第 55 卷 第 9 期 2006 年 9 月
1000-3290/2006/55(09)/4428-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55,No.9,September,2006


# Kerr 解的新形式及其隧穿辐射*

蒋青权[1)2)] 吴双清[1)†]

1)(华中师范大学物理科学与技术学院,武汉 430079)

2)(西华师范大学理论物理研究所,南充 637002)

(2005 年 12 月 12 日收到;2006 年 1 月 12 日收到修改稿)

Parikh 最近将黑洞辐射视为半经典的隧穿过程,在考虑了自引力相互作用后,得出静态球对称 Schwarzschild 和 Reissner-Nordström 黑洞的辐射谱不是纯热谱.采用 Doran 给出的 Kerr 黑洞解的新形式,将 Parikh 的工作推广到 Kerr 黑洞,研究转动黑洞的隧穿辐射,得到了修正的辐射谱,它与黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵变有关,不是纯热谱,但满足量子力学中的幺正性原理.

**关键词**:Kerr 黑洞,隧穿辐射,自引力修正,Bekenstein-Hawking 熵

**PACC**:0420,9760L

## 1. 引 言

1974 年,Hawking 从理论上证明了黑洞视界会发出热辐射,黑洞的温度是真实的量子温度[1].随着黑洞蒸发的进行,黑洞将会不断地损失能量而收缩,直到完全辐射掉所有的物质.这就会导致所谓的"信息丢失佯谬",意味着量子纯态演化为热混合态,违背了量子力学中的幺正性原理[2].黑洞热辐射的产生机理既可以用量子力学的隧道效应来加以阐释,也可以用量子场论中的真空张落作出等价的解释.即产生于黑洞视界内部的一对虚粒子中的正能粒子通过隧道效应穿出视界并实化为真实粒子逃到无穷远处,而负能粒子则被黑洞吸收.或者等价地表述为,产生于黑洞视界外部附近的粒子对中的负能粒子通过隧穿进入视界内部,而留下的正能粒子从视界外逃到无穷远处,形成 Hawking 辐射.这两种表述都有一个隧穿图像,应该找到形式上的势垒才能真实地描述隧穿过程,从而得到真实的热谱.因此,要得到准确的黑洞辐射谱,必须解决以下两个难点:1)势垒的形成机理;2)消除黑洞视界处的坐标奇异性.

事实上,由于黑洞辐射损失能量,背景时空会发生改变.但现有的一些推导 Hawking 辐射方法[3—10]中的大多数都基于背景固定的量子场论,没有考虑到时空几何的涨落.最近,Parikh 和 Wilczek[11—13]采用半经典的隧穿辐射图像研究了静态球对称 Schwarzschild 和 Reissner-Nordström 黑洞的 Hawking 辐射,在考虑到能量守恒和时空背景几何不固定的情况下(当黑洞辐射掉一定能量的粒子后,辐射前后视界位置为势垒的两个转折点),得到了黑洞辐射的隧穿概率,给出了对 Hawking 辐射谱的修正,证明黑洞的辐射谱不是纯热谱.在他们的工作中,一个关键的技巧是为了消除黑洞视界处的坐标奇异性而采用了 Painlevé 坐标变换.这一方法随后被推广到各种球对称黑洞情形[13—17],其正确性得到了进一步验证.但是,对于稳态轴对称黑洞的隧穿辐射,研究则相对较少[18—22].

本文采用 Doran[23]给出的 Kerr 解的新形式研究转动黑洞的隧穿辐射.此形式下的坐标时间为自由下落观测者的固有时,同时在视界处不存在坐标奇异性,为研究隧穿辐射提供了便利条件.结果表明,在考虑了能量守恒、角动量守恒和粒子间自引力作用的情况下,转动黑洞的 Hawking 辐射谱不再是纯热谱,其隧穿辐射概率与 Bekenstein-Hawking 熵变有关.

* 国家自然科学基金(批准号:10347008)资助的课题.

† 通讯作者,E-mail:sqwu@phy.ccnu.edu.cn

## 2. Kerr 度规的新形式与拖曳系

Parikh[11—13] 采用的 Schwarzschild 黑洞线元可以用 Painlevé 坐标系表示为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - [\mathrm{d}r + (2M/r)^{1/2}\mathrm{d}t]^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \quad (1)$$

为了把 Parikh 等人的工作[11—13] 推广到稳态轴对称黑洞情形,必须采用广义 Painlevé 坐标变换消除黑洞视界处的奇异性. Doran 从 Kerr 度规的超前 Eddington-Finkelstein 坐标系形式出发进行坐标变换得到了 Kerr 黑洞解的一个新形式[23]

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \left[\frac{\rho}{(r^2+a^2)^{1/2}}\mathrm{d}r + \frac{(2Mr)^{1/2}}{\rho} \times (\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi)\right]^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2 - (r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2, \quad (2)$$

式中,$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$.

Doran 给出的 Kerr 解的这一新形式是 Schwarzschild-Painlevé 线元在转动情形的忠实推广,它继承了 Painlevé 线元的许多优良特性:1) 存在两个 Killing 矢量场 $\partial_t$ 和 $\partial_\phi$;2) 坐标时间 $t$ 表示自由下落观测者的固有时;3) $t=\mathrm{const}$ 超曲面上的测度与 Minkowski 时空相同;4) 在事件视界处不存在坐标奇异性;5) 满足 Landau 坐标钟同时条件. 这些特性为研究转动黑洞的隧穿辐射提供了便利.

但是由于转动自由度的出现,Kerr 解的这一形式对于我们的应用来说仍有一些不便之处:1) 由于 Kerr 黑洞的无限红移面 $r_\pm^{\mathrm{TLS}} = M \pm\sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}$(由 $g_{tt}=0$ 给出)与事件视界 $r_\pm = M\pm\sqrt{M^2-a^2}$(由零曲面方程 $g^{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu f = 0$定义)不重合,几何光学近似不能应用;2) 由于转动的出现,时空存在着坐标系的拖曳效应,黑洞视界附近能层中的物质场也必然被拖曳着进行运动. 因此,一个合理的有物理意义的描述应该是在拖曳系中给出的.

由(2)式可知,Kerr 黑洞事件视界面积为 $A_+ = 4\pi(r_+^2 + a^2)$,拖曳角速度为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{2Mra}{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta} = \Omega, \quad (3)$$

式中,$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$. 在作了拖曳坐标变换 $d\phi = \Omega\mathrm{d}t$ 后,Kerr 度规成为

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = \frac{\rho^2\Delta}{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}t^2 - 2\frac{\sqrt{2Mr(r^2+a^2)}\rho^2}{(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}t - \frac{\rho^2}{r^2+a^2}\mathrm{d}r^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2. \quad (4)$$

由(4)式可知,在拖曳坐标系中事件视界与无限红移面重合($r_\pm^{\mathrm{TLS}} = r_\pm = M\pm\sqrt{M^2-a^2}$).

## 3. 事件视界处粒子的隧穿概率

由线元(4)式可知,Kerr 解的新形式在作了拖曳坐标变换后仍然保留了它的良好性质:1) 它不存在坐标奇异性;2) 坐标时间 $t$ 表示自由下落观测者的固有时;3) 满足 Landau 坐标钟同时条件,在整个时空中可建立同时概念;4) 此外,特别地,由于事件视界与无限红移面重合,几何光学极限成立,WKB 近似可以应用. 这些都是研究转动黑洞隧穿效应不可缺少的条件.

由于无质量粒子在视界附近沿径向运动,它应满足径向类光($\mathrm{d}\hat{s}^2 = 0 = \mathrm{d}\theta$)测地线方程

$$\frac{\rho^2\Delta}{(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta} - 2\frac{\sqrt{2Mr(r^2+a^2)}\rho^2}{(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}\dot{r} - \frac{\rho^2}{r^2+a^2}\dot{r}^2 = 0. \quad (5)$$

由(5)式得到

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\pm\sqrt{(r^2+a^2)^4 - \Delta^2(r^2+a^2)a^2\sin^2\theta} - \sqrt{(r^2+a^2)^4 - \Delta(r^2+a^2)^3}}{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}, \quad (6)$$

式中,± 号分别代表事件视界处出射和入射测地线.

由于隧穿过程发生在黑洞视界附近,从视界穿出的粒子可以视为一个椭球壳. 考虑黑洞视界处无质量粒子的隧穿过程,若在黑洞视界内产生了一虚粒子对,其正能粒子通过隧道效应穿出视界并实化为物质粒子逃到无穷远处,而负能粒子则被黑洞吸收. 当粒子隧穿出去时,将会引起黑洞质量减少,视界面发生收缩,收缩前后的视界分别为 $r_{\mathrm{in}}$ 和 $r_{\mathrm{out}}$,此两点即为隧穿势垒的两个转折点,其间的距离由粒子的能量决定. 考虑到粒子间的自引力作用,在满足

能量守恒和角动量守恒(比角动量 $a = J/M$ 保持不变)的条件下,我们保持时空的总能量固定而允许黑洞质量发生涨落.当黑洞辐射掉能量为 $\omega$ 的粒子后,其时空线元变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{s}^2 &= \frac{\rho^2\tilde{\Delta}}{(r^2+a^2)^2-\tilde{\Delta}a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}t^2\\&\quad-2\frac{\sqrt{2(M-\omega)r(r^2+a^2)}\rho^2}{(r^2+a^2)^2-\tilde{\Delta}a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\&\quad-\frac{\rho^2}{r^2+a^2}\mathrm{d}r^2-\rho^2\mathrm{d}\theta,\end{aligned}\tag{7}$$

式中 $\tilde{\Delta} = r^2+a^2-2(M-\omega)r$.

当能量为 $\omega$ 的粒子通过隧穿效应出射后,黑洞的质量和角动量分别为 $(M-\omega)$ 和 $(M-\omega)a$,其事件视界为

$$r_{\text{out}} = M-\omega+\sqrt{(M-\omega)^2-a^2},$$

视界处的拖曳角速度为

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{out}} &= \frac{a}{r_{\text{out}}^2+a^2}\\&=\frac{a}{2(M-\omega)^2+2(M-\omega)\sqrt{(M-\omega)^2-a^2}},\end{aligned}\tag{8}$$

出射粒子的径向类光测地线方程为

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{(r^2+a^2)^4-\tilde{\Delta}^2(r^2+a^2)a^2\sin^2\theta}-\sqrt{(r^2+a^2)^4-\tilde{\Delta}(r^2+a^2)^3}}{(r^2+a^2)^2-\tilde{\Delta}a^2\sin^2\theta}.\tag{9}$$

由于拖曳坐标系中的无限红移面与事件视界重合,几何光学极限成立.由 WKB 近似可以得到隧穿概率与粒子穿越势垒的作用量满足关系[24]

$$\Gamma \sim \mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}S}.\tag{10}$$

由线元(7)式可知坐标 $\phi$ 不出现在拖曳坐标系中,因而,在 Lagrangian 函数中,$\phi$ 为可遗坐标.为了完全消去这个自由度,粒子穿越势垒的作用量的虚部应该写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}S &= \mathrm{Im}\int_{t_i}^{t_f}(L-P_\phi\dot{\phi})\mathrm{d}t\\&=\mathrm{Im}\Big[\int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}}P_r\mathrm{d}r-\int_{\phi_{\text{in}}}^{\phi_{\text{out}}}P_\phi\mathrm{d}\phi\Big]\\&=\mathrm{Im}\Big[\int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}}\int_0^{P_r}\mathrm{d}P_r'\mathrm{d}r-\int_{\phi_{\text{in}}}^{\phi_{\text{out}}}\int_0^{P_\phi}\mathrm{d}P_\phi'\mathrm{d}\phi\Big],\end{aligned}\tag{11}$$

式中的 $r_{\text{in}}$ 和 $r_{\text{out}}$ 为黑洞收缩前后的视界,此即为隧穿势垒的两个转折点.由 Hamilton 正则运动方程,可得

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_r}\Big|_{(r;\phi,P_\phi)},\ \mathrm{d}H_{(r;\phi,P_\phi)} = \mathrm{d}(M-\omega),\\\dot{\phi} &= \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_\phi}\Big|_{(\phi;r,P_r)},\ \mathrm{d}H_{(\phi;r,P_r)} = \Omega\mathrm{d}J = a\Omega\mathrm{d}(M-\omega),\end{aligned}\tag{12}$$

式中用到 $H = M-\omega$,$P_\phi = J = (M-\omega)a$.把上式代入(11)式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}S &= \mathrm{Im}\int_M^{M-\omega}\int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}}(\mathrm{d}H'-\Omega'\mathrm{d}J)\frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}} = \mathrm{Im}\int_M^{M-\omega}\int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}}\frac{1-a\Omega'}{\dot{r}}\mathrm{d}(M-\omega')\mathrm{d}r\\&=\mathrm{Im}\int_M^{M-\omega}\int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}}\frac{\sqrt{(r^2+a^2)^4-\Delta'^2(r^2+a^2)a^2\sin^2\theta}+\sqrt{(r^2+a^2)^4-\Delta'(r^2+a^2)^3}}{\Delta'(r^2+a^2)}\\&\quad\times\Big[1-\frac{2(M-\omega')ra^2}{(r^2+a^2)^2-\Delta'a^2\sin^2\theta}\Big]\mathrm{d}(M-\omega')\mathrm{d}r,\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta' &= r^2+a^2-2(M-\omega')r\\&=(r-r_+')(r-r_-'),\\r_+' &= M-\omega'+\sqrt{(M-\omega')^2-a^2},\\r_-' &= M-\omega'-\sqrt{(M-\omega')^2-a^2},\\r_{\text{in}} &= M-\omega+\sqrt{M^2-a^2},\\r_{\text{out}} &= M-\omega+\sqrt{(M-\omega)^2-a^2}.\end{aligned}$$

注意在对(13)式进行复变积分时，被积函数在 $r = r'_+$ 处有一个单极点，交换积分次序并首先对 $r$ 积分得到

$$\mathrm{Im}S = -2\pi\int_{M}^{M-\omega}\frac{(M-\omega')^2+(M-\omega')\sqrt{(M-\omega')^2-a^2}-a^2/2}{\sqrt{(M-\omega')^2-a^2}}\mathrm{d}(M-\omega'), \tag{14}$$

再完成对 $(M-\omega')$ 积分可得

$$\mathrm{Im}S = \pi[M^2-(M-\omega)^2+M\sqrt{M^2-a^2} - (M-\omega)\sqrt{(M-\omega)^2-a^2}]. \tag{15}$$

因而，粒子穿越势垒的隧穿概率为

$$\Gamma \sim \mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}S} = \mathrm{e}^{-2\pi[M^2-(M-\omega)^2+M\sqrt{M^2-a^2}-(M-\omega)\sqrt{(M-\omega^2)-a^2}]}, \tag{16}$$

这与文献[19]所得的结果完全一致.

下面我们来讨论隧穿概率与 Bekenstein-Hawking 熵的关系. 当能量为 $\omega$ 的粒子出射后，黑洞的视界面积为

$$A_{\mathrm{out}} = 4\pi(r_{\mathrm{out}}^2+a^2) = 8\pi[(M-\omega)^2+(M-\omega)\sqrt{(M-\omega)^2-a^2}]. \tag{17}$$

根据黑洞熵与视界面积的普适关系式 $S_{\mathrm{BH}} = A/4$，隧穿概率与 Bekenstein-Hawking 熵的关系可写为

$$\Gamma \sim \mathrm{e}^{-2\pi[M^2-(M-\omega)^2+M\sqrt{M^2-a^2}-(M-\omega)\sqrt{(M-\omega)^2-a^2}]} = \mathrm{e}^{\Delta S_{\mathrm{BH}}}. \tag{18}$$

因而，隧穿概率与黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵变有关，所得的辐射谱不再是纯热谱，这与 Parikh 等人的结论完全一致.

## 4. 结　　论

本文利用 Doran 给出的 Schwarzschild-Painlevé 线元推广到转动情形下 Kerr 解的新形式，采用 Parikh 的半经典隧穿图像，在考虑了能量守恒和角动量守恒的条件下，在拖曳坐标系中讨论了转动黑洞的隧穿辐射，给出了隧穿概率和修正的辐射谱. 我们的结果表明，真实的黑洞辐射谱不再是纯热谱，它与 Bekenstein-Hawking 熵变有关，且满足量子力学中的幺正性原理.

本文对转动黑洞中不带电粒子的隧穿辐射的讨论是以 Kerr 黑洞为典型性的代表例子进行的. 对于 Kerr-Newman 黑洞和 Kerr-Newman-Kasuya 双荷黑洞，只需要在本文的讨论中作简单的代换 $2Mr \to 2Mr - Q^2$ 和 $2Mr \to 2Mr - Q^2 - P^2$ 即可，所得结论与本文完全相同，结果与文献[20，21]所得的一致. 对于其他类型的转动黑洞，可以进行类似的讨论[22].


[1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
[2] Hawking S W 2005 *Phys. Rev.* D **72** 084013
[3] Hartle J B，Hawking S W 1976 *Phys. Rev.* D **13** 2188
[4] Damour T，Ruffini R 1976 *Phys. Rev.* D **14** 332
[5] Liu L，Xu D Y 1980 *Acta Phys. Sin.* **29** 1617 (in Chinese) [刘辽、许殿彦 1980 物理学报 **29** 1617]
[6] Zhao Z，Gui Y X，Liu L 1981 *Acta Astrohysica Sinica* **1** 141 (in Chinese) [赵　峥、桂元星、刘　辽 1981 天体物理学报 **1** 141]
[7] Xu C M，Shen Y G 1982 *Acta Phys. Sin.* **31** 207 (in Chinese) [须重明、沈有根 1982 物理学报 **31** 207]
[8] Xu D Y 1983 *Acta Phys. Sin.* **32** 225 (in Chinese) [许殿彦 1983 物理学报 **32** 225]
[9] Punsly B 1992 *Phys. Rev.* D **46** 1312
[10] Wu S Q，Cai X 2000 *IL Nuovo Cimento* B **115** 143
[11] Parikh M K，Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042
[12] Parikh M K 2004 *Int. J. Mod. Phys.* D **13** 2351
[13] Parikh M K 2004 hep-th/0402166
[14] Hemming S，Keski-Vakkuri E 2000 *Phys. Rev.* D **64** 044006
[15] Medved A J M 2002 *Phys. Rev.* D **66** 124009
[16] Jiang Q Q，Wu S Q 2006 *Phys. Lett.* B **635** 151
[17] Han Y W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5018 (in Chinese) [韩亦文 2005 物理学报 **54** 5018]
[18] Jiang Q Q，Wu S Q，Cai X 2005 *Phys. Rev.* D **73** 064003
[19] Zhang J Y，Zhao Z 2005 *Mod. Phys. Lett.* A **22** 1673
[20] Zhang J Y，Zhao Z 2005 *Phys. Lett.* B **618** 14
[21] Yang S Z 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2492
[22] Yang S Z，Jiang Q Q，Li H L 2005 *Chin. Phys.* **14** 2411
[23] Doran C 2000 *Phys. Rev.* D **61** 067503
[24] Kraus P，Keski-Vakkuri E 1997 *Nucl. Phys.* B **491** 249

# New form of the Kerr solution and its tunneling radiation*

Jiang Qing-Quan[1)2)] Wu Shuang-Qing[1)†]

1) (*College of Physical Science and Technology*, *Central China Normal University*, *Wuhan* 430079, *China*)

2) (*Institute of Theoretical Physics*, *China West Normal University*, *Nanchong* 637002, *China*)

(Received 12 December 2005; revised manuscript received 12 January 2006)

Abstract

Parikh recently viewed the black hole radiation as a semi-classical tunneling process, and showed that the radiation spectrum for the static Schwarzschild and Reissner-Nordström black holes is not pure thermal after considering the self-gravity interaction. In this paper, we adopt the new form of the Kerr solution presented by Doran and extend Parikh's work to investigate the tunneling radiation of a rotating black hole. We obtain a corrected radiation spectrum, which is related to the change of Bekenstein-Hawking entropy. It is not pure thermal, but is consistent with the underlying unitary theory.

**Keywords**: Kerr black hole, tunneling radiation, self-gravitation correction, Bekenstein-Hawking entropy

**PACC**: 0420, 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10347008).

† Corresponding author. E-mail: sqwu@phy.ccnu.edu.cn