

# 二项式光场与级联三能级 原子的量子纠缠\*

胡要花 方卯发† 廖湘萍 郑小娟

(湖南师范大学物理与信息科学学院,长沙 410081)

(2005 年 12 月 11 日收到 2005 年 12 月 28 日收到修改稿)

利用量子熵理论,研究了二项式光场与级联三能级原子的量子纠缠,讨论了光场与原子的初始参量对其量子纠缠性质的影响.结果表明,利用二项式光场的特性,可以揭示从相干态到数态之间的所有态光场与三能级原子相互作用时的量子纠缠性质.选择适当的系统参数可以制备稳定的光场-原子 qutrit 纠缠态.

关键词:二项式光场,级联三能级原子,光场熵,量子纠缠

PACC: 4250

## 1. 引 言

量子纠缠是多体量子系统中一种最奇妙的量子现象.量子纠缠态作为量子信息处理的一种重要的物理资源,被广泛应用于量子计算、量子通信和量子密码术等量子信息工程中.量子纠缠研究的关键问题之一是纠缠态的制备.利用腔 QED 技术制备原子-光场纠缠态是一种重要的、简单的途径.光场与原子的相互作用导致光场与原子之间的量子纠缠.目前在这方面的制备方案大多是利用相干态、真空态和数态光场与二能级原子的相互作用,来研究原子-光场的量子纠缠性质和产生原子-光场纠缠态<sup>[1-7]</sup>.但是介于相干态与数态之间的中间态光场与原子相互作用的量子纠缠性质还少见涉及.我们注意到:1985 年,Stoler 等人<sup>[8]</sup>从理论上引入了二项式光场,这种光场可以通过调节光场参量从相干态经历中间态,过渡到数态.1987 年 Dattoli 等人发现在自由电子激光中可以产生二项式光场<sup>[9]</sup>.因此,通过二项式光场与原子的相互作用,可以研究从相干态到数态的所有光场与原子的量子纠缠性质.根据 Stoler 等人的工作,一个单模二项式态在数态基中可以定义为<sup>[8]</sup>

$$|\eta M\rangle = \sum_{n=0}^M \beta_n^M |n\rangle \quad (0 < \eta < 1, M > 0), \quad (1)$$

式中

$$\beta_n^M = \left[ \frac{M!}{n!(M-n)!} \eta^n (1-\eta)^{M-n} \right]^{1/2} \quad (2)$$

是二项式光子分布函数,表现为亚泊松分布, $M$  是光场的最大光子数.当  $\eta=0, 1$  时,  $|\eta M\rangle$  分别约化为真空态  $|0\rangle$  和数态;当  $\eta \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$  但  $\eta M = \bar{n} = \alpha^2$  ( $\alpha$  为常数,  $\bar{n}$  为平均光子数),则  $|\eta M\rangle$  约化为相干态.因此二项式态是介于相干态和数态之间的一种量子中间态.

另一方面,目前大多量子信息处理是用二能级系统纠缠表示量子信息.近来,人们发现,在信息表示方面,三能级系统比二能级系统有更多突出优点,采用三能级或多能级系统表示量子信息引起了人们的极大兴趣<sup>[10]</sup>.例如,在量子保密通信中,基于纠缠的三能级量子系统的密钥分发方案比二能级方案更能有效防止窃听<sup>[11-13]</sup>;三能级量子系统比二能级量子系统具有更显著的量子非局域性<sup>[14-17]</sup>.本文研究二项式光场与一个级联三能级原子相互作用时的量子纠缠,考察初始光场参量和原子能级相干性对量子纠缠性质的影响.我们的结果表明,适当选择系统的初始参量,可获得纠缠度大、持续时间长的光场-原子 qutrit 纠缠态.

\* 国家自然科学基金(批准号:10374025)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: mffang@hunnu.edu.cn

## 2. 系统模型与光场的约化密度矩阵

考虑如图 1 所示的级联型三能级原子与二项式光场相互作用. 能级  $|3\rangle$  与  $|2\rangle$ ,  $|2\rangle$  与  $|1\rangle$  之间的跃迁与频率为  $\omega$  的光场共振, 而能级  $|3\rangle$  与  $|1\rangle$  之间为禁戒跃迁. 在旋波近似下和相互作用绘景中, 系统的哈密顿量为 (取  $\hbar = 1$ )<sup>[18-22]</sup>

$$H_I = g_1(a^+ \sigma_{23} + a \sigma_{32}) + g_2(a^+ \sigma_{12} + a \sigma_{21}), \quad (3)$$

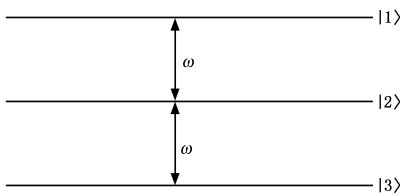


图 1 与二项式光场相互作用的三能级原子图

式中  $a^+$ ,  $a$  分别表示频率为  $\omega$  的光场的产生和湮没算符,  $g_j$  ( $j=1, 2$ ) 是光场与原子相互作用的耦合常数,  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$  ( $i, j=1, 2, 3$ ). 为简单起见, 取  $g_1 = g_2 = g$ . 设初始时刻, 原子处于三个能级的叠加态, 即

$$|\Psi_a(0)\rangle = A|3\rangle + B|2\rangle + C|1\rangle, \quad (4)$$

式中  $A, B, C$  为能级叠加系数. 光场处于由 (1) 式给定的二项式态. 利用初始条件解相互作用绘景中的薛定谔方程, 得到任意时刻系统的态矢

$$|\psi_f(t)\rangle = \sum_{n=0}^M [A_n(t)|3, n\rangle + B_n(t)|2, n+1\rangle + C_n(t)|1, n+2\rangle] + D_n(t)|2, 0\rangle + E(t)|1, 0\rangle + F(t)|1, 1\rangle, \quad (5)$$

式中系数

$$A_n(t) = \left[ \frac{n+2}{2n+3} + \frac{n+1}{2n+3} \cos(\sqrt{2n+3}gt) \right] \beta_n^M A - i\sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} \sin(\sqrt{2n+3}gt) \beta_{n+1}^M B + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2n+3} \left[ \cos(\sqrt{2n+3}gt) - 1 \right] \beta_{n+2}^M C,$$

$$B_n(t) = -i\sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} \sin(\sqrt{2n+3}gt) \beta_n^M A + \cos(\sqrt{2n+3}gt) \beta_{n+1}^M B - i\sqrt{\frac{n+2}{2n+3}} \sin(\sqrt{2n+3}gt) \beta_{n+2}^M C,$$

$$C_n(t) = \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2n+3} \left[ \cos(\sqrt{2n+3}gt) - 1 \right] \beta_n^M A - i\sqrt{\frac{n+2}{2n+3}} \sin(\sqrt{2n+3}gt) \beta_{n+1}^M B + \left[ \frac{n+1}{2n+3} + \frac{n+2}{2n+3} \cos(\sqrt{2n+3}gt) \right] \beta_{n+2}^M C,$$

$$D(t) = \cos(gt) \beta_0^M B - i \sin(gt) \beta_1^M C,$$

$$E(t) = \beta_0^M C,$$

$$F(t) = -i \sin(gt) \beta_0^M B + \cos(gt) \beta_1^M C. \quad (6)$$

由 (5) 式可以得到光场-原子全系统的密度矩阵

$$\rho_{sa}'(t) = |\Psi_f(t)\rangle\langle\Psi_f(t)|. \quad (7)$$

光场的约化密度矩阵为

$$\rho_f'(t) = \text{Tr}_a(|\Psi_f(t)\rangle\langle\Psi_f(t)|) = |T\rangle\langle T| + |P\rangle\langle P| + |Q\rangle\langle Q|, \quad (8)$$

式中

$$|T\rangle = \sum_{n=0}^M A_n(t) |n\rangle, \\ |P\rangle = \sum_{n=0}^M B_n(t) |n+1\rangle + D(t) |0\rangle, \\ |Q\rangle = \sum_{n=0}^M C_n(t) |n+2\rangle + E(t) |0\rangle + F(t) |1\rangle. \quad (9)$$

由 (8) 式表示的约化密度矩阵  $\rho_f'$  的本征值可通过如下方法求得.

设约化密度矩阵  $\rho_f'$  的本征函数为

$$|\Psi_f(t)\rangle = \xi |T\rangle + \gamma |P\rangle + \delta |Q\rangle. \quad (10)$$

将约化密度矩阵  $\rho_f'$  作用到该本征态上, 可以得到

$$\rho_f'(t) |\Psi_f(t)\rangle = (|T\rangle\langle T| + |P\rangle\langle P| + |Q\rangle\langle Q|) (\xi |T\rangle + \gamma |P\rangle + \delta |Q\rangle) \\ = (|T\rangle\langle T| + \frac{\gamma}{\xi} |T\rangle\langle P| + \frac{\delta}{\xi} |T\rangle\langle Q|) \xi |T\rangle + \left( \frac{\xi}{\gamma} |P\rangle\langle T| + |P\rangle\langle P| + \frac{\delta}{\gamma} |P\rangle\langle Q| \right) \gamma |P\rangle + \left( \frac{\xi}{\delta} |Q\rangle\langle T| + \frac{\gamma}{\delta} |Q\rangle\langle P| + |Q\rangle\langle Q| \right) \delta |Q\rangle. \quad (11)$$

显然, 要  $|\Psi_f(t)\rangle$  为  $\rho_f'$  的本征态, 必须满足

$$\lambda_f(t) = |T\rangle\langle T| + \frac{\gamma}{\xi} |T\rangle\langle P| + \frac{\delta}{\xi} |T\rangle\langle Q| \\ = \frac{\xi}{\gamma} |P\rangle\langle T| + |P\rangle\langle P| + \frac{\delta}{\gamma} |P\rangle\langle Q| \\ = \frac{\xi}{\delta} |Q\rangle\langle T| + \frac{\gamma}{\delta} |Q\rangle\langle P| + |Q\rangle\langle Q|. \quad (12)$$

这里  $\lambda_i(t)$  为  $\rho_i'$  的本征值, (12) 式可以写为线性方程的形式

$$\begin{aligned} [T|T - \lambda_i(t)]\xi + T|P \gamma + T|Q \delta &= 0, \\ P|T \xi + [P|P - \lambda_i(t)]\gamma + P|Q \delta &= 0, \\ Q|T \xi + [Q|P \gamma + [Q|Q - \lambda_i(t)]\delta &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

从 (13) 式, 我们发现本征值  $\rho_i'$  满足如下方程:

$$\lambda_i^3(t) + a\lambda_i^2(t) + b\lambda_i(t) + c = 0, \quad (14)$$

方程中的系数  $a, b, c$  为

$$\begin{aligned} a &= -(T|T + P|P + Q|Q), \\ b &= T|T P|P + P|P Q|Q \\ &\quad + T|T Q|Q - Q|T T|Q \\ &\quad - P|T T|P - Q|P P|Q, \\ c &= -T|T P|P Q|Q \\ &\quad - Q|P P|T T|Q \\ &\quad - T|P P|Q Q|P \\ &\quad + T|Q Q|T P|P \\ &\quad + T|P P|T Q|Q \\ &\quad + Q|P P|Q T|T. \end{aligned} \quad (15)$$

(14) 式表明: 二项式光场与三能级原子相互作用时, 其约化密度矩阵有三个本征值, 光场本身形成三个本征态, 而级联三能级原子也有三个本征态. 因此, 这里二项式光场与三能级原子相互作用形成的量子纠缠是 qutrit 纠缠. 下面, 我们利用 (14) (15) 式解得的本征值研究这种量子纠缠性质.

### 3. 二项式光场与级联三能级原子的纠缠量度

由 (3) 式确定的系统哈密顿量导致二项式光场与级联三能级原子之间的量子纠缠. 由于我们假设光场和原子都处于纯态, 因此这里的系统属于纯态双子系量子系统. 对于这样的系统, Phoenix 和 Knight 等人<sup>[23-27]</sup> 已经证明: 子系统的量子约化熵是子系统之间量子纠缠程度的精确量度. 量子约化熵越大, 纠缠度越高. 所以本文用二项式光场的量子约化熵来量度其与级联三能级原子之间的量子纠缠.

二项式光场与级联三能级原子的量子约化熵可以通过它们各自的约化密度矩阵来定义:

$$S_i(t) = -\text{Tr}_i(\rho_i' \ln \rho_i'), \quad (i = a, f). \quad (16)$$

一般双子系量子系统的熵通过 Araki 和 Lieb<sup>[28]</sup> 的熵三角不等式相联系:

$$|S_a(t) - S_f(t)| \leq S_{af} \leq S_a(t) + S_f(t). \quad (17)$$

这里  $S_{af} = -\text{Tr}\{\rho_{af}' \ln \rho_{af}'\}$  是系统的总熵. 由于我们讨论的是纯态全系统, 因此总熵为零并不随时间变化. 根据上述不等式, 一个明显的结论是二项式光场与级联三能级原子的熵相等, 因此我们只需用二项式光场的量子约化熵就可以量度其与级联三能级原子的量子纠缠. 利用由 (14) (15) 式确定的二项式光场的约化密度矩阵的本征值可以将其量子约化熵具体表示为

$$S_i(t) = -\sum_{j=1}^3 \lambda_j^i(t) \ln \lambda_j^i(t). \quad (18)$$

上式难以做解析计算, 在下一节借助于数值计算, 展示二项式光场与级联三能级原子之间的量子纠缠规律.

## 4. 数值计算与结果讨论

### 4.1. 原子初始处于非相干叠加态

我们首先考虑原子初始处于激发态 (即相应于 (4) 式中  $A=1, B=0, C=0$ ), 二项式光场的最大光子数取  $M=100$  和不同的  $\eta$  值的情况, 其数值结果如图 2 所示. 在图 2(a), 当参量  $\eta$  值较小时, 初始光场处于相干态, 光场在很短时间内达到最大值, 最大值接近  $S_f = \ln 3 \approx 1.1$ . 随着时间的演化, 光场熵虽然有振荡但平均熵值仍然较高, 所以, 在整个演化过程中光场与原子强烈纠缠. 当参量  $\eta$  值增加, 初始光场偏离相干态进入中间态, 如图 2(b) (c) 所示. 从图中可以看到, 随着  $\eta$  值增加, 光场熵向周期性演化过渡, 光场和原子出现周期性的量子纠缠, 周期  $\tau = \frac{2\sqrt{2\eta M}}{g} \pi$ . 选择光场熵在极大值的时间点上, 可以制备光场与原子的最大 qutrit 纠缠态. 当  $\eta$  值取 0.999, 光场过渡到数态时, 如图 2(d) 所示, 光场熵出现周期性的高频振荡, 在  $t = k \frac{2\sqrt{2\eta M}}{g} \pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 处, 光场与原子将退纠缠. 值得指出: 一般文献只研究相干态和数态光场与三能级原子相互作用的量子纠缠, 未揭示相干态和数态之间的中间态光场与三能级原子相互作用的周期性量子纠缠. 我们的结果还表明, 当三能级原子初始处于基态时, 光场与其纠缠的动力学规律与此结果相似.

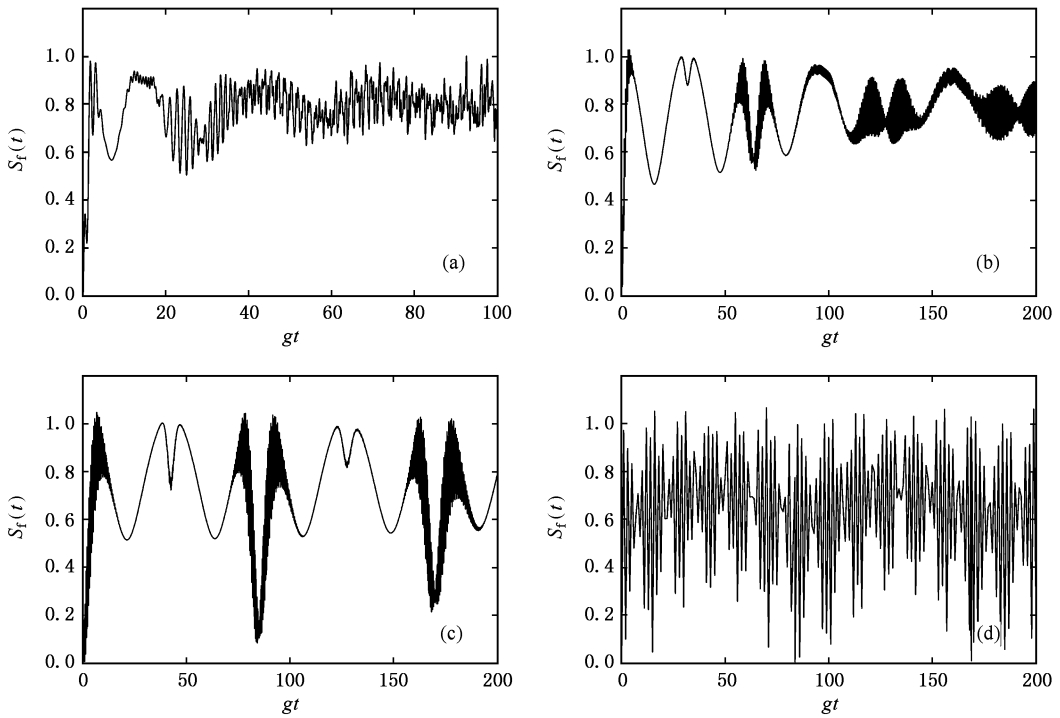


图 2 原子初始处于激发态  $|3\rangle$ 、光场的最大光子数  $M = 100$  时光场熵的时间演化 (a)  $\eta = 0.09$  (b)  $\eta = 0.50$  (c)  $\eta = 0.90$  (d)  $\eta = 0.999$

### 4.2. 原子初始处于相干叠加态

在 (4) 式中取  $A = B = C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，相应于原子初始

#### 4.2.1. 原子初始处于 $|3\rangle, |2\rangle, |1\rangle$ 能级的等权叠加态

处于  $|3\rangle, |2\rangle, |1\rangle$  能级的等权叠加态, 取与图 2 相同的系统初始参量, 其数值结果如图 3 所示。

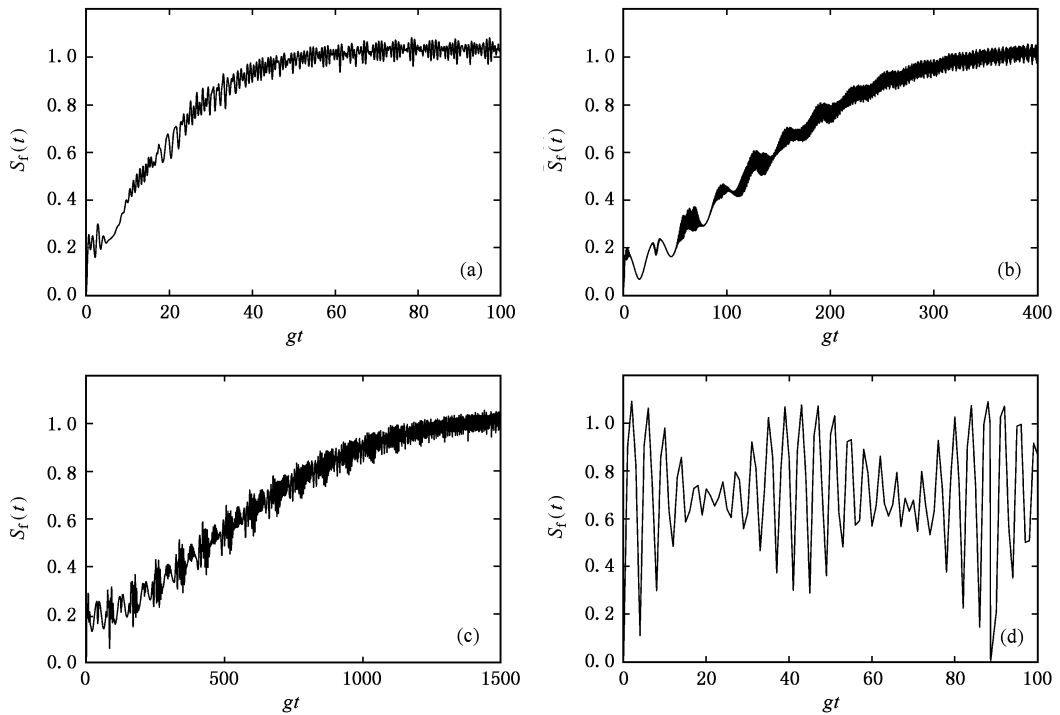


图 3 原子初始处于  $|3\rangle, |2\rangle, |1\rangle$  能级的等权叠加态、光场的最大光子数  $M = 100$  时光场熵的时间演化 (a)  $\eta = 0.09$  (b)  $\eta = 0.50$  (c)  $\eta = 0.90$  (d)  $\eta = 0.999$

从初始光场为相干态的图 3(a) 情况可以看出, 三个原子能级的等权相干叠加导致了光场与原子在演化初始阶段纠缠度显著降低, 随着参量  $\eta$  值的增加, 初始光场向中间态过渡, 如图 3(b)(c) 所示, 很明显初始阶段纠缠度降低的持续时间延长. 随着时间的演化, 光场的熵逐渐达到最大值, 光场与原子维持稳定的最大 qutrit 纠缠. 当初始光场过渡到数态时, 原子能级的相干性导致光场熵出现调幅的高频

振荡, 光场与原子的退纠缠态周期性地出现, 周期为

$$\tau = \frac{2\sqrt{2}\eta M}{g}\pi.$$

#### 4.2.2. 原子初始处于两个下能级等权叠加态

在 (4) 式中取  $A = 0, B = C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 原子初始处于两个下能级的等权叠加态, 二项式光场熵的演化规律如图 4 所示.

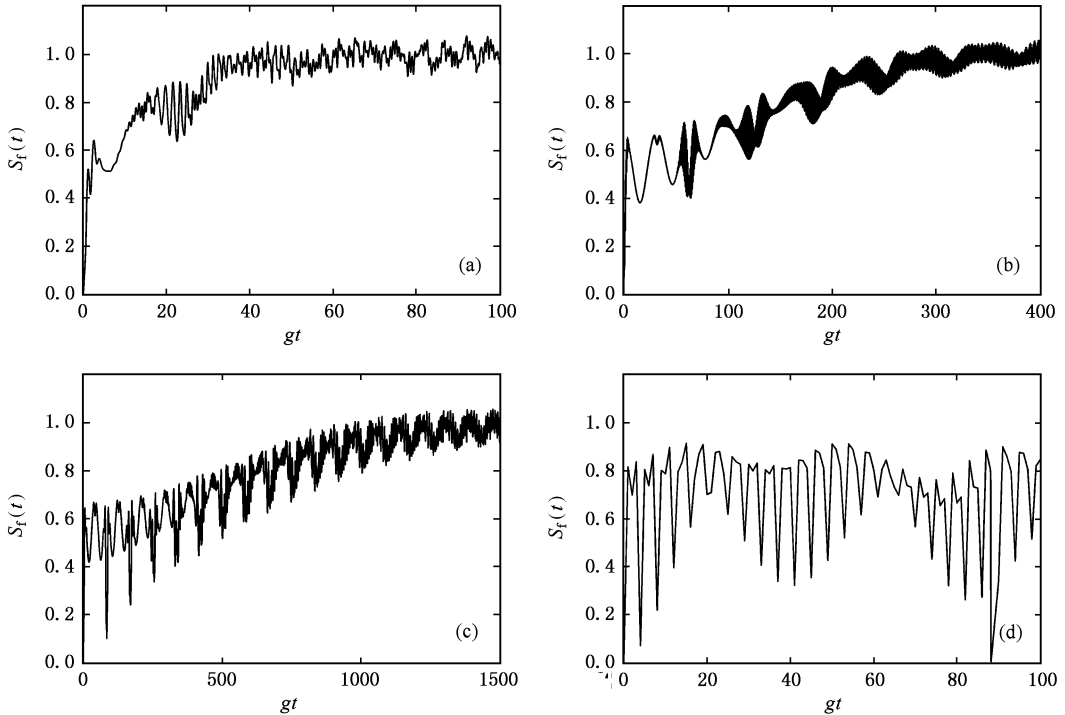


图 4 原子初始处于两个下能级等权叠加态、光场的最大光子数  $M = 100$  时光场熵的时间演化 (a)  $\eta = 0.09$  (b)  $\eta = 0.50$  (c)  $\eta = 0.90$  (d)  $\eta = 0.999$

在初始光场为相干态和中间态时(见图 4(a), (b)(c)), 与级联三能级原子中三个能级的等权相干叠加的情况相比较可以看出(比较图 3): 两个能级的等权相干叠加使初始阶段光场的熵值增加, 光场与原子的纠缠程度增大. 而在初始光场接近数态时(见图 4(c)), 光场的熵演化仍为高频振荡, 但极大熵值降低, 不能达到最大熵值  $\ln 3 \approx 1.1$ , 所以, 在这里得不到光场与原子的最大纠缠态, 只能得到部分纠缠态.

## 5. 结 论

本文研究了二项式光场与级联三能级原子的量子纠缠, 讨论了二项式光场-原子系统的初始参量对其量子纠缠的影响. 其结论为: 当原子初始处于非相

干叠加态时, 对于光场初始为相干态的情况, 光场熵在短时间内能达到极大值, 并且随着时间的演化到达最大值, 光场与原子处于稳定的 qutrit 纠缠态. 对于光场初始处于相干态与数态的中间态时, 光场熵周期性演化, 光场和原子出现周期性的量子纠缠. 当光场过渡到数态时, 光场熵出现周期性的高频振荡, 在某些时间点, 光场与原子出现退纠缠. 当原子初始处于相干叠加态时, 原子能级的相干性抑制了光场熵在演化初始阶段的迅速增加, 光场与原子在初始阶段维持近似的退纠缠态, 这种状态维持的时间随着初始光场从相干态向中间态过渡时增加. 当初始光场过渡到数态时, 原子能级相干性导致光场与原子的纠缠度出现幅度调制. 我们的结果表明: 利用二项式光场特性, 可以揭示从相干态到数态之间的所有态与三能级原子相互作用时的量子纠缠性质.

选择适当的系统参数和相互作用时间,可以制备稳定的光场-原子 qutrit 纠缠态,这是量子信息处理中

有用的物理资源.

- [ 1 ] Zhou Q C , Zhu S N 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1184 ( in Chinese )  
[ 周青春、祝世宁 2005 物理学报 **54** 1184 ]
- [ 2 ] Huang Y X , Zhao P Y , Huang X *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 75  
( in Chinese ) [ 黄燕霞、赵朋义、黄 熙等 2004 物理学报 **53** 75 ]
- [ 3 ] Zuo Z C , Xia Y J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2687 ( in Chinese ) [ 左战春、夏云杰 2003 物理学报 **52** 2687 ]
- [ 4 ] Wu Y , Payne M G , Hagley E W *et al* 2004 *Phys. Rev. A* **70** 063812
- [ 5 ] Wu Y , Deng L 2004 *Opt. Lett.* **29** 1144
- [ 6 ] Liu T K , Wang J S , Feng J , Zhan M S 2005 *Chin. Phys.* **14** 536
- [ 7 ] Tan H T , Xia H X , Li G X 2005 *Chin. Phys.* **14** 1382
- [ 8 ] Stoler D , Saleh B E A , Teich M C 1985 *Opt. Acta* **32** 345
- [ 9 ] Dattoli G , Gallardo J , Torre A 1987 *J. Opt. Soc. Am.* **B2** 185
- [ 10 ] Zou X , Pahlke K , Mathis W quant-ph 0303015
- [ 11 ] Bourennane M , Karlsson A , Bjork G 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012306
- [ 12 ] Bruss D , Macchiavello C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 127901
- [ 13 ] Cerf N J , Bourennane M , Karlsson A *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 127902
- [ 14 ] Kaszlikowski D , Gnański P , Żukowski M *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4418
- [ 15 ] Kaszlikowski D , Gosal D , Ling E J *et al* 2002 *Phys. Rev. A* **66** 032103
- [ 16 ] Acin A , Durt T , Gisin N , Latorre J I 2002 *Phys. Rev. A* **65** 052325
- [ 17 ] Chen J L , Kaszlikowski D , Kwek L C *et al* 2001 *Phys. Rev. A* **64** 052109
- [ 18 ] Wu Y 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1586
- [ 19 ] Wu Y , Yang X 1997 *Phys. Rev. A* **56** 2443
- [ 20 ] Gao Y F , Feng J , Wang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2563 ( in Chinese ) [ 高云峰、冯 健、王继锁 2004 物理学报 **53** 2563 ]
- [ 21 ] Liu X , Fang M F , Liu A L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1707 ( in Chinese ) [ 刘 翔、方卯发、刘安玲 2000 物理学报 **49** 1707 ]
- [ 22 ] Li X S 1985 *Acta Phys. Sin.* **34** 833 ( in Chinese ) [ 李孝申 1985 物理学报 **34** 833 ]
- [ 23 ] Phoenix S J D , Knight P L 1988 *Ann. Phys. ( NY )* **186** 381
- [ 24 ] Phoenix S J D , Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023
- [ 25 ] Fang M F , Zhou G H 1994 *Phys. Lett. A* **184** 397
- [ 26 ] Fang M F 1994 *J. Mod. Opt.* **41** 1319
- [ 27 ] Fang M F , Liu H E 1995 *Phys. Lett. A* **200** 250
- [ 28 ] Araki M , Lieb E 1970 *Commun. Math. Phys.* **18** 160

# Quantum entanglement of the binomial field interacting with a cascade three-level atom <sup>\*</sup>

Hu Yao-Hua Fang Mao-Fa Liao Xiang-Ping Zheng Xiao-Juan

( *College of Physics and Information Science , Hunan Normal University , Changsha 410081 , China* )

( Received 11 December 2005 ; revised manuscript received 28 December 2005 )

## Abstract

Quantum entanglement between a binomial field and a cascade three level atom is studied by using quantum entropy theory , and the influences of the initial state parameters of the field and the atom on the quantum entanglement are discussed . The results show that quantum entanglement of all states from the coherent state to number state interacting with a cascade three level atom can be displayed by using the binomial field property . Steady field-atom qutrit entanglement state can be prepared via the appropriate selection of system parameters .

**Keywords** : binomial state field , cascade three level atom , field entropy , quantum entanglement

**PACC** : 4250

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No.10374025 ).