

理想腔中具有正交偶极矩的级联型 三能级原子发射谱*

周青春

(江苏科技大学物理系, 镇江 212003)

(2005 年 9 月 24 日收到, 2005 年 12 月 29 日收到修改稿)

假设原子具有两正交跃迁电偶极矩, 运用全量子论研究了与单模电磁场共振相互作用的等距三能级原子的发射谱. 对不依赖于场强耦合和依赖强度耦合两种情况分别进行了发射谱的计算, 并比较了原子偶极矩正交和平行条件下发射谱的异同. 结果表明, 一般情况下, 具有平行偶极矩的原子的发射谱谱线少于具有正交偶极矩的原子的谱线, 一些谱线由于干涉而消失.

关键词: 量子光学, 发射谱, 电偶极矩, 级联型三能级原子

PACC: 4250

1. 引 言

标准的 Jaynes-Cummings 模型(JCM)被广泛地用于描述量子光学诸多现象^[1]. 该模型的一部分预言, 如原子布居率反转的崩塌和复苏^[2,3]、真空场 Rabi 劈裂^[4-7]等随着腔量子电动力学技术的发展已经被实验证实. 目前人们已经能够在单光子和单原子水平上观察光与物质的相互作用^[8]. 近几年在腔量子电动力学方面研发的实验工具极可能会使得完成复杂的量子操作协议在将来成为现实^[9].

在高 Q 腔中原子和腔场之间的相互作用属于强耦合范畴内的相互作用, 几个光子就可以干扰原子的动力学行为, 一两个原子的存在也能影响腔内辐射场^[10]. 为了揭示这种强耦合的特性, 许多研究者讨论了束缚于腔内的原子系统的发射谱和腔场谱^[11-19]. 大多数作者处理的是二能级原子情况, 例如 Nasreen 和 Razmi 考虑了含 Stark 频移的双光子 JCM 的原子发射谱及腔场谱^[15], Feng 等研究了双模非线性 JCM 的发射谱^[16]. 作为标准 JCM 的一种重要推广, 三能级 JCM 在说明诸如量子拍、原子相干俘获、无粒子数反转激光等现象中起重要作用, 所以有必要研究三能级 JCM 的原子发射谱. 三能级 JCM 和标准的二能级 JCM 的一个重要差别就是原子跃

迁通道之间会出现干涉, 许多作者在讨论三能级原子和单模腔场作用时没有考虑跃迁偶极矩正交的情况^[13,17,19], 而实际情况却往往如此. 本文的目的是揭示与单模场相互作用的级联型三能级原子跃迁偶极矩正交和平行时发射谱的差别. 由于依赖强度耦合的 JCM 也是量子光学常用模型, 我们一并考虑了不依赖强度耦合和依赖于强度耦合这两种情况的谱特征.

2. 模型与公式表述

考虑高 Q 腔中一个级联三能级原子与单模腔场共振相互作用系统, 其能级结构如图 1 所示. 图中 $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ 分别表示原子基态、中间态和激发态, ω 为腔场频率. $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 之间以及 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 之间的原子跃迁是偶极许可跃迁, $|a\rangle$ 和 $|c\rangle$ 之间跃迁是偶极禁戒的. 在偶极近似和旋波近似下, 系统的 Hamiltonian 可写成(取 $\hbar = 1$ 单位制)

$$H = \omega a^\dagger a - (\omega + \Delta)\sigma_{aa} + (\omega - \Delta)\sigma_{cc} + [g_{bc}a^\dagger(a)\sigma_{cd} + g_{ab}a^\dagger(a)\sigma_{ba}] + \text{h.c.} \quad (1)$$

式中 $a^\dagger(a)$ 为场模产生(湮没)算符, Δ 是场和原子单光子跃迁频率之间失谐量, g_{ab} , g_{bc} 表示原子-场相互作用耦合系数, $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ($i, j = a, b, c$) 为原子投影算符. 为方便起见, 以下讨论将设耦合系数为实

* 江苏省青蓝工程基金(批准号 2005SL002J)资助的课题.

数,且 $g_{ab} = g_{bc} = g$.

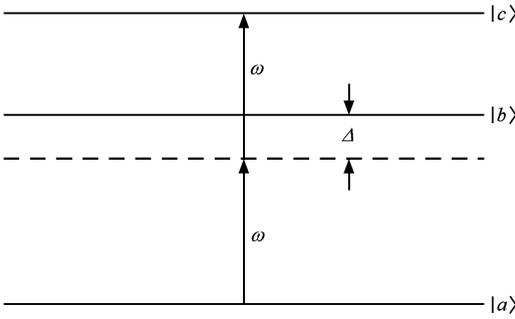


图1 级联型三能级原子结构示意图

在以态矢量 ($n \geq 0$)

$$\begin{cases} |\phi_1^n\rangle = |c; n\rangle, \\ |\phi_2^n\rangle = |b; n+1\rangle, \\ |\phi_3^n\rangle = |a; n+2\rangle \end{cases} \quad (2)$$

为基所张成的 Hilbert 子空间中,易求出 Hamiltonian (1) 的本征能量和本征态矢量,结果为

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= (n+1)\omega - (g/2)(\delta \mp A_n), \\ E_3 &= (n+1)\omega - g\delta, \end{aligned} \quad (3)$$

$$|\phi_j^n\rangle = \sum_{m=1}^3 C_{jm}^n |\phi_m^n\rangle,$$

其中 $\delta = \Delta/g$,

$$A_n = \sqrt{\delta^2 + 4[(n+1)f^2(n+1) + (n+2)f^2(n+2)]}, \quad (4)$$

$$C_{11}^n = \sqrt{\frac{2(n+1)f^2(n+1)}{A_n(A_n + \delta)}}, C_{12}^n = \sqrt{\frac{A_n + \delta}{2A_n}},$$

$$C_{13}^n = \sqrt{\frac{2(n+2)f^2(n+2)}{A_n(A_n + \delta)}}, C_{21}^n = \sqrt{\frac{2(n+1)f^2(n+1)}{A_n(A_n - \delta)}},$$

$$C_{22}^n = -\sqrt{\frac{A_n - \delta}{2A_n}}, C_{23}^n = \sqrt{\frac{2(n+2)f^2(n+2)}{A_n(A_n - \delta)}}, \quad (5)$$

$$C_{31}^n = \sqrt{\frac{(n+2)f^2(n+2)}{(n+2)f^2(n+2) + (n+1)f^2(n+1)}}, C_{32}^n = 0,$$

$$C_{33}^n = -\sqrt{\frac{(n+1)f^2(n+1)}{(n+2)f^2(n+2) + (n+1)f^2(n+1)}}.$$

根据 Eberly 和 Wodkiewicz 有关瞬态物理谱的定义^[20]可得原子发射谱数学表达式

$$\begin{aligned} S_e(\nu) &= 2\Gamma \int_0^T dt' \exp[-(\Gamma - i\nu)(T - t')] \\ &\times \int_0^T dt \exp[-(\Gamma + i\nu)(T - t)] \\ &\times \langle \Phi(0) | \mathbf{D}^\dagger(t') \cdot \mathbf{D}(t) | \Phi(0) \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

这里 Γ 是谱仪半带宽, T 是测量时间, $|\Phi(0)\rangle$ 是原子-场复合系统初态矢,

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}_{ab}\sigma_{ab} + \mathbf{d}_{bc}\sigma_{bc}, \quad (7)$$

\mathbf{d}_{ab} , \mathbf{d}_{bc} 分别是对应于原子 $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ 跃迁和 $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ 跃迁的电偶极矩.若 $\mathbf{d}_{ab} \perp \mathbf{d}_{bc}$,并略去不重要的正比于 $|\mathbf{d}_{ab}|^2$ 的常数因子,则(6)式化为

$$\begin{aligned} S_e(\nu) &= 2\Gamma \int_0^T dt' \exp[-(\Gamma - i\nu)(T - t')] \\ &\times \int_0^T dt \exp[-(\Gamma + i\nu)(T - t)] \\ &\times \langle \Phi(0) | [\sigma_{ab}^\dagger(t')\sigma_{ab}(t) \\ &+ \kappa^2 \sigma_{bc}^\dagger(t')\sigma_{bc}(t)] | \Phi(0) \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 κ 为与偶极矩之比有关的常数.为明确起见,以下皆取 $\kappa = 1$.

设初始时刻 $t = 0$ 原子处于激发态 $|c\rangle$,光场处于数态的任意叠加态,则系统初始态矢量

$$|\Phi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q_n |c; n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q_n |\phi_1^n\rangle, \quad (9)$$

q_n 为初场的数态展开系数.经过较繁琐的代数运算得到原子发射谱的最后表达式

$$\begin{aligned} S_e(\nu) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n F_n^e(\nu) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 F_n^e(\nu), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} F_n^e(\nu) &= 2\Gamma \sum_{l=1}^3 \left[\left| \sum_{j=1}^3 G_{jl}^n Z_{jl}^n \right|^2 \right. \\ &\left. + \left| \sum_{j=1}^3 G_{jl}^n Z_{jl}^n \right|^2 \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} G_{jl}^n &= C_{j1}^n C_{j2}^n C_{j3}^{n-1}, \\ G_{jl}^n &= C_{j1}^n C_{j1}^n C_{j2}^{n-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$Z_{jl}^n = \frac{\exp[\{\nu + E_l^{n-1} - E_j^n\}T] - \exp[-\Gamma T]}{\Gamma + \{\nu + E_l^{n-1} - E_j^n\}} \quad (13)$$

注意,当 $n=0$ 时(11)式对应的 $F_0^e(\nu)$ 对 l 求和中只取 $l=2, 3$, 其中用到的 $E_{2,3}^{-1}, C_{lm}^{-1}(l, m=2, 3)$ 如下:

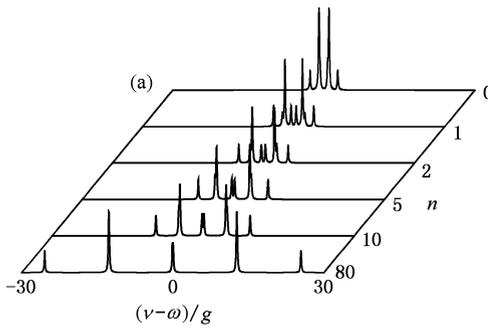
$$E_{2,3}^{-1} = \pm g, \\ C_{22}^{-1} = -C_{22}^{-1} = C_{32}^{-1} = C_{33}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (14)$$

本文仅讨论共振相互作用,所以此后皆取 $\Delta=0$.

3. 原子发射谱

3.1. 初场为数态场

由(10)式易见,一般原子发射谱为数态谱 $F_n^e(\nu)$ 的加权平均,权重是光子数分布函数 $P_n =$



$|q_n|^2$. 为了更好地理解三能级原子的发射谱,首先来看初场处于数态情况时的原子发射谱.

图2绘出了不依赖场强耦合情况下且腔场初始处于数态时原子的发射谱.由(11)式和(13)式知,发射谱的谱线可能位置为

$$\nu = E_j^n - E_l^{n-1} \\ = \omega \pm \frac{1}{2}(A_n - A_{n-1}), \omega \pm \frac{1}{2}A_{n-1}, \\ \omega \pm A_n, \omega \pm (A_n + A_{n-1}). \quad (15)$$

在中心位置 $\nu = \omega$ 处谱线强度为零,所以,谱线一般应有八条,如图2(a)中 $n=1, 2, 5$ 曲线所示.但初场为真空态时,上式中可取 $j=1, 2, 3$,而 l 只能取 $l=1, 2$,所以最多只有六条谱线,如图2中 $n=0$ 曲线所示.为了更清楚地看出各谱线相对强度,在表1中

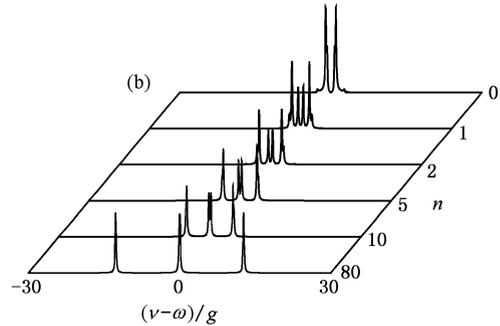


图2 不依赖强度耦合的初始数态场原子发射谱 (a) $d_{ab} \perp d_{bc}$ (b) $d_{ab} // d_{bc}$

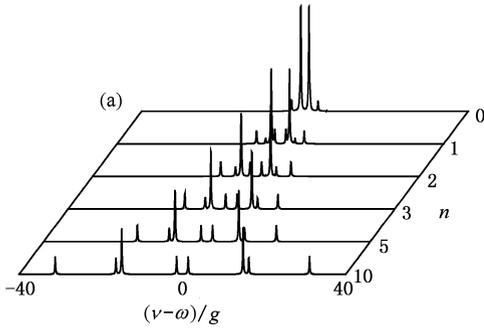
列出谱峰位置和相对高度.当 n 增大时, $A_n - A_{n-1}$ 趋于零,故发射谱中①,⑤号中心峰,右边②,③号以及左边⑥,⑦号边峰发生合并现象,不论是对跃迁偶极矩垂直还是平行情况都如此.两中心峰向共振频率 $\nu = \omega$ 靠拢而边峰皆随 n 增大远离共振频率.对跃迁偶极矩平行情况,最外侧位于 $(\nu - \omega)g = \pm \frac{1}{2}(A_{n-1} + A_n)$ 的④,⑧号边峰由于相消干涉而无

法观察到,在大 n 极限下彻底消失,从而形成三峰谱结构(见图2(b)).当跃迁偶极矩垂直时,情况完全不同:大 n 极限下发射谱具有五峰结构,④,⑧号并不消失.由表1可推知,此时中心峰高度:内边峰高度:外边峰高度 = 2:3:1.对跃迁偶极矩平行情况,该比值为4:3:0.

表1 发射谱峰位及相对峰高 $A_n = \sqrt{(n+1)^2(n+1) + (n+2)^2(n+2)}$, 对不依赖强度耦合 $f(n)=1$ 对依赖强度耦合 $f(n)=n^{1/2}$

谱峰编号	峰位 $(\nu - \omega)g$	相对峰高	大 n 极限下相对高度
①, ⑤	$\pm \frac{1}{2}(A_n - A_{n-1})$	$2 \left[\frac{(n+1)f^2(n+1)}{A_n^2} \right]^2 \left[1 + \frac{A_n^2}{A_{n-1}^2} \right]$	$\frac{1}{16}$
②, ⑥	$\pm \frac{1}{2}A_{n-1}$	$8 \left[\frac{(n+2)f^2(n+2)}{A_n^2} \right]^2$	$\frac{1}{8}$
③, ⑦	$\pm \frac{1}{2}A_n$	$\frac{4n(n+1)f^2(n)f^2(n+1)}{A_n^2 A_{n-1}^2}$	$\frac{1}{16}$
④, ⑧	$\pm \frac{1}{2}(A_{n-1} + A_n)$	$2 \left[\frac{(n+1)f^2(n+1)}{A_n^2} \right]^2 \left[1 + \frac{A_n^2}{A_{n-1}^2} \right]$	$\frac{1}{16}$

图 3 展示了原子-场耦合依赖强度情况下的发射谱. 由于该情况对应的 $A_n - A_{n-1}$ 不趋向于零, 所以图中未发生谱线合并现象, 诸峰位置和相对强度仍由表 1 给出. 图 3 的中心双峰结构一直保持着. 与依赖强度的二能级 JCM 相比, 中心双峰距离不再与 n 无关, 但随 n 增大迅速达到恒定值. 图 3(a) 中 $n \neq 0$ 时谱的 8 峰结构很明显, 当初场场很强时, 谱中仍见 8 峰, 其



中①, ③, ④, ⑤, ⑦, ⑧号峰高度相等, ②, ⑥号峰高度相等且为其他峰高度的二倍. 而对跃迁偶极矩平行情况(图 3(b)), ④, ⑧号峰很弱, 随初始场强度增大变得更弱, 当 $n \geq 3$ 时已经难以观察到了, 但其余 6 峰清晰可辨. 在强场(大 n) 极限下, 发射谱中存在①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦号峰, 最外侧的③, ⑦峰高度是靠近中心的其余 4 峰高度的一半.

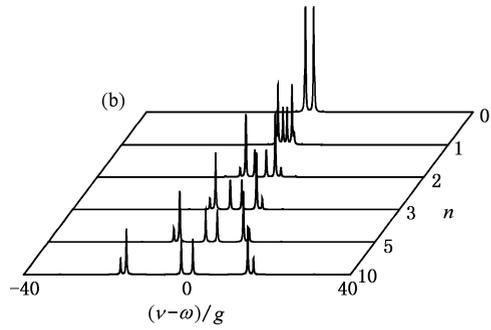


图 3 依赖强度耦合的初始数态场原子发射谱 (a) $d_{ab} \perp d_{bc}$ (b) $d_{ab} // d_{bc}$

3.2. 初始场为相干场

相干场光子数分布为

$$|q_n|^2 = \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!}, \quad (16)$$

其中 \bar{n} 为初场平均光子数. 图 4 显示了不依赖强度耦合情况下不同强度初始相干场中原子发射谱. 当初始相干场强度很弱时(图中 $n = 0.1$), 光谱结构与真空初场的十分相似, 这一现象归因于此时真空谱

在(10)式中权重占有绝对优势. 随初场的 \bar{n} 增大, 非零数态谱权重上升, 谱结构远离真空谱结构, 表现出复杂的结构. 然而, 当 \bar{n} 足够大时, 谱结构又变得简单了, 对偶极矩平行和垂直两种情况分别成为 3 峰(一中心峰与两相干峰)和 5 峰谱(一中心峰与 4 相干峰). 与图 2 相比较, 峰高比值不同于数态发射谱, 边峰宽度明显增大. 图 4(a) 中内侧相干峰由表 1 中②, ③, ⑥, ⑦号峰贡献构成, 外侧相干峰由表 1 中④, ⑧号峰贡献构成, 所以强度低于内侧相干峰.

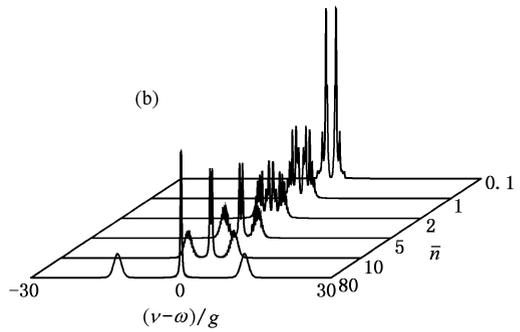
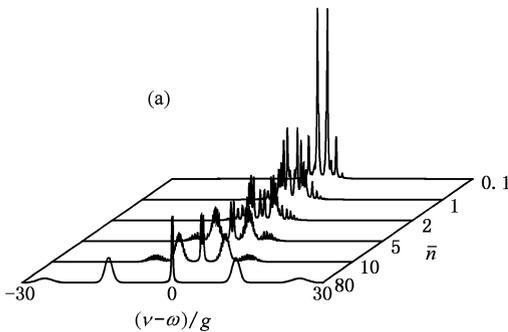


图 4 不依赖强度耦合的初始相干态场原子发射谱 (a) $d_{ab} \perp d_{bc}$ (b) $d_{ab} // d_{bc}$

依赖强度耦合的相干场原子发射谱示于图 5 中. 不论是原子偶极矩垂直还是平行, 发射谱都表现为多峰结构, 与依赖强度耦合情况有两点主要差别: 一是不形成相干峰, 另一点是中心结构在强场极

限下为等高双峰而不是类似于图 4 中的单峰. 此外, 图 5(a) 中对强场存在 4 个梳状小峰密集区, 而对 $d_{ab} // d_{bc}$ 仅有两个梳状小峰密集区. 这些分立的小峰的存在是场量子化的反映.

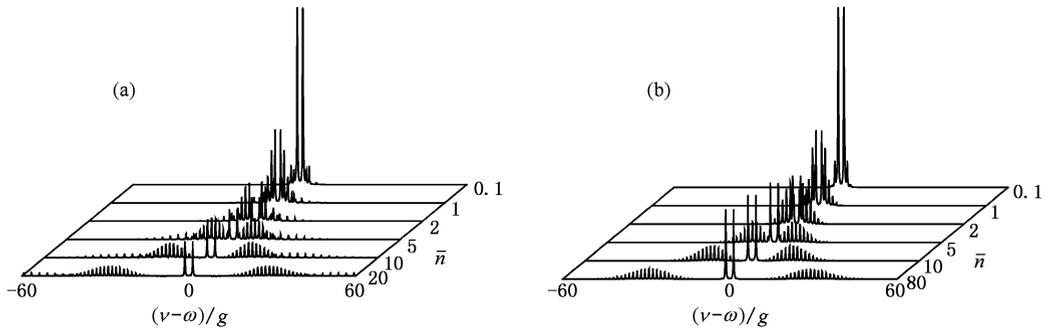


图5 依赖强度耦合的初始相干场原子发射谱 (a) $d_{ab} \perp d_{bc}$ (b) $d_{ab} // d_{bc}$

4. 结 论

本文采用本征能量和本征函数法计算了一个级联型三能级原子与单模腔场共振相互作用系统的原子发射谱. 假设三能级原子初始时刻处于最高激发态, 讨论了初场为纯数态场和相干场时腔场统计性质对发射谱的影响, 比较了原子偶极矩垂直和平行两种情况下原子发射谱的异同点. 主要结论如下:

1. 若原子-场耦合与场强无关, 则在初场为纯数态场时, 原子发射谱最多有 8 条谱线. 对偶极矩平行的原子, 在强场极限下, 发射谱剩下 3 条谱线, 而偶极矩垂直的原子发射谱在同样条件下具有 5 条谱线, 强度比为: 中心谱线: 内边谱线: 外边谱线 = 2:3:

1. 当初场强度增加时, 谱线间出现合并现象. 当初场为强相干场时, 偶极矩垂直的原子发射谱呈中心单峰和 4 个相干峰, 而偶极矩平行的原子的发射谱具有一中心峰和两相干峰.

2. 若原子-场耦合依赖于场强, 则在初场为纯数态场时, 除真空初场外, 对偶极矩垂直的原子, 发射谱总有 8 峰结构. 在强场极限下, 从中心峰向外峰高之比为 1:2:1:1. 对偶极矩平行的原子, 发射谱主要呈现 6 峰结构. 当初场为强相干场时, 偶极矩垂直的原子发射谱和偶极矩平行的原子的发射谱都具有多峰结构和双峰中心结构. 无论偶极矩垂直还是平行, 发射谱都难形成相干峰.

由此可见, 偶极矩垂直的原子发射谱一般比偶极矩平行的原子的发射谱谱线数多.

- [1] Shore B W , Knight P L 1993 *J. Mod. Opt.* **40** 1195
- [2] Eberly J H , Narozhny N B , Sanchez-Mondragon J J 1980 *Phys. Rev. Lett.* **44** 1323
- [3] Rempe G , Walther H , Klein N 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 353
- [4] Sanchez-Mondragon J J , Narozhny N B , Eberly J H 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 550
- [5] Thompson R J , Rempe G , Kimble H J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 1132
- [6] Boca A , Miller R , Birnbaum K M *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 233603
- [7] Maunz P , Puppe T , Schuster I *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 033002
- [8] Doherty A C , Lynn T W , Hood C J *et al* 2001 *Phys. Rev. A* **63** 013401
- [9] Miller R , Northup T E , Birnbaum K M *et al* 2005 *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **38** S551
- [10] Mabuchi H , Doherty A C 2002 *Science* **298** 1372
- [11] Narozhny N B , Sanchez-Mondragon J J , Eberly J H 1981 *Phys. Rev. A* **23** 236
- [12] Gea-Banacloche J , Schlincher R R , Zubairy M S 1988 *Phys. Rev. A* **38** 3514
- [13] Zhou Q C , Zhu S N , Min N B 2005 *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **38** 4309
- [14] Guo H , Zhao L Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4723 [in Chinese] [郭红、赵丽艳 2005 物理学报 **54** 4723]
- [15] Nasreen T , Razmi M S K 1993 *J. Opt. Soc. Am. B* **10** 1292
- [16] Feng J , Gao Y F , Zhan M S 2000 *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **33** 5251
- [17] Gao Y F , Feng J , Wang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2563 [in Chinese] [高云峰、冯健、王继锁 2004 物理学报 **53** 2563]
- [18] Li F L , Gao S Y , Zhao Y T 2003 *Chin. Phys. Lett.* **12** 872
- [19] Ashraf M M 1994 *Phys. Rev. A* **50** 741
- [20] Eberly J H , Wodkiewicz K 1977 *J. Opt. Soc. Am.* **67** 1252

Emission spectrum of a cascade three-level atom with orthogonal dipoles interacting with a single-mode field^{*}

Zhou Qing-Chun

(*Department of Physics , University of Science and Technology , Zhenjiang 212003 ,China*)

(Received 24 September 2005 ; revised manuscript received 29 December 2005)

Abstract

Under the assumption of orthogonal electrical dipole moments of a cascade three-level atom with equally spaced energy levels , the full quantum theory is applied to study the emission spectrum of the atom interacting resonantly with a single-mode electromagnetic field in an ideal cavity. Spectral calculations for both the intensity-dependent and intensity-independent couplings are performed and the spectra in the cases of orthogonal dipole moments and parallel dipole moments are compared. It is found that some spectral lines disappear for the atom with parallel dipoles due to destructive interference leading to fewer lines compared with the spectrum of the atom with orthogonal dipole moments.

Keywords : quantum optics , emission spectrum , electrical dipole moment , cascade three-level atom

PACC : 4250

^{*} Project supported by the ' Qing Lan ' Project Foundation of Jiangsu Province , China (Grant No. 2005SL002J).