

# 可激发介质湍流的耦合同步及控制<sup>\*</sup>

钱 郁 宋宣玉 时 伟 陈光旨 薛 郁

(广西大学物理科学与工程技术学院, 南宁 530004)

(2005 年 12 月 30 日收到, 2006 年 2 月 6 日收到修改稿)

利用相互耦合方法实现了两个处于湍流态的可激发系统的精确同步, 给出了确定耦合系数的方法, 计算了最大横向 Lyapunov 指数. 并基于相互耦合, 将处于湍流态的可激发系统与两个处于不同状态的可激发系统进行相互耦合, 实现了用两种不同方法对湍流态的稳定控制.

关键词: 可激发介质, 湍流控制, 同步, 耦合系数

PACC: 0414

## 1. 引 言

几十年来, 随着混沌理论、混沌同步和混沌控制研究的广泛开展<sup>[1, 2]</sup>, 人们对耦合映像格子模型、时空振子模型和一维连续系统的 CGLE 模型开展了广泛地研究, 研究内容主要是时空混沌的同步和失同步行为. 但是, 在许多真实的系统中, 包括生物、化学和物理体系, 例如心脏、B-Z 反应以及铂(Pt110)催化剂表面的一氧化碳氧化等等, 它们往往是可激发的或是振荡的连续系统, 一般由反应-扩散模型来描述<sup>[3, 4]</sup>. 在这些模型中存在着许多非平衡态的时空斑图, 如螺旋波和图灵斑图等, 随着系统参数的变化, 这些规则的时空斑图会发生破碎而自发导致时空混沌, 即湍流.

随着耗散系统与保守系统的混沌同步与控制得到广泛的发展, 已经提出了许多同步和控制的方法, 这些方法可以进一步推广到时空混沌当中. 螺旋波和湍流的同步和控制是很有现实意义的, 例如消除心脏中的螺旋波或湍流态. 到目前为止, 已经提出了许多螺旋波和湍流的控制方法, 比如周期外力控制法<sup>[5, 6]</sup>、旋转中心力场法<sup>[7]</sup>、弱空间微扰控制法<sup>[8]</sup>、延迟反馈控制法<sup>[9]</sup>等. 在文献 [10] 中利用对参数的周期驱动, 实现了三维可激发介质的湍流控制. 最近, 由于实验技术的提高, 在两个相互耦合的光敏感的 B-Z 反应实验系统中, 观测到缺陷湍流系统的螺旋波同步现象<sup>[11]</sup>; 在理论和数值模拟上, 利用延迟耦

合方法<sup>[12]</sup>已经实现了两个可激发系统螺旋波的同步和控制. 而对于可激发介质湍流同步的研究并不很多, 为了对其有更深入地了解和寻找更好、更有效的湍流控制方法, 作者以可激发系统为例, 对湍流态的同步和控制做了进一步研究.

本文采用改进了的 FHN 模型, 利用相互耦合方法, 实现了两个可激发系统湍流态的精确同步. 研究了在相同参数情况下, 耦合系数对两个相互耦合的可激发系统湍流同步的影响, 并通过计算最大横向 Lyapunov 指数来确定耦合系数. 最后用两种不同的方法实现了湍流态的稳定控制: 一是将处于湍流态的系统和处于静息态的系统进行相互耦合, 能够很快将湍流态抑制成静息态. 二是将处于湍流态的系统和有外周期力控制的给定系统<sup>[5]</sup>进行相互耦合, 实现了只需对已知的外周期力参数(如圆频率  $\omega$ )进行微调, 便可以对参数  $\epsilon$  在 0.065 到 0.090 之间湍流态系统的稳定控制.

## 2. 模 型

本文采用的是 CO 在铂(Pt110)表面氧化反应的模型. 该模型由以下方程组描述:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \epsilon^{-1} u(1-u) \left[ u - \frac{(v+b)}{a} \right] + \nabla^2 u, \\ \partial_t v &= f(u) - v, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10362001, 10147201)资助的课题.

$$f(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leq u < 1/3, \\ 1 - 6.75u(u - 1)^2 & 1/3 \leq u \leq 1, \\ 1 & u > 1. \end{cases}$$

这里  $u$  和  $v$  分别是快变量和慢变量。 $f(u)$  描述了阻滞子的延迟。当  $b < 0$  时，系统是振荡的，而当  $b > 0$  时则是可激发的<sup>[13]</sup>。

在数值模拟实验中，把参数固定在  $a = 0.84, b = 0.07$ 。在这组参数下，当  $0.01 < \epsilon < 0.06$  时，系统能产生稳定的螺旋波<sup>[14]</sup>，其波头轨迹是一个圆，而不是花瓣形；当  $\epsilon = 0.06$  时，螺旋波开始发生“漫游失稳”；当  $\epsilon > 0.07$  时，螺旋波开始破碎。随着时间的演化，最终进入化学湍流状态。考虑到本文研究的是可激发系统的湍流同步及控制，因此取  $\epsilon = 0.085$ 。

我们采用的算法属于半隐格式，拉普拉斯算子则采用五点差分格式<sup>[15]</sup>，空间步长取为  $dx = dy = 0.39$ <sup>[14]</sup>，时间步长取为  $dt = 0.02$ <sup>[5]</sup>。该算法收敛性比较好，不需要重复迭代，大大减少了计算量。采用的边界条件是无流边界，数值模拟是在一个含有  $150 \times 150$  个格点的二维平面上进行的。

### 3. 湍流的耦合同步

复制一个和系统(1)一样的可激发系统，其变量用  $u', v'$  表示。在其上加上相互耦合，耦合系数用  $c$  表示。则原系统为

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \epsilon^{-1} \left\{ u(1-u) \left[ u - \frac{(v+b)}{a} \right] \right\} \\ &\quad + \nabla^2 u + c(u' - u), \\ \partial_t v &= f(u) - v + c(v' - v). \end{aligned} \tag{2}$$

复制的系统为

$$\begin{aligned} \partial_t u' &= \epsilon^{-1} \left\{ u'(1-u') \left[ u' - \frac{(v'+b)}{a} \right] \right\} \\ &\quad + \nabla^2 u' + c(u - u'), \\ \partial_t v' &= f(u') - v' + c(v - v'). \end{aligned} \tag{3}$$

研究初值存在微小差别的两个系统，系统参数均定为  $a = 0.84, b = 0.07, \epsilon = 0.085$ 。由于在这组参数下这两个系统都将很快演化成湍流态，所以随着时间的发展，两系统之间的差别将越来越大。

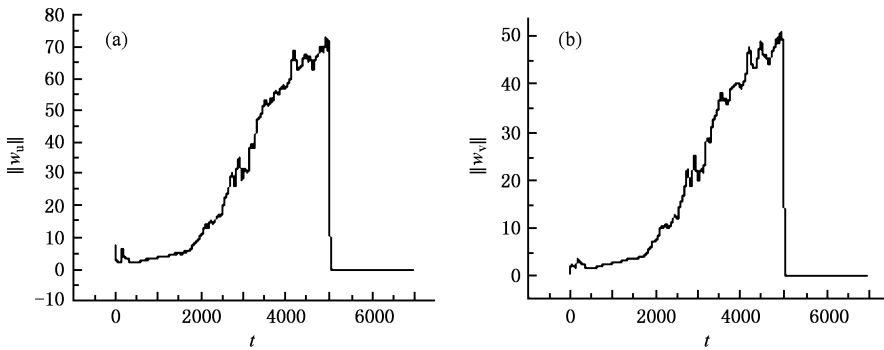


图1 耦合系数  $c = 0.10$  时  $\|w_k\| (k = u, v)$  随时间的变化

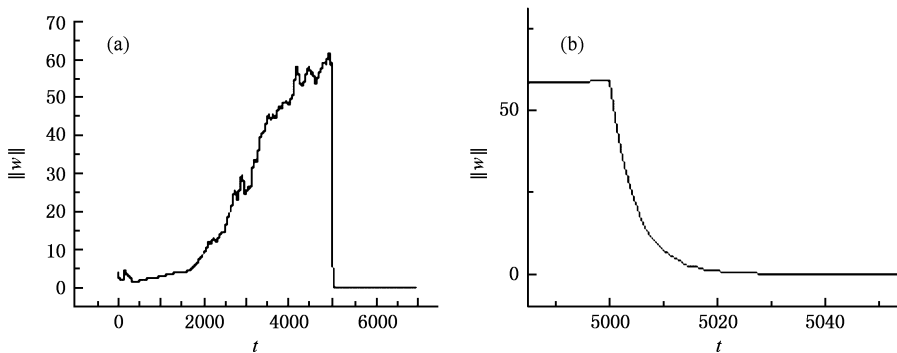


图2 耦合系数  $c = 0.10$  时  $\|w\|$  随时间的变化及其局域放大

定义轨道偏差<sup>[16,17]</sup>,即两个系统之间的距离为

$$\|w_k\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{150} e_{i,j}^2(k=u,v)} \text{ 其中 } e_{i,j} = u[i,j] - v[i,j] \text{ 或 } e_{i,j} = v[i,j] - u[i,j] (i,j = 1, 2, \dots, 150),$$

是两系统相应变量在不同格点上的

差值.

用两个相互耦合的可激发系统对应变量的轨道偏差  $\|w_k\| (k = u, v)$  及其平均  $\|w\| = \frac{1}{2}(\|w_u\| + \|w_v\|)$  随时间的演化来反映系统(2)

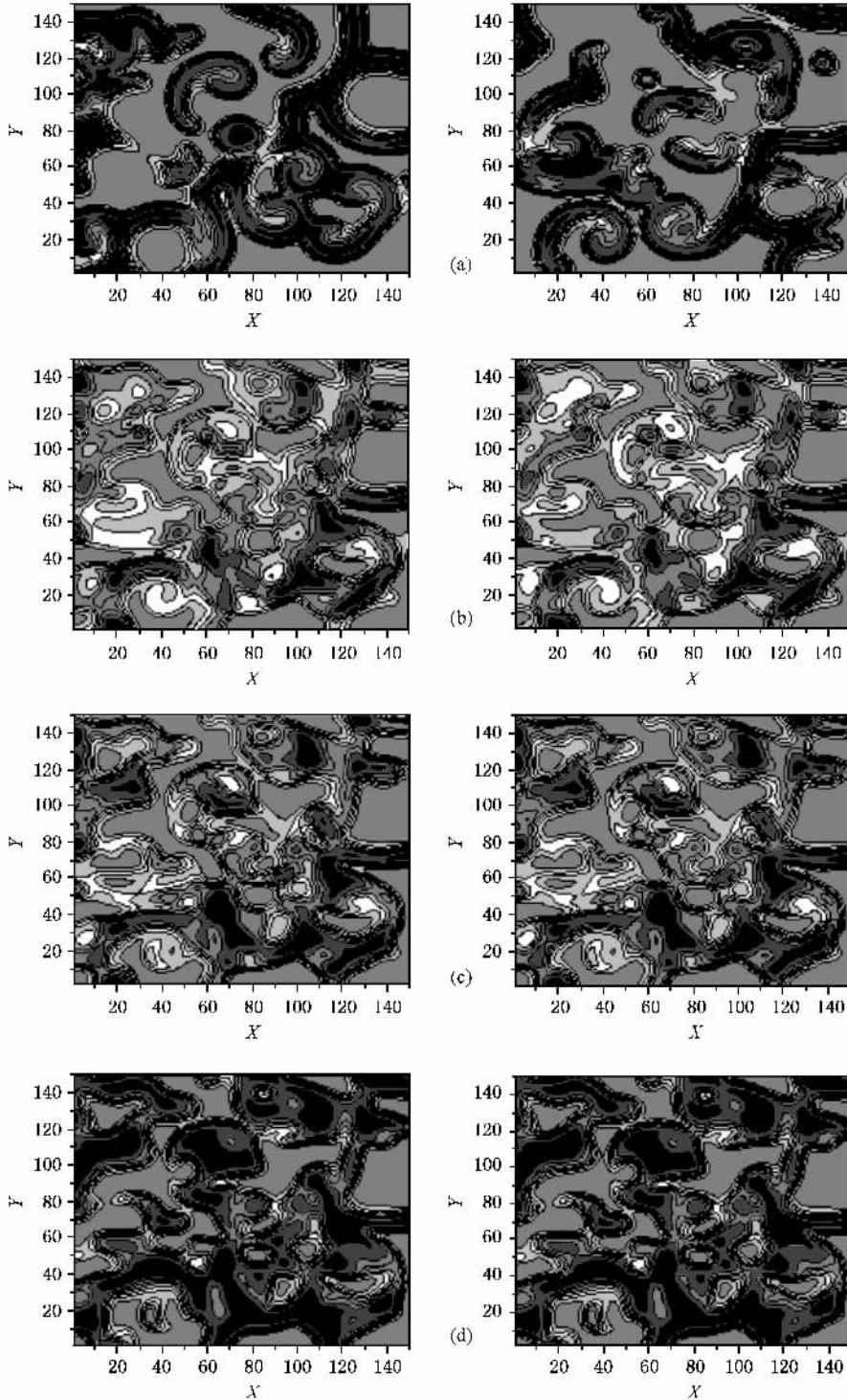


图3 耦合系数  $c=0.10$  时系统  $\chi$  (左边) 与系统  $\chi$  (右边) 的时空演化斑图 (a)~(d) 分别为 5000, 5010, 5030 和 5060 个时步时的时空斑图)

和系统(3)是否达到了同步.如果  $\|w_k\|$  ( $k = u, v$ ) 和  $\|w\|$  随着时间的演化都趋于零,则表明两个系统达到了同步,否则就没有达到同步.

用上述初始条件,取耦合系数  $c = 0.10$ ,让这两个系统各自独立的随时间演化,当他们分别演化到 5000 时步时,同时给这两个系统加上相互耦合,观察轨道偏差随时间的演化.图 1 显示了系统(2)与系统(3)对应变量轨道偏差  $\|w_k\|$  ( $k = u, v$ ) 随时间变化的关系,图 2 为  $\|w\|$  随时间的变化及其局域放大,图 3 为这两个系统的时空演化斑图.

从图 1 和图 2 可以明显看出,当在系统(2)和系统(3)上加上相互耦合后, $\|w_k\|$  ( $k = u, v$ ) 和  $\|w\|$  随着时间的演化都很快趋于零.也就是说,当取耦合系数  $c = 0.10$  时,两个处于湍流态的可激发系统(2)和(3)达到了精确同步.由此可知,当在处于不同湍流状态的两个可激发系统上加上适当的相互耦合后,两个系统能够达到同步.

## 4. 耦合系数 $c$ 的确定

有一点是很明显的,那就是并非所有的耦合系数  $c$  值都能够使系统(2)和(3)达到稳定的同步.也就是说,在用相互耦合法使可激发系统达到稳定同步时,耦合系数只能在一定的范围内取值.确定这个耦合系数的范围可以通过计算最大横向 Lyapunov 指数来确定.在一定的耦合强度下,当两个系统的最大横向 Lyapunov 指数小于零时,这两个系统就达到了同步,否则就没有达到同步<sup>[16]</sup>.因此,最大横向 Lyapunov 指数可作为两个混沌系统是否达到稳定同步的判据.系统(2)和(3)的最大横向 Lyapunov 指数为  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|w_u\|_t / \|w_u\|_0)$ <sup>[17,18]</sup>,其中  $\|w_u\|_0$  为系统(2)和(3)的  $u$  变量在  $t = 0$  时刻的距离, $\|w_u\|_t$  为其在  $t$  时刻的距离.

图 4 显示了最大横向 Lyapunov 指数和耦合系数  $c$  的关系.从图中可以看出,当耦合系数  $c \geq 0.002$  时,对应的最大横向 Lyapunov 指数都小于零.也就是说,只要耦合系数满足上述条件,经过一段时间的演化,系统(2)和(3)会最终达到同步.这表明,只有耦合系数在一定的范围内才能使这两个可激发系统达到同步.

## 5. 湍流的耦合控制

在这里,基于相互耦合法,利用两个相互耦合的

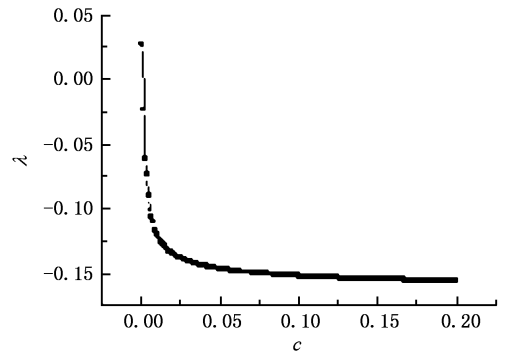


图 4 最大横向 Lyapunov 指数与耦合系数  $c$  的关系

可激发系统来实现对湍流态的稳定控制,即抑制湍流态,将其控制成预想的靶波态或是静息态.

### 5.1. 湍流态系统与静息态系统的耦合控制

首先考虑处于湍流态的可激发系统与处于静息态的可激发系统的耦合控制.在数值模拟中,选取两个系统的参数均为  $a = 0.84$ ,  $b = 0.07$ ,  $\epsilon = 0.085$ ,并将系统(2)的初始状态选取为湍流态,系统(3)的初始状态选取为静息态,让其进行相互耦合.耦合系数取为  $c = 0.10$ .图 5 为这两个系统的时空演化斑图.

由于这两个系统之间存在着相互耦合,从图 5 中可以看到,系统(2)先对系统(3)产生影响,使之从静息态逐渐演化到湍流态,并使这两个系统达到同步.随着时间的发展,系统(3)反过来影响系统(2),使得这两个系统都慢慢向静息态演化,逐渐使湍流态得到抑制,最终使两个系统同时达到静息态,从而实现了湍流系统的稳定控制.

在实际应用当中,必须充分考虑湍流控制所需的时间.本方法相对于其他一些湍流控制方法而言,其显著优点在于所需要的控制时间很短,只需要 1000 个时步左右(相对于文献[5]中所需的时间为 50000 个时步左右),就可以将湍流态完全控制成静息态,达到稳定控制的目的.

### 5.2. 湍流态系统与外周期力控制系统的耦合控制

利用形如  $A \cos \omega t$  的外周期力已经实现了对可激发介质的湍流控制.在文献[5]中,通过向变量  $u$  的二维平面中心  $5 \times 5$  局域格点注入形如  $A \cos \omega t$  的外周期力,实现了参数  $\epsilon = 0.085$  时的湍流态的稳定控制,并详细研究了不同参数的外周期力对湍流控制的效果.研究发现,大多数的控制参数对湍流控制

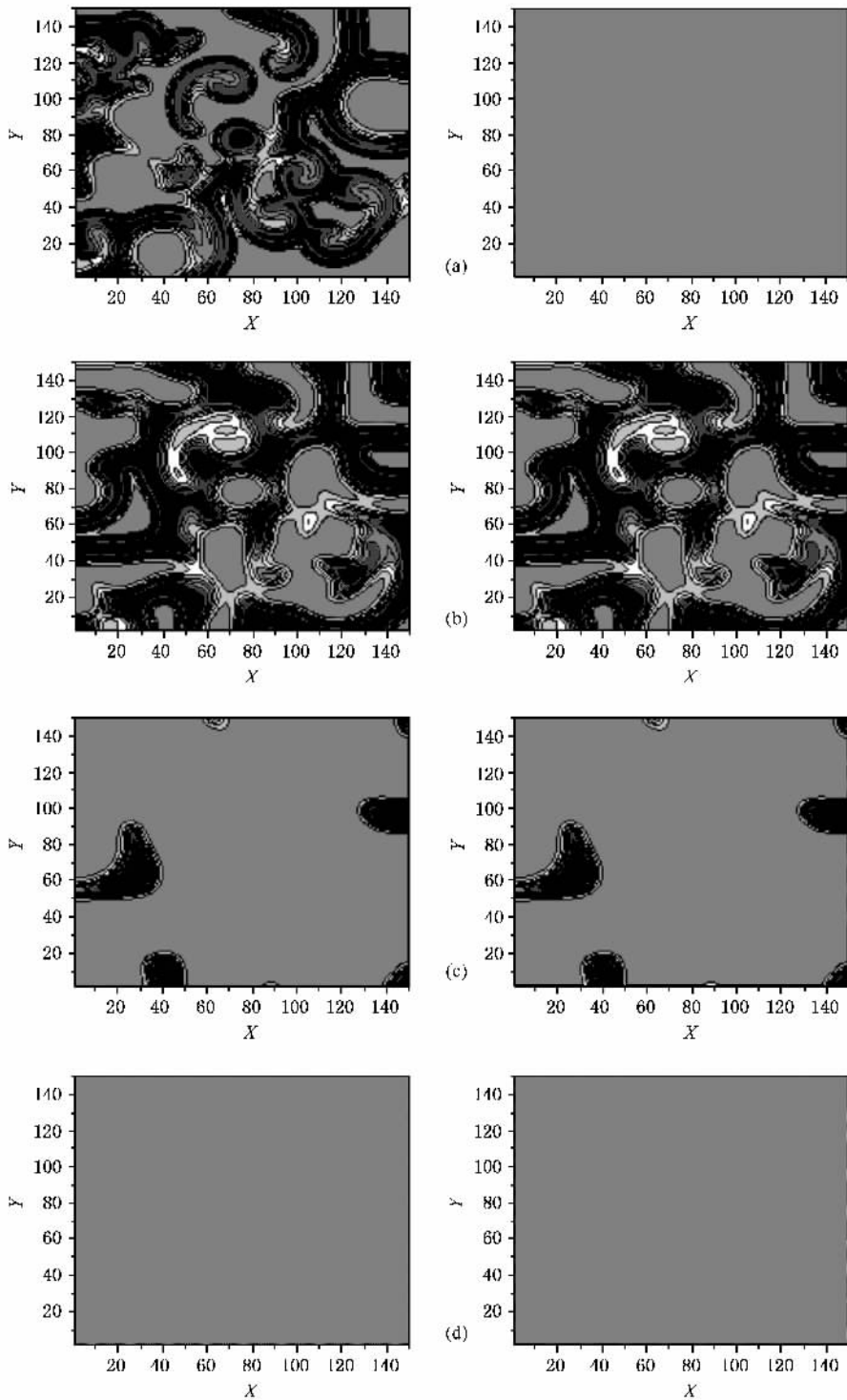


图 5 湍流态与静息态耦合之后系统  $X$  (左边) 与系统  $X$  (右边) 的时空演化斑图 ((a)–(d) 分别为 0, 200, 300 和 1000 个时步时的时空斑图)

几乎没有效果, 时空斑图基本没有变化, 唯有选择一组恰当的控制参数, 如  $A = 2.0$ ,  $w = 1.205$ , 才可以得到令人满意的控制效果, 即时空斑图由湍流态控制成预想的靶波态. 所以, 当参数  $\epsilon$  发生改变时, 仍然

想要得到比较满意的控制效果, 就必须重新寻找一组恰当的外周期力参数, 但比较麻烦.

在这里, 我们试图用文献 5 中已经成功控制湍流系统的一组确定性的外周期力参数, 来控制  $\epsilon$  取

其他值时的系统.在数值模拟中,保持两个系统参数  $a = 0.84, b = 0.07$  不变,改变参数  $\epsilon$ ,设定系统(2)的参数  $\epsilon_2 = 0.085$ ,系统(3)的参数  $\epsilon_3 = 0.070$ .将两个系统的初始状态选取为由不同初始条件引发的湍流态,在系统(2)上加上与文献[5]一样的外周期控制

力,并让其进行相互耦合,耦合系数取为  $c = 0.10$ .为了得到令人满意的控制效果,保持控制参数  $A = 2.0$  不变,对控制参数  $w$  进行微调.通过数值模拟发现,只有当  $w = 1.202$  时(对比文献[5]中  $w = 1.205$ )系统(2)和(3)能够同时达到令人满意的控

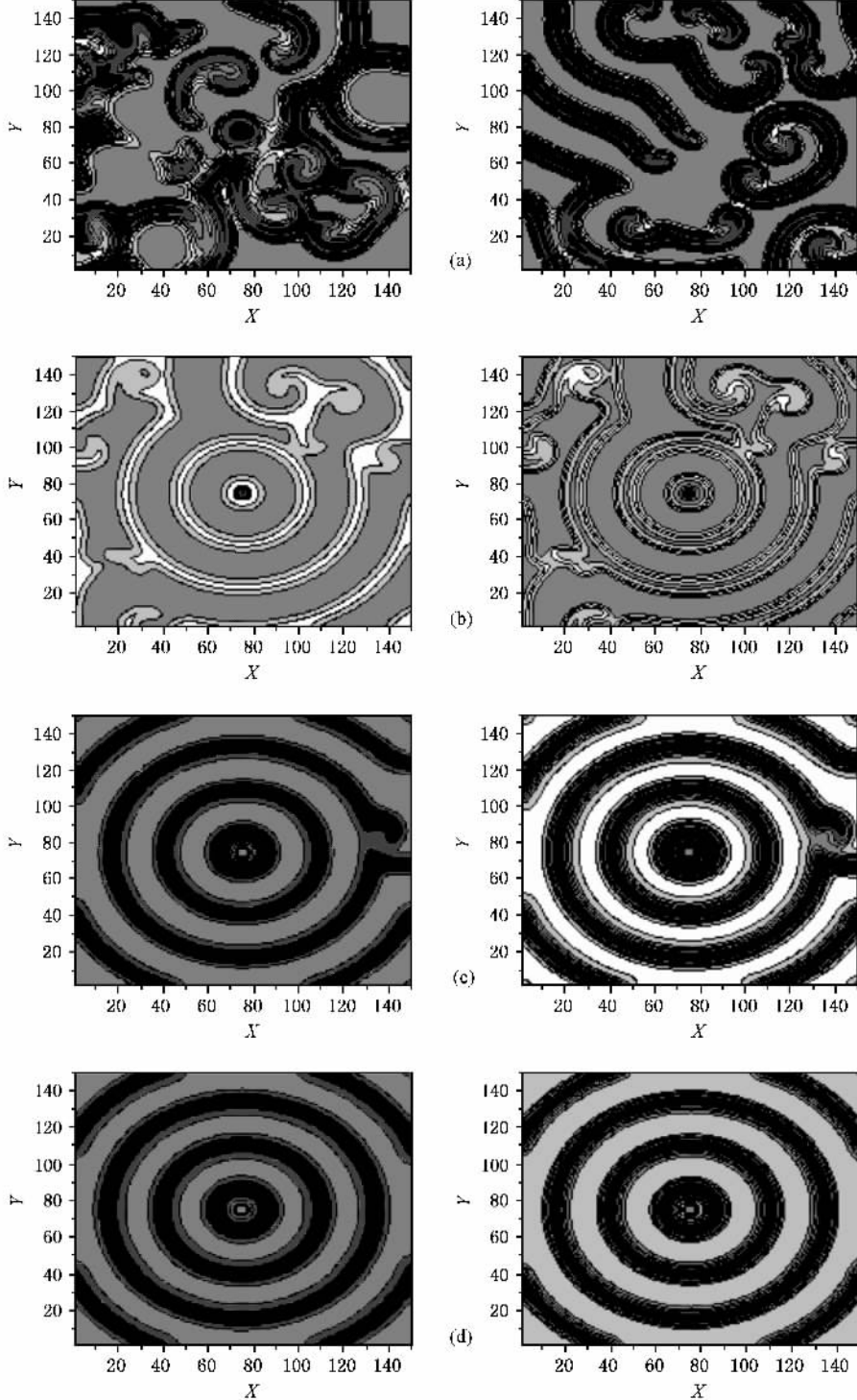


图6 当  $w = 1.202$  时系统  $\chi$  (左边)与系统  $\chi$  (右边)的时空演化斑图 ((a)-(d)分别为 0,5000,15000 和 55000 个时步时的时空斑图)

制效果,即由不同的湍流初始态控制成相同稳定的靶波态.此时,若撤去外周期力,则两个系统共同回复到静息态.图6为这两个系统的时空演化斑图.

在这里,固定参数  $\varepsilon_2 = 0.085$  不变,改变参数  $\varepsilon_3$ .为了获得同样令人满意的控制效果,采用上述方法,寻找能使两个相互耦合的可激发系统都能达到稳定控制所需要的外周期力参数  $w$ .研究发现,当参数  $\varepsilon_3$  在 0.065 到 0.090 之间变化时,只需对外周期力参数  $w$  进行微调,便可以实现对两个相互耦合的可激发系统的稳定控制.图7为能够实现稳定控制时的  $\varepsilon-w$  图.

## 6. 结 论

以可激发系统为例,用相互耦合的方法实现了两个可激发系统的湍流同步.给出了确定耦合系数的方法,并计算了最大横向 Lyapunov 指数,得出了

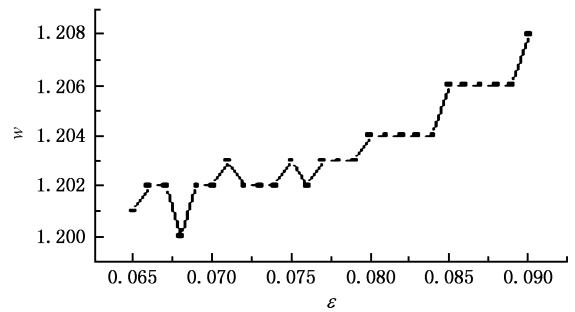


图7 能够实现稳定控制时的  $\varepsilon-w$  关系图

能使两个可激发系统湍流同步所需要的耦合系数的阈值.基于相互耦合法,将湍流态系统与静息态系统进行相互耦合,实现了湍流的稳定控制.将湍流态系统与外周期力控制系统进行相互耦合,在一定的参数区域内 ( $0.065 \leq \varepsilon \leq 0.090$ ),只需微调已知的外周期力参数  $w$ ,便可实现对上述参数区域内所有湍流态的稳定控制.

[1] Hu G, Xiao J H, Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) [胡岗、箫井华、郑志刚 2000 混沌控制(上海:上海科技教育出版社)]

[2] Wang G R, Yu X L, Chen S G 2001 *Chaos Control, Synchronization and Application* (Beijing: National Defense Industry Publishing Press) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)]

[3] Ouyang Q 2000 *Pattern Formation in Reaction-Diffusion Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) [欧阳颀 2001 扩散系统中的斑图动力学(上海:上海科技教育出版社)]

[4] Murray J D 1993 *Mathematical Biology* (Berlin: Springer-Verlag)

[5] Zhang H, Hu B, Hu G 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026134

[6] Sakaguchi H, Fujimoto T 2003 *Phys. Rev. E* **67** 067202

[7] Ma J, Pu Z S, Feng W J, Li W X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4602 (in Chinese) [马军、蒲忠胜、冯旺军、李维学 2005 物理学报 **54** 4602]

[8] Wang P Y, Xie P 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5120

[9] Pamananda P, Hudson J L 2001 *Phys. Rev. E* **64** 037201

[10] Zhang H, Cao Z J, Wu N J, Ying H P, Hu G 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 188301

[11] Hildebrand M, Cui J X, Mihaliuk E, Wang J C, Showalter K 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026205

[12] Yuan G Y, Yang S P, Wang G R, Chen S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1510 (in Chinese) [袁国勇、杨世平、王光瑞、陈式刚 2005 物理学报 **54** 1510]

[13] Yang J Z, Xie F G, Qu Z L, Garfinkel A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 148302

[14] Bär M, Eiswirth M 1993 *Phys. Rev. E* **48** 1635

[15] Barkley D 1991 *Physica D* (Amsterdam) **49** 61

[16] Chen G R, Lü J H 2003 *Analysis, Control and Synchronization of the Lorenz Systems Dynamics* (Beijing: Science Press) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)]

[17] Liu Z H, Chen S G, Hu B 1999 *Phys. Rev. E* **59** 2817

[18] Wang T B, Qin T F, Chen G Z 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1851 (in Chinese) [王铁邦、覃团发、陈光旨 2001 物理学报 **50** 1851]

# Turbulence synchronization and suppression by coupling in excitable media \*

Qian Yu Song Xuan-Yu Shi Wei Chen Guang-Zhi Xue Yu

( *Institute of Physics Science and Engineering , Guangxi University , Nanning 530004 , China* )

( Received 30 December 2005 ; revised manuscript received 6 February 2006 )

## Abstract

The turbulence synchronization is achieved in the excitable media via the mutual coupling method , the coupling coefficient is given and the largest transverse Lyapunov exponent is calculated. Turbulence is suppressed in two ways by coupling with two systems in different states .

**Keywords** : excitable media , turbulence suppression , turbulence synchronization , coupling coefficient

**PACC** : 0414

---

\* Project supported by National Natural Science Foundation of China( Grant Nos. 10362001 & 10147201 ).