$$

且 $\boldsymbol{G}$ 满足

$$\begin{aligned}\lim_{P\to Q}\nabla\times\boldsymbol{E}_1(P,t)&=\lim_{N\to Q}\nabla\times\boldsymbol{F}(N,t)\\&=\nabla\times\boldsymbol{F}(Q,t),\end{aligned} \tag{46}$$

$$\lim_{P\to Q}\boldsymbol{E}_1(P,t)=\lim_{N\to Q}\boldsymbol{F}(N,t)=\boldsymbol{F}(Q,t). \tag{47}$$

在以上二式中，$P\in\Omega_1$，$N\in\Omega_2$，$Q\in\Gamma$.

利用函数 $\boldsymbol{G}$，把(44)式中在内边界面 Γ 上的两项积分写成极限形式，可得

$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma[\lim_{N\to Q}\nabla\varphi(N,t)\times\lim_{P\to Q}\boldsymbol{E}_1(P,t)\\&+\lim_{N\to Q}\varphi(N,t)\lim_{P\to Q}\nabla\times\boldsymbol{E}_1(P,t)]\\&\cdot\boldsymbol{n}_1(Q)\mathrm{d}\Gamma(Q)\\=&\oint_\Gamma\lim_{N\to Q}[\nabla\varphi(N,t)\times\boldsymbol{F}(N,t)\\&+\varphi(N,t)\nabla\times\boldsymbol{F}(N,t)]\\&\cdot\boldsymbol{n}_1(Q)\mathrm{d}\Gamma(Q)\\=&\oint_\Gamma\lim_{N\to Q}\nabla\times[\varphi(N,t)\boldsymbol{F}(N,t)]\\&\cdot\boldsymbol{n}_1(Q)\mathrm{d}\Gamma(Q),\\&P\in\Omega_1,\ N\in\Omega_2,\ Q\in\Gamma.\end{aligned}$$

设 Γ 是由分片光滑的曲面 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 所组成的闭曲面，利用斯托克斯公式，上式成为

$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma\lim_{N\to Q}\nabla\times[\varphi(N,t)\boldsymbol{F}(N,t)]\cdot\boldsymbol{n}_1(Q)\mathrm{d}\Gamma(Q)\\=&\sum_{i=1}^m\int_{S_i}\nabla\times[\varphi(Q,t)\boldsymbol{F}(Q,t)]\cdot\boldsymbol{n}_1(Q)\mathrm{d}\Gamma(Q)\\=&\sum_{i=1}^m\oint_{C_i}\varphi(M,t)\boldsymbol{F}(M,t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}(M)\\=&\int_{C_1+C_2+\cdots+C_m}\varphi(M,t)\boldsymbol{F}(M,t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}(M),\end{aligned} \tag{48}$$

式中 C_i 为 S_i 的有向边界闭曲线，$M\in C_i$，$i=1,2,\cdots,m$.

设 C_{ij} 表示 C_i 与 C_j 的公共边界线，则

$$C_1+C_2+\cdots+C_m=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^m(C_{ij}+C_{ji}). \tag{49}$$

再利用(47)式，(48)式可写成

$$\begin{aligned}&\int_{C_1+C_2+\cdots+C_m}\varphi(M,t)\boldsymbol{F}(M,t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}(M)\\=&\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^m\lim_{\substack{N\to M\\P\to M}}\int_{C_{ij}}[\varphi(N,t)\boldsymbol{F}(P,t)\\&-\varphi(N,t)\boldsymbol{F}(P,t)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}(M)=0,\end{aligned} \tag{50}$$

式中 $N\in\Omega_2$，$P\in\Omega_1$，$M\in C_{ij}$，$C_{ij}\in\Gamma$. 因此

$$\oint_\Gamma(\nabla\varphi\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma+\oint_\Gamma\varphi(\nabla\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}\Gamma=0.$$

(44)式变成

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=\int_{\Omega_1}-\sigma_1 E_1^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_1}\dot{\boldsymbol{B}}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega. \tag{51}$$

4.4. 能量估计式的导出

设正常数 μ_N 满足 $\mu_N>\max\{\mu_{\mathrm{M}},\mu_2\}$，根据(51)式有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}&\leqslant\int_{\Omega_1}\dot{\boldsymbol{B}}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\dot{\boldsymbol{B}}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega_1}\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega\right)\\&\quad-\left(\int_{\Omega_1}\boldsymbol{B}_1\cdot\dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\boldsymbol{B}_2\cdot\dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Omega\right)\\&\leqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\Omega_1}\left(\frac{B_1^2}{2\mu_N}+\frac{1}{2}\mu_N H_{\mathrm{s}}^2\right)\mathrm{d}\Omega\right.\\&\quad\left.+\int_{\Omega_2}\left(\frac{B_2^2}{2\mu_N}+\frac{1}{2}\mu_N H_{\mathrm{s}}^2\right)\mathrm{d}\Omega\right]\\&\quad+\int_{\Omega_1}\left[\frac{B_1^2}{2\mu_N}+\frac{1}{2}\mu_N\dot{H}_{\mathrm{s}}^2\right]\mathrm{d}\Omega\\&\quad+\int_{\Omega_2}\left[\frac{B_2^2}{2\mu_N}+\frac{1}{2}\mu_N\dot{H}_{\mathrm{s}}^2\right]\mathrm{d}\Omega\\&\leqslant\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega_1}\frac{B_1^2}{2\mu_1}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\frac{B_2^2}{2\mu_2}\mathrm{d}\Omega\right)\\&\quad+\xi\left(\int_{\Omega_1}\frac{B_1^2}{2\mu_1}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\frac{B_2^2}{2\mu_2}\mathrm{d}\Omega\right)\\&\quad+C_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}H_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\dot{H}_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega\right)\\&=\xi\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}+\xi W(t)\\&\quad+C_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}H_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\dot{H}_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega\right).\end{aligned}\tag{52}$$

经过整理，得到

$$(1-\xi)\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\xi W(t)+C_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}H_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\dot{H}_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega\right),\tag{53}$$

其中 $\xi=\dfrac{\max\{\mu_{\mathrm{M}},\mu_2\}}{\mu_N}<1$，$C_1$ 是与场点和时间无关的正常数. 在(53)式两端同乘 $\mathrm{e}^{-\frac{\xi t}{1-\xi}}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\xi t}{1-\xi}}W(t)\right]}{\mathrm{d}t}\leqslant C_1\mathrm{e}^{-\frac{\xi t}{1-\xi}}\left[\int_{\Omega}\frac{\partial(H_{\mathrm{s}}^2)}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial H_s}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\Omega\right]$$

$$\leqslant C_2\left[\int_{\Omega}\frac{\partial(H_{\mathrm{s}}^2)}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial H_s}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\Omega\right],\tag{54}$$

C_2 也是与场点和时间无关的正常数. 在(54)式两边对时间 t 从 0 到 t 积分，得

$$W(t)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\xi t}{1-\xi}}\left[W(0)+C_2\int_{\Omega}H_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega+C_2\int_0^t\int_{\Omega}\dot{H}_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\right].\tag{55}$$

当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，有

$$W(t)\leqslant C\left[W(0)+\int_{\Omega}H_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega+\int_0^T\int_{\Omega}\dot{H}_{\mathrm{s}}^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\right],\tag{56}$$

C 是仅与 T 有关的正常数. (56)式是定解问题(1)—(10)的能量估计式.

5. 函数 G 的存在性

在导出能量估计式的过程中，我们假定了一个在内边界面 Γ 上具有连续一阶偏导数的新函数 $\boldsymbol{G}$，该函数的存在性对本文的推导过程有重要作用.

下面用数学方法来构造这样一个函数，以证明函数 $\boldsymbol{G}$ 的存在性.

函数 $\boldsymbol{G}$ 可以看成函数 $\boldsymbol{E}_1$ 从区域 Ω_1 到整个空间 Ω 的拓展，拓展的条件是满足(46)和(47)式，即

$$\lim_{P\to Q}\nabla\times\boldsymbol{E}_1(P,t)=\lim_{N\to Q}\nabla\times\boldsymbol{F}(N,t)=\nabla\times\boldsymbol{F}(Q,t),$$

$$\lim_{P\to Q}\boldsymbol{E}_1(P,t)=\lim_{N\to Q}\boldsymbol{F}(N,t)=\boldsymbol{F}(Q,t),$$

矢量函数 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{F}$ 都可以分解成三个标量函数

$$\boldsymbol{E}_1\in[e_1\quad e_2\quad e_3]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F}\in[f_1\quad f_2\quad f_3]^{\mathrm{T}}.$$

设三维空间的三个坐标分量为 x_1,x_2,x_3，如果 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{F}$ 满足

$$\lim_{P\to Q}e_i(P,t)=\lim_{N\to Q}f_i(N,t),\tag{57}$$

$$\lim_{P\to Q}\frac{\partial e_i}{\partial x_j}(P,t)=\lim_{N\to Q}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(N,t),\tag{58}$$

$$i=1,2,3,\quad j=1,2,3,$$

则(46)和(47)式能够保证. 因此，只要将 $\boldsymbol{E}_1$ 的每个分量函数从区域 Ω_1 拓展到整个空间 Ω，并保证拓展后的函数在内边界 Γ 上有连续的一阶偏导数即可. 三个分量函数的拓展方法一致，所以我们选择其中的任意一个，将它记为 e 进行讨论. 由于对函数 $\boldsymbol{E}_1$ 的拓展与时间变量 t 无直接关系，我们暂时将 t 作为一个参数处理. (2)与(58)式都要求 e 关于场点有一阶偏导数，因此我们设 $e\in H^1(\Omega_1)$，该空间表

示函数 e 以及 e 的一阶偏导数都是 Ω_1 上的平方可积函数.

下面利用偏微分方程理论中局部化与展平的技巧[9]对 e 进行拓展.

设 Ω_1 的边界 Γ 为 C^∞ 光滑，在每一点 $x_0 \in \Gamma$ 附近，可以找到一个邻域 O_{x_0}，在 O_{x_0} 中，边界 Γ 可以用方程 $u(x)=0$ 来表示，并且在 Ω_1 中邻近 x_0 的点 x，满足 $u(x)>0$. 在 O_{x_0} 中进行 C^∞ 可逆坐标变换 $x \mapsto y: x=h(y)$，其中 $y_3=u(x)$. 变换后，Ω_1 在 x_0 附近的部分将微分同胚于上半空间 $\{y: y\in \mathbf{R}^3, y_3>0\}$ 中的一个开集，而 Γ 在 x_0 附近将被一个微分同胚变为 $y_3=0$ 的一部分. 由于 Γ 是有界的，因此可选出有限个邻域 $O_1, O_2, \cdots, O_l$ 覆盖 Γ，由于 $\Omega_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} O_i$（记号'区域 1 \ 区域 2'表示区域 1 中除去区域 2 以外的部分）是 Ω_1 中的紧集，因此又可以用一个有限的开集 O_0 来覆盖它. 这样，就找到一族有限开集 $\{O_i\}_{i=0}^{l}$ 来覆盖 $\bar{\Omega}_1$，并且可找到一组相应的微分同胚 $\theta_i: O_i \to B_i$，B_i 是 $\mathbf{R}^3$ 中的开集. 根据单位分解定理[10]，可以找到一组从属于开集组 $\{O_i\}_{i=0}^{l}$ 的单位分解：

$$\sum_{i=0}^{l} \xi_i(x) \equiv 1,\ x \in \bar{\Omega}_1,$$

其中 $\xi_i \geqslant 0, \xi_i \in C_0^\infty(O_i), i=0,1,2,\cdots,l$. 由于

$$e = e\sum_{i=0}^{l}\xi_i = \sum_{i=0}^{l}\xi_i e,$$

令 $\Omega_{1i}=\Omega_1\cap O_i, \Gamma_i=\Gamma\cap O_i, B_{i+}=\{y: y\in B_i, y_3>0\}$，则 $\xi_i e\in H^1(\Omega_{1i}), i=0,1,2,\cdots,l$, B_{i+} 是 Ω_{1i} 的像. 微分同胚 θ_i 作用于 O_i 中的点 x，可得到同胚空间 B_i 中的点 y，即 $y=\theta_i(x)$；θ_i 的逆 θ_i^{-1} 作用于空间 B_i 中的点 y，可得到同胚空间 O_i 中的点 x，即 $x=\theta_i^{-1}(y)$. $\xi_i e$ 是定义在 Ω_{1i} 上的函数，用 $(\theta_i^{-1})^*$ 作用到 $\xi_i e$ 上，可得到定义在 B_{i+} 上的函数 $(\theta_i^{-1})^*\xi_i e$，符号 $(\theta_i^{-1})^*$ 表示 θ_i^{-1} 的'拉回'，它满足

$$(\theta_i^{-1})^*\xi_i e(y) = \xi_i e(\theta_i^{-1}(y)) = \xi_i e(x).$$

由于局部化后的函数 $\xi_i, \xi_i e$ 在 O_i 中具有紧支集，因此在边界 $\partial\Omega_{1i}\setminus\Gamma_i$ 附近为 0，经过变换后的函数 $(\theta_i^{-1})^*\xi_i e$ 在 $\partial B_{i+}/\{y_3=0\}$ 的附近也为 0，从而可以对 $(\theta_i^{-1})^*\xi_i e$ 在 $\mathbf{R}_+^3$ 作零拓展，$\mathbf{R}_+^3=\{y\in\mathbf{R}^3, y_3>0\}$. 记拓展后的函数为 $\overline{(\theta_i^{-1})^*\xi_i e}=v_i$. 由于 $H^1(\Omega_1)$ 在微分同胚下不变[9]，可知 $e\in H^1(\Omega_1)$ 当且仅当 $v_i \in H^1(\mathbf{R}_+^3), i=0,1,2,\cdots,l$. 因此，在考虑 $H^1(\Omega_1)$ 的拓展时，可以只考虑 $H^1(\mathbf{R}_+^3)$ 的拓展，即我们只要能够在 $H^1(\mathbf{R}_+^3)$ 空间中把 v_i 拓展到整个空间，e 就能相应的拓展到整个空间.

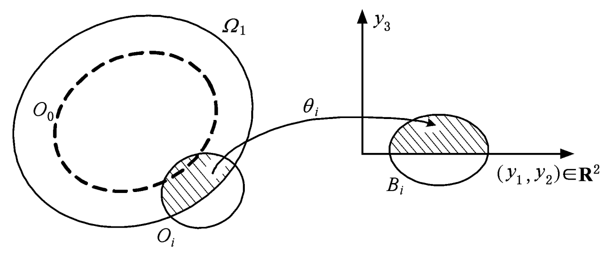

图 2　坐标变换示意图

由于 $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^3)$ 在 $H^1(\mathbf{R}_+^3)$ 中稠密[9]，我们可先对 $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^3)$ 中的函数 $u(y)$ 定义拓展算子 P：

$$Pu(y) = \begin{cases} u(y_1,y_2,y_3) & y_3>0, \\ 3u(y_1,y_2,-y_3)-2u(y_1,y_2,-2y_3) & y_3<0, \end{cases} \tag{59}$$

(59)式中的 $Pu(y)$ 在平面 $y_3=0$ 上具有连续的一阶偏导数，即 $Pu(y)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$. 根据 $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+^3)$ 在 $H^1(\mathbf{R}_+^3)$ 中的稠密性，即可将 P 定义到 $v_i\in H^1(\mathbf{R}_+^3)$，并且有

$$Pv_i(y_1,y_2,0^+) = Pv_i(y_1,y_2,0^-), \tag{60}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}Pv_i(y_1,y_2,0^+) = \frac{\partial}{\partial y_j}Pv_i(y_1,y_2,0^-), \tag{61}$$

$$i=1,2,3,\ j=1,2,3.$$

由(60)和(61)式可以看出，Pv_i 在 $y_3=0$ 上具有连续的一阶偏导数，而 Pv_i 在 θ_i 上的'拉回'$\theta_i^* Pv_i$（满足 $\theta_i^* Pv_i(x)=Pv_i(\theta_i(x))=Pv_i(y)$）在边界 Γ 上有连续的一阶偏导数，满足(57)—(58)的假定. 因此，(45)—(47)假定的函数 G 存在.

6. 定解问题解的唯一性和稳定性

根据定解问题的能量估计式(56)，我们可以证明定解问题解的唯一性和稳定性. 首先，给出解的唯一性定理.

定理 1　线性瞬态涡流电磁场定解问题(1)—(10)的解如果存在，则它一定是唯一的.

证　采用反证法.

如果定解问题(1)—(10)存在两组不同的解，它们的差也满足(1)—(10)式，但式中 $\boldsymbol{J}_s, \boldsymbol{B}_{i0}$ 和 $\boldsymbol{H}_{i0}$ 均

为 $\mathbf{0}$，$i=1,2$. 因此

$$W(0)=\int_{\Omega_1}\frac{1}{2}\mu_1 H_{10}^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\frac{1}{2}\mu_2 H_{20}^2\mathrm{d}\Omega=0,$$

并且由（15）式可知此时 $\boldsymbol{H}_s=\mathbf{0}$，所以由（56）式可得出

$$W(t)=\int_{\Omega_1}\frac{1}{2}\mu_1 H_1^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\frac{1}{2}\mu_2 H_2^2\mathrm{d}\Omega\leqslant W(0)=0.$$

能量积分 $W(t)$ 不可能为负，所以只能有 $W(t)=0$，因此

$$\boldsymbol{H}_1=\mathbf{0},\ \boldsymbol{H}_2=\mathbf{0},$$

这说明两组解是相同的. 证毕.

定理 2 线性瞬态涡流电磁场定解问题（1）—（10）的解在下述意义下关于初始条件 $\boldsymbol{B}_{i0}$，$\boldsymbol{H}_{i0}$ 与外源电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 是稳定的 对任何给定的 $\varepsilon>0$，一定可以找到仅依赖于 ε 和 T 的 $\eta>0$，只要

$$\|\boldsymbol{H}_{10}^{(1)}-\boldsymbol{H}_{10}^{(2)}\|_{L^2(\Omega_1)}\leqslant\eta,$$

$$\|\boldsymbol{H}_{20}^{(1)}-\boldsymbol{H}_{20}^{(2)}\|_{L^2(\Omega_2)}\leqslant\eta,$$

$$\|\boldsymbol{J}_s^{(1)}-\boldsymbol{J}_s^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\eta,$$

$$\|\dot{\boldsymbol{J}}_s^{(1)}-\dot{\boldsymbol{J}}_s^{(2)}\|_{L^2(\Omega,Q)}\leqslant\eta,$$

其中 $Q=(0,T)$，那么以 $\boldsymbol{H}_{10}^{(1)}$，$\boldsymbol{H}_{20}^{(1)}$ 为初值，以 $\boldsymbol{J}_s^{(1)}$ 为外源电流密度的解 $\boldsymbol{H}_1^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{H}_2^{(1)}$ 与以 $\boldsymbol{H}_{10}^{(2)}$，$\boldsymbol{H}_{20}^{(2)}$ 为初值，以 $\boldsymbol{J}_s^{(2)}$ 为外源电流密度的解 $\boldsymbol{H}_1^{(2)}$ 和 $\boldsymbol{H}_2^{(2)}$ 在 Q 上满足

$$\|\boldsymbol{H}_1^{(1)}-\boldsymbol{H}_1^{(2)}\|_{L^2(\Omega_1)}\leqslant\varepsilon,$$

$$\|\boldsymbol{H}_2^{(1)}-\boldsymbol{H}_2^{(2)}\|_{L^2(\Omega_2)}\leqslant\varepsilon.$$

证 记 $\boldsymbol{H}_1'=\boldsymbol{H}_1^{(1)}-\boldsymbol{H}_1^{(2)}$，$\boldsymbol{H}_2'=\boldsymbol{H}_2^{(1)}-\boldsymbol{H}_2^{(2)}$，可列出 $\boldsymbol{H}_1'$，$\boldsymbol{H}_2'$ 满足的定解问题. 根据（15）式可知存在 $\eta>0$，使得 $\|\boldsymbol{J}_s^{(1)}-\boldsymbol{J}_s^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\eta$ 时，$\|\boldsymbol{H}_s^{(1)}-\boldsymbol{H}_s^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\eta$，并且 $\|\dot{\boldsymbol{J}}_s^{(1)}-\dot{\boldsymbol{J}}_s^{(2)}\|_{L^2(\Omega,Q)}\leqslant\eta$ 时，$\|\dot{\boldsymbol{H}}_s^{(1)}-\dot{\boldsymbol{H}}_s^{(2)}\|_{L^2(\Omega,Q)}\leqslant\eta$. 再利用能量估计式（56），可得结论. 证毕.

7. 解析应用例

本部分内容研究单匝圆环线圈与球形导体共轴的涡流问题，它的结果可用于石墨球、钢珠的涡流无损检测和计算.

均匀球形导体位于无限大真空中，见图 3，球导体的电导率为 σ，磁导率为 μ_0，半径为 α. 球形导体外侧有同轴的圆环线圈，它的半径为 ρ'. 选取球坐标系 O-$r\theta\phi$，坐标原点 O 位于球心处，z 轴与线圈的对称轴重合. 线圈中通过图 4 所示的单脉冲电流，其参考方向与 z 轴的正向成右手螺旋关系，忽略位移电流. 根据场域的轴对称性质，磁场 $\boldsymbol{H}$ 与坐标周向分量 ϕ 无关，且 $\boldsymbol{H}=H_r\boldsymbol{e}_r+H_\theta\boldsymbol{e}_\theta$. 我们把场域分成两个场区：

1 区（涡流区）：$0\leqslant r<a$，2 区（非涡流区）：$r>a$.

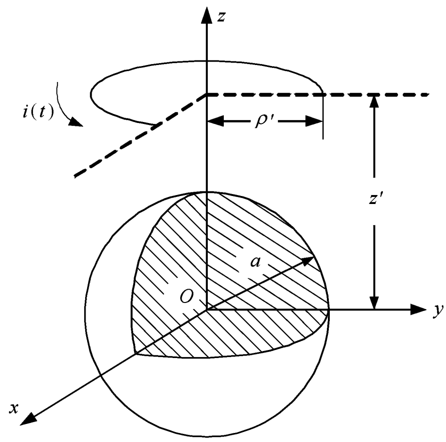

图 3 球形导体外侧的通电圆环线圈

设磁场的初值为零，利用定解问题（1）—（10）可写出图 3 对应的定解问题为

$$\nabla^2\boldsymbol{H}_1-\sigma\mu_0\dot{\boldsymbol{H}}_1=\mathbf{0} \qquad 0\leqslant r<a, \tag{62}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}_1=0, \tag{63}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{J}_s \qquad r>a, \tag{64}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}_2=0, \tag{65}$$

$$H_{1r}=H_{2r}, \qquad r=a, \tag{66}$$

$$H_{1\theta}=H_{2\theta}, \tag{67}$$

$$\lim_{r\to\infty}r\boldsymbol{H}_2=\mathbf{0}, \tag{68}$$

$$\boldsymbol{H}_i\big|_{t=0}=\mathbf{0}, \qquad i=1,2, \tag{69}$$

式中 $\boldsymbol{J}_s=i(t)\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\boldsymbol{e}_\phi$，$i(t)=I_0[u(t)-u(t-t_0)]$，$r'=\sqrt{\rho'^2+z'^2}$，$\theta'=\arctan\dfrac{\rho'}{z'}$.

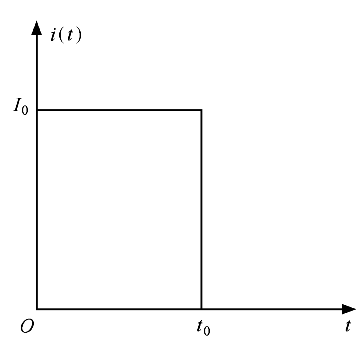

图 4 激励电流的波形

通过以下步骤可得到以上定解问题的解析解.

第一步，利用初始条件(69)式，分别在(62)—(72)式两端以时间 t 为积分变量取拉普拉斯变换，把初边值问题转化成复数域上的边值问题.

第二步，由(63)和(65)式可引入矢量磁位 A，使得 $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}/\mu_0$. $\boldsymbol{A}$ 只由周向分量组成，$\boldsymbol{A} = A_\phi \boldsymbol{e}_\phi$，且 A_ϕ 与坐标分量 ϕ 无关.将约束方程(62)—(65)转化为由矢量磁位 A 表示的方程.

第三步，根据叠加原理，A_2 可认为是由无限大真空中仅由圆环线圈产生的入射场 A_2^{in} 和仅由球形导体中的涡流在导体外侧产生的散射场 A_2^{sc} 之和.可求出 A_2^{in} 的表达式为

$$\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{in}} = A_{2\phi}^{\mathrm{in}} \boldsymbol{e}_\phi = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu_0 I(s) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n \mathrm{P}_n^1(\cos\theta)\boldsymbol{e}_\phi, \\ \qquad a < r < r', \\ \dfrac{1}{2}\mu_0 I(s) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} \mathrm{P}_n^1(\cos\theta)\boldsymbol{e}_\phi, \\ \qquad r > r', \end{cases} \tag{70}$$

其中 $I(s) = \dfrac{I_0}{s}(1 - \mathrm{e}^{-t_0 s})$，$\alpha_n = \dfrac{\sin\theta' \mathrm{P}_n^1(\cos\theta')}{n(n+1)}$.

第四步，根据无限远条件可分别写出各场区中 A 的通解表达式[11]，如下：

$$\boldsymbol{A}_1 = A_{2\phi}\boldsymbol{e}_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{j}_n(k_1 r)\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)\boldsymbol{e}_\phi,$$

$$\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{sc}} = A_{2\phi}^{\mathrm{sc}}\boldsymbol{e}_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{r^{n+1}}\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)\boldsymbol{e}_\phi,$$

式中 $k_1^2 = -s\mu_0\sigma$，$\mathrm{j}_n(k_1 r)$是第一类球贝塞尔函数，$\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)$是 n 次一阶连带勒让德函数，C_n 和 D_n 是待定系数.再由 $\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{A}$，可写出各场区中 $\boldsymbol{H}$ 的通解表达式，其中 $\boldsymbol{H}_2 = \dfrac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{in}} + \nabla \times \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{sc}})$.

第五步，将 H 的通解表达式代入边界条件(66)和(67)中，确定系数 C_n 和 D_n 分别为

$$C_n = \frac{1}{2}\mu_0 I(s)(2n+1)\alpha_n\beta_n,$$

$$D_n = \frac{1}{2}\mu_0 I(s)\alpha_n\beta_n\gamma_n,$$

其中

$$\beta_n = \frac{1}{k_1 a \mathrm{j}_{n-1}(k_1 a)}\left(\frac{a}{r'}\right)^n,$$

$$\gamma_n = a^{n+1}[(2n+1)\mathrm{j}_n(k_1 a) - k_1 a \mathrm{j}_{n-1}(k_1 a)].$$

根据求出的系数，可写出磁场强度的表达式

$$H_{1r}(s) = \frac{I(s)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\alpha_n\beta_n \frac{\mathrm{j}_n(k_1 r)}{r}\left[2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathrm{P}_n^1(\cos\theta) - \mathrm{P}_n^2(\cos\theta)\right], \tag{71}$$

$$H_{1\theta}(s) = -\frac{I(s)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\alpha_n\beta_n\left[k_1 \mathrm{j}_{n-1}(k_1 r) - \frac{n\mathrm{j}_n(k_1 r)}{r}\right]\mathrm{P}_n^1(\cos\theta), \tag{72}$$

$$H_{2r}(s) = \frac{I(s)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\beta_n\gamma_n}{r^{n+2}} + \frac{r^{n-1}}{r'^n}\right)\left[2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathrm{P}_n^1(\cos\theta) - \mathrm{P}_n^2(\cos\theta)\right], a < r < r', \tag{73}$$

$$H_{2\theta}(s) = \frac{I(s)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left[\frac{n\beta_n\gamma_n}{r^{n+2}} - (n+1)\frac{r^{n-1}}{r'^n}\right]\mathrm{P}_n^1(\cos\theta), a < r < r', \tag{74}$$

$$H_{2r}(s) = \frac{I(s)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\beta_n\gamma_n}{r^{n+2}} + \frac{r'^{n+1}}{r^{n+2}}\right)\left[2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathrm{P}_n^1(\cos\theta) - \mathrm{P}_n^2(\cos\theta)\right], r > r', \tag{75}$$

$$H_{2\theta}(s) = \frac{I(s)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n\left[\frac{\beta_n\gamma_n}{r^{n+2}} + \frac{r'^{n+1}}{r^{n+2}}\right]\mathrm{P}_n^1(\cos\theta), r > r'. \tag{76}$$

第六步，对复数域中的 $\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$ 取拉普拉斯反变换[12]，可求得时域中的磁场强度表达式.(71)—(76)式都可以写成 $H(s) = I(s)F(s)$的形式，$i(t) = L^{-1}[I(s)]$，令 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$，可知 $h(t) = L^{-1}[H(s)] = i(t) * f(t)$，符号‘ $*$ ’表示卷积，可利用文献[13]中给出的方法计算.

可以验证，求出的解析解满足定解问题(62)—(69)，所以定解问题的解是存在的.求解过程中，待定参数的取值都是唯一确定的，即定解问题的解是唯一的.从(71)—(76)式中可看出，当场源的脉冲宽度 t_0 和幅值 I_0 发生微小变化，场量也相应地变化很小，即定解问题的解是稳定的.

8. 结　　论

场区中忽略位移电流，在涡流区和非涡流区的光滑交界面上用磁感应强度的法向分量边界条件代替电场强度的切向分量边界条件，可在组成线性瞬态涡流电磁场定解问题. 这样的定解问题有唯一解，并且解关于初始条件和外源项是稳定的. 本文结果对于分析和求解线性瞬态涡流电磁场定解问题有一定指导作用.

[1] Xiao C Y, Lei Y Z 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1950 (in Chinese) [肖春燕、雷银照 2005 物理学报 **54** 1950]

[2] Wang K 2005 *Acta Phys*. *Sin*. 54 3987 (in Chinese) [王　坤 2005 物理学报 **54** 3987]

[3] de Haan V O, de Jong P A 2004 *IEEE Transactions on Magnetics* **40** 371

[4] Canova A, Vusini B 2005 *IEEE Transactions on Magnetics* **41** 24

[5] Biro O, Pries K 1989 *IEEE Transactions on Magnetics* **25** 3145

[6] Lei Y Z, Xiong H J, Wang S B 2003 *Proceedings of the Chinese Society of Electrical Engineering* **23** 81 (in Chinese) [雷银照、熊华俊、王书彬 2003 中国电机工程学报 **23** 81]

[7] Fu J M, Feng E X 2000 *Advanced Electromagnetic Theory* (Xi 'an: Xi 'an Jiaotong University Press) p20 (in Chinese) [傅君眉，冯恩信 2000 高等电磁理论(西安 西安交通大学出版社)第 20 页]

[8] Lei Y Z 2000 *Analytical Methods for Time-harmonic Electromagnetic Fields* (Beijing: Science Press) p9 (in Chinese) [雷银照 2000 时谐电磁场解析方法(北京 科学出版社)第 9 页]

[9] Qi M Y 1986 *Theory of Linear Partial Differential Operators* (Volume 1) (Beijing: Science Press) (in Chinese) [齐民友 1986 线性偏微分算子引论(上册) (北京 科学出版社)]

[10] Chen S X 1981 *Introduction to Partial Differential Equations* (Beijing: People 's Education Press) p88 (in Chinese) [陈恕行 1981 偏微分方程概论(北京 人民教育出版社)第 88 页]

[11] Dodd C V, Deeds W E 1968 *J*. *Appl*. *Phys*. **39** 2829

[12] Oberhettinger F, Badii Larry 1973 *Tables of Laplace Transforms* (Berlin: Springer)

[13] Nussbaumer H J 1981 *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms* (Berlin, New York: Springer-Verlag)

Uniqueness and stability of solution to the linear transient eddy current electromagnetic field problem for determining solution*

Xie Li　Lei Yin-Zhao

(*School of Automation and Electrical Engineering*, *Beihang University*, *Beijing* 100083, *China*)

(Received 8 November 2005; revised manuscript received 23 February 2006)

Abstract

The linear transient eddy current electromagnetic field problem for determining solution is characterized by replacing the interface condition of the tangential component of the electric field intensity by the interface condition of the normal component of the magnetic flux density, and ignoring the displacement current in the constraint equations. In is a fundamental theoretical problem whether the solution to the irregular problem for determining solution in unique and stable. In this paper, we introduce a scalar potential function in the nonconducting region, and prove the existence of an auxiliary function which is important to the problem. After deriving the energy estimate inequality, the uniqueness and stability of the solution to the linear transient eddy current electromagnetic field problem for determining solution are proved. The results of the paper can provide theoretical basis for analyzing and calculating the linear transient eddy current electromagnetic field problem. As an application example, we present the analytical solution to the eddy current problem that a single-turn coil driven by solitary pulse current is arranged coaxially with a spherical conductor.

Keywords: transient eddy current electromagnetic field, energy estimate inequality, uniqueness, stability

PACC: 0200, 0350D, 4110

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50377002).