

# logistic 模型的倍周期分岔控制<sup>\*</sup>

唐驾时 欧阳克俭

(湖南大学力学与航空航天学院,长沙 410082)  
(2005 年 10 月 11 日收到 2006 年 1 月 17 日收到修改稿)

研究了 logistic 模型的倍周期分岔的控制问题,设计了各种线性控制器,得到了系统在控制前和控制后的分岔图,改变了动力系统的分岔特性.根据实际的应用目的可以设计不同的控制器,使倍周期分岔延迟或提前出现,甚至消失.适当选择控制器增益可以使分岔控制的效果更好.

关键词: logistic 模型,倍周期分岔,分岔控制,控制器

PACC: 0525, 4265

## 1. 引言

随着非线性科学的发展,分岔控制与混沌控制越来越得到学者们的重视.分岔控制指的是设计一个控制器去改变非线性动力系统的各种分岔特性<sup>[1]</sup>.典型的分岔控制包括延迟分岔的出现<sup>[2]</sup>,设计合适的参数使之产生新的分岔<sup>[3]</sup>,改变分岔点的参数值<sup>[1]</sup>,修改分岔链的形状和类型<sup>[4]</sup>,稳定分岔解<sup>[5]</sup>,控制极限环的多重性、幅值<sup>[6]</sup>和频率<sup>[7]</sup>,优化系统在分岔点附近的动力学行为<sup>[8]</sup>,缩小不稳定解的区域<sup>[9]</sup>,通过控制分岔来控制混沌<sup>[10]</sup>,等等.在工程问题中,分岔控制的目的是避免系统因分岔现象产生有害的动力学行为,使系统得到监控<sup>[11]</sup>.

众多的科学工作者对混沌的控制和同步做了许多研究工作,提出了许多控制算法和混沌同步的方法<sup>[12-14]</sup>,许多学者对参数激励下或强迫激励下的非线性动力系统的分岔特性作了许多研究<sup>[15-19]</sup>.相对混沌控制<sup>[20-23]</sup>和各种激励下动力系统的分岔特性研究,分岔控制方面的研究相对较少一些.罗晓曙,陈关荣等用参数调节和状态反馈的控制方法实现了倍周期分岔的控制<sup>[24]</sup>;吕翎等用动力学状态反馈方法实现了对声光双稳系统的分岔控制<sup>[25]</sup>等.Chen 等人发表了一个很好的综述报告<sup>[1]</sup>,该文献分析了 logistic 模型的分岔特性,并提出了关于 logistic 模型分岔控制的三个问题:1)倍周期分岔过程的有限混沌行为能否得到抑制?2)能否延迟第一次分岔,或

使接下来发生的分岔的稳定性或形式发生改变?3)系统进入混沌的渐进行为(如果混沌是有益的)是否是由于参数  $p$  不在混沌区域而没有得到控制?本文针对 Chen 等人提出的问题,设计了线性控制器对 logistic 模型进行了分岔控制.

## 2. 控制器的选择

考虑 logistic 模型如下:

$$x_{k+1} = f(x_k, p) := px_k(1 - x_k), \quad (1)$$

其中  $p$  是大于零的实数,  $x \in [0, 1]$ .  $x_k$  是第  $k$  年的虫口数,  $x_{k+1}$  是第  $k+1$  年的虫口数,这个模型刻画了第一年,第二年,……,第  $n$  年虫口的变化规律,是一个典型的离散动力系统,同时也是一个典型的由倍周期分岔进入混沌的例子.虫口模型是非线性方程中出现的一个能成功进行数学研究的动力系统实例,它虽然简单却能体现出所有非线性现象的本质.解方程  $x = f(x, p)$  得两个平衡点

$$x^* = 0, x^* = \frac{p-1}{p},$$

由于不动点线性部分的雅可比行列式  $J = \partial f / \partial x = p - 2px$ ,可知系统的稳定性取决于参数  $p$ .

当  $0 < p < 1$ ,由  $f(x) = px(1-x)$  决定的离散动力系统的动力学形态比较简单,不管取什么初值  $x_0$ ,当  $k \rightarrow \infty$ ,只有  $x^* = 0$  是稳定的;

当  $1 < p < 3$ ,不管取什么初值  $x_0$ ,在  $k \rightarrow \infty$ , $x^* = \frac{p-1}{p}$  是稳定的;

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10472029)资助的课题.

当  $3 < p < 1 + \sqrt{6} (3.449)$ , 在  $k \rightarrow \infty$ ,  $x^{*1,2} = \frac{1+p \pm \sqrt{p^2 - 2p - 3}}{2p}$ , 系统 (1) 存在两个平衡点;

当  $3.449 < p < 3.544$  在  $k \rightarrow \infty$ , 系统 (1) 存在四个平衡点;

当  $3.544 < p < 3.564$  在  $k \rightarrow \infty$ , 系统 (1) 存在八个平衡点.

随着  $p$  值的增加, 出现稳定的  $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n$  周期点, 但周期轨道稳定时对应的  $p$  值的取值范围越来越少, 直到混沌.

研究 (1) 式表示的系统, 控制器可以设计成线性的或非线性的. 非线性控制器有平方非线性, 立方非线性等等. 在分析各种控制器后, 本文分别将控制器设计为线性控制器  $u = k_1 + k_2 x$ . 那么加入控制器后的动力系统变为

$$f(x) = px(1-x) + k_1 + k_2 x, \quad (2)$$

对于原系统 (1) 式, 不动点处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \left. \frac{\partial f(x_k, p)}{\partial x_k} \right|_{x_k = x^*}$$

不动点  $x^*$  稳定的条件为  $J$  的所有特征值  $|w_i| < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 从而可得出不动点  $x^*$  稳定时参数  $p$  的取值范围. 受控系统 (2) 式在不动点的 Jacobi 矩阵为

$$J^* = \left. \frac{\partial f(x_k, p)}{\partial x_k} + k_2 \right|_{x_k = x^*}$$

由于  $J^*$  中引入了控制参数  $k_2$ , 故通过选择恰当的  $p$  值可以使  $J^*$  的所有特征值  $|w_i| < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 从而使不动点  $x^*$  在更大的参数范围内保持稳定, 延迟分岔的出现. 尽管  $k_1$  未出现在 Jacobi 矩阵中, 但是由于受控系统和原系统不具有相同的 1 周期轨道, 通过调节参数  $k_1$  同样可以控制系统的分岔.

当  $k_2 = 0$  时, 通过数值计算可以近似地给出参数  $k_1$  的取值范围: 1)  $-0.115 < k_2 < 0$  时, 系统 (1) 的所有分岔都得到延迟, 但是在区间  $p \in [0, 3.9]$  仍然存在混沌行为; 2)  $-0.123 < k_2 \leq -0.115$  时, 系统 (1) 的分岔得到延迟, 在区间  $p \in [0, 3.9]$  内发生三次周期倍分; 3)  $-0.125 < k_2 \leq -0.123$  时, 系统 (1) 的分岔得到延迟, 在区间  $p \in [0, 3.9]$  内发生两次周期倍分. 当  $k_1 = 0$  时, 通过数值计算也可以近似地给出参数  $k_2$  的取值范围: 1)  $-0.33 < k_2 < 0$  时, 系统 (1) 的分岔得到延迟, 但是在区间  $p \in [0, 3.9]$  仍然存在

混沌行为; 2)  $-0.35 < k_2 \leq 0.33$  时, 系统 (1) 的分岔得到延迟, 在区间  $p \in [0, 3.9]$  内发生三次周期倍分; 3)  $-0.44 < k_2 \leq 0.35$  时, 系统 (1) 的分岔得到延迟, 在区间  $p \in [0, 3.9]$  内发生两次周期倍分; 4)  $-0.9 < k_2 \leq 0.44$  时, 系统 (1) 的分岔得到延迟, 在区间  $p \in [0, 3.9]$  内发生一次周期倍分.

### 3. 数值模拟

当  $k_1 = 0, k_2 = 0$  时, 系统 (2) 退化为原系统 (1). 从图 1—10 可以清楚的看出所设计的控制器都

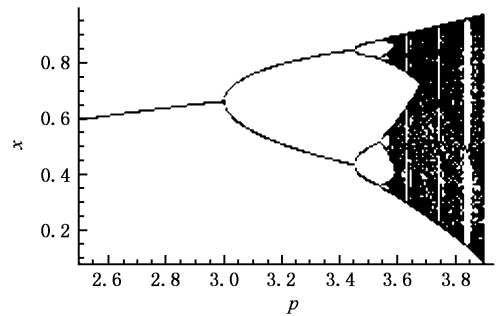


图 1 系统 (1) 的分岔图

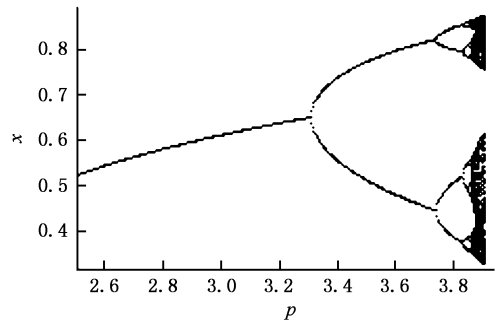


图 2  $k_1 = -0.1, k_2 = 0$

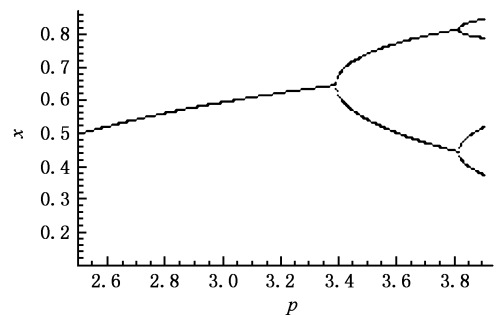


图 3  $k_1 = -0.125, k_2 = 0$

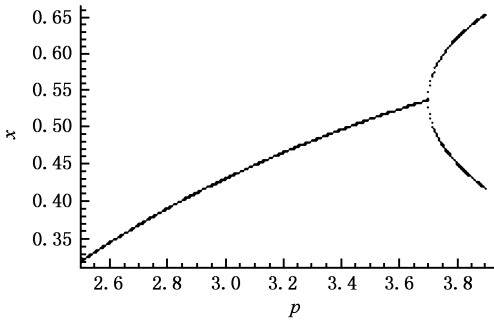


图 4  $k_1 = 0, k_2 = -0.7$

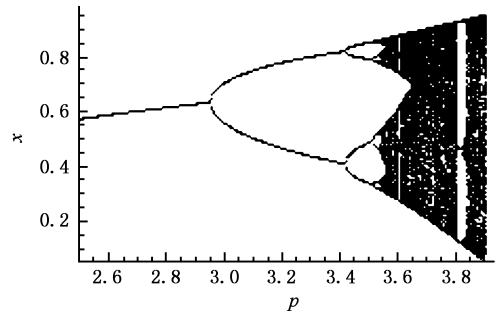


图 8  $k_1 = +0.08, k_2 = -0.2$

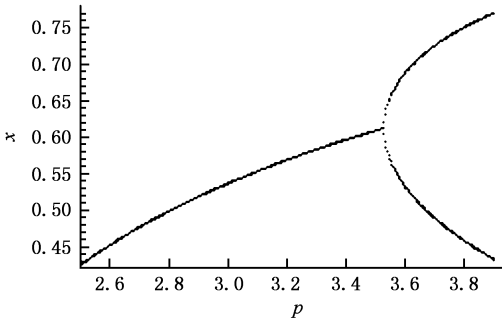


图 5  $k_1 = -0.1, k_2 = -0.2$

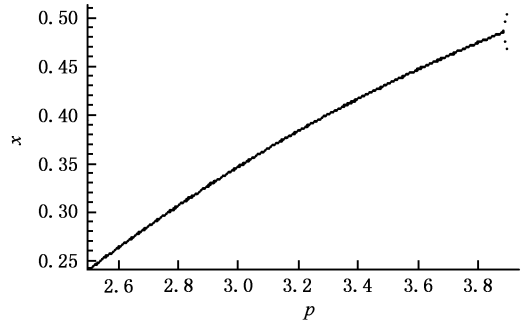


图 9  $k_1 = +0.05, k_2 = -1.1$

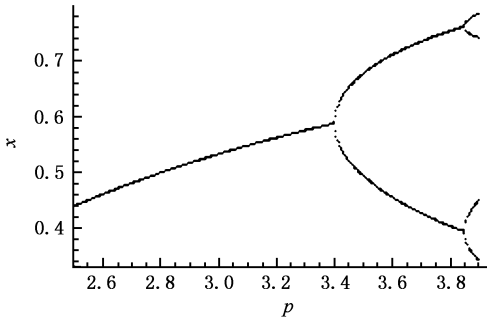


图 6  $k_1 = 0, k_2 = -0.4$

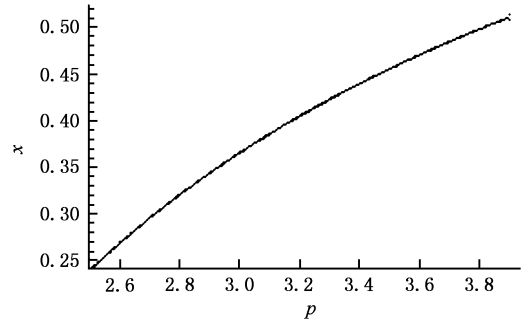


图 10  $k_1 = 0, k_2 = -0.9$

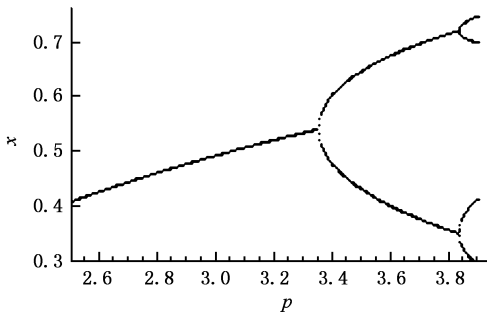


图 7  $k_1 = +0.1, k_2 = -0.72$

改变了系统的分岔特性. 其中当  $k_1 = -0.1, k_2 = 0$  时, 使系统 (2) 的第一次周期倍分延迟, 在  $p \in [0, 3.9]$  区间内, 受控系统的混沌特性依然存在. 当  $k_1 = -0.125, k_2 = 0$  时, 在  $p \in [0, 3.9]$  区间内, 受控系统只发生两次周期倍分且都得到延迟, 同时, 系统的混沌特性消失. 当  $k_1 = 0, k_2 = -0.7$  时, 使系统 (2) 的混沌特性消失. 在  $p \in [0, 3.9]$  区间内只发生一次周期倍分. 当  $k_1 = -0.1, k_2 = -0.2$  时, 在区间  $p \in [0, 3.9]$  上只发生了一次周期倍分, 也使受控系统的混沌特性消失. 当  $k_1 = 0, k_2 = -0.4$  时, 同样使得系

统(3)的混沌特性消失,并在  $p \in [0, 3.9]$  区间出现两次周期倍分.当  $k_1 = +0.1, k_2 = -0.72$  时在区间  $p \in [0, 3.9]$  上发生了两次周期倍分,当  $k_1 = +0.08, k_2 = -0.2$  时在区间  $p \in [0, 3.9]$  上只发生了一次周期倍分.当  $k_1 = 0, k_2 = -0.9$  以及  $k_1 = +0.05, k_2 = -1.1$  时,受控系统的混沌和分岔特性都消失了,只有少数的几个点出现在第二周期轨道上.从图中可知通过选用不同的控制器可以控制系统在区间内只发生一次分岔,两次分岔,三次分岔,混沌,甚至不发生分岔.

经过数值计算发现: $k_1$  只能在一个狭窄区域取值才能使系统的分岔行为存在,在控制器中充当粗调的角色,也就是说通过调整  $k_1$  可以较大幅度地延迟分岔的产生.同时发现  $k_2$  在控制器中充当微调的角色,也就是说只能较大幅度地调整  $k_2$  才能改变系统的分岔特性.

当  $k_1 = -0.1, k_2 = 0$  时,系统(2)在  $p = 3.301$  出现第一次周期倍分,较未受控系统第一次周期倍分延迟了 0.301,在  $p = 3.735$  出现第二次周期倍分,较未受控系统第二次周期倍分延迟了 0.286,在  $p = 3.828$  出现第三次周期倍分,较未受控系统第三次周期倍分延迟了 0.284.

当  $k_1 = -0.125, k_2 = 0$  时,系统(2)在  $p = 3.378$  出现第一次周期倍分,较未受控系统第一次周期倍分延迟了 0.371,在  $p = 3.809$  出现第二次周期倍分,较未受控系统第一次周期倍分延迟了 0.36.

当  $k_1 = 0, k_2 = -0.7$  时,系统(2)在  $P = 3.693$  出现第一次周期倍分,较未受控系统第一次周期倍

分延迟了 0.693.

当  $k_1 = 0, k_2 = -0.4$  时,系统(2)在  $P = 3.395$  出现第一次周期倍分,较未受控系统第一次周期倍分延迟了 0.395,在  $P = 3.849$  出现第二次周期倍分,较未受控系统的第二次周期倍分延迟了大约 0.4.

当  $k_1 = +0.1, k_2 = -0.72$  时,系统(2)在  $P = 3.34$  出现第一次周期倍分,较未受控系统第一次周期倍分延迟了 0.34,在  $P = 3.83$  出现第二次周期倍分,较未受控系统的第二次周期倍分延迟了大约 0.381,其中第二次周期倍分发生到第一次周期倍分的发生较未受控系统延迟了 0.041.

## 4. 结 论

设计了线性控制器,有效地控制了 logistic 模型的倍周期分岔,使系统的混沌行为得到抑制,同时可以延迟或者提前所有分岔发生的时间,改变了倍周期的分岔特性.通过优化控制器可以使 logistic 模型的分岔效果满足一定的要求.

线性控制器  $u = k_1 + k_2 x$  中,  $k_1$  只能在一个狭窄区域取值才能使系统的分岔行为存在,在控制器中起粗调的作用; $k_2$  在控制器中起微调的作用,也就是说只能较大幅度地调整  $k_2$  才能改变系统的分岔特性.

如果只对第一次以后的倍周期分岔进行控制,或者只对其中某一次倍周期分岔进行控制,而不对其他倍周期分岔进行控制,这对控制器的设计难度比较大,以后再继续研究.

[1] Chen G, Moiola J L, Wang H O 2000 *Int. J. Bif. Chaos* **10** 511  
 [2] Tesi A, Abed E H, Genesio R, Wang H O 1996 *Automatica* **32** 1225  
 [3] Alvarez J, Curiel L E 1997 *Int. J. Bif. Chaos* **7** 1881  
 [4] Wang H O, Abed E H 1995 *Automatica* **31** 1223  
 [5] Nayfeh A H, Harb A M, Chin C M 1996 *Int. J. Bif. Chaos* **6** 497  
 [6] Tang J S, Chen Z L 2006 *Int. J. Bif. Chaos* **16** 321  
 [7] Cam U, Kuntman 1998 *Microelectronics Journal* **29** 913  
 [8] Basso M, Evangelisti A, Genesio R, Tesi A 1998 *Int. J. Bif. Chaos* **8** 713  
 [9] Fu W B, Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2889 (in Chinese)  
 [符文彬、唐驾时 2004 物理学报 **53** 2889]  
 [10] Chen G R 2001 *Control Theor. Appl.* **18** 153 (in Chinese) [陈关荣 2001 控制理论与应用 **18** 153]

[11] Brandt M E, Chen G 1997 *IEEE Circuits Syst. I* **44** 1031  
 [12] Yu H J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5053 (in Chinese) [于宏洁 2005 物理学报 **52** 5053]  
 [13] Gu C M, Shen K 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 732 (in Chinese) [顾春明、沈柯 1998 物理学报 **47** 732]  
 [14] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908  
 [15] Peng J H, Tang J S et al 2002 *Chin. Phys.* **11** 213  
 [16] Tang J S, Fu W B, Li K A 2002 *Chin. Phys.* **11** 1004  
 [17] Tang J S, Liu Z Y, Li X P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 522 (in Chinese) [唐驾时、刘铸英、李学平 2003 物理学报 **52** 522]  
 [18] Tang J S, Qian C Z 2003 *J. Sound Vib.* **268** 1036  
 [19] Tang J S 2000 *J. Sound Vib.* **232** 993  
 [20] Sun Z K, Xu W, Yang X L 2005 *J. Dyn. Contr.* **3** (3) 13 (in Chinese) [孙中奎、徐伟、杨晓丽 2005 动力学与控制学报 **3** (3) 13]

- [ 21 ] Qian C Z , Fu W B 2005 *J. Dyn. Contr.* **3**(4)7 ( in Chinese )  
[ 钱长照、符文彬 2005 动力学与控制学报 **3**(4)7 ]
- [ 22 ] Sun X J , Xu W , Ma S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 610 ( in Chinese ) [ 孙晓娟、徐 伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610 ]
- [ 23 ] Xu W , He Q , Rong H W , Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 ( in Chinese ) [ 徐 伟、贺 群、戎海武、方 同 2003 物理学报 **52** 1365 ]
- [ 24 ] Luo X S , Chen G R , Wang B H , Fang J Q , Zou Y L , Quan H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 790 ( in Chinese ) [ 罗晓曙、陈关荣、汪秉宏、方锦清、邹艳丽、全宏俊 2003 物理学报 **52** 790 ]
- [ 25 ] Lu L , Du Z , Luan L 2004 *Acta Phot. Sin.* **33** 1401 ( in Chinese ) [ 吕翎、杜 增、栾 玲 2004 光子学报 **33** 1401 ]

## Controlling the period-doubling bifurcation of logistic model<sup>\*</sup>

Tang Jia-Shi Ouyang Ke-Jian

( College of Mechanics and Aerospace , Hunan University , Changsha 410082 , China )

( Received 11 October 2005 ; revised manuscript received 17 January 2006 )

### Abstract

The bifurcation control of period-doubling bifurcation in logistic model have been studied in this paper. The bifurcation maps of logistic model are achieved and the bifurcation characteristic of the dynamical system is changed by using variable-parameter linear controllers. In order to change the parameter value of all existing bifurcation points and modify the shape of a bifurcation chain , we can design variable controllers in for practical aims. Moreover , the bifurcation map may be obtained more effectively by adequately choosing the controller gain.

**Keywords** : logistic model , period-doubling bifurcation , bifurcation control , controller

**PACC** : 0525 , 4265

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10472029 ).