

双纠缠原子在耗散腔场中的 纠缠动力学*

姜春蕾 方卯发† 吴珍珍

(湖南师范大学物理与信息科学学院,长沙 410081)

(2005 年 9 月 29 日收到,2006 年 1 月 9 日收到修改稿)

研究了能量损耗腔中,两纠缠二能级原子与单模辐射场相互作用过程中原子的纠缠动力学.结果表明:双纠缠原子的纠缠度演化特性决定于初始两原子间的纠缠度、纠缠形式、腔场的平均光数、腔场的衰变系数.当原子初始处于一特定纠缠态时,其纠缠度可以放大,并且不受腔场损耗的影响.

关键词:二能级原子,纠缠度,密度算符,单模辐射场

PACC:4250,0365

1. 引 言

量子纠缠是存在于多子系量子系统中的一种奇特量子现象.量子纠缠态作为量子信息工程中的重要物理资源,一直受到人们的极大关注.由于原子可用作存储和处理量子信息的物理载体(静止比特),而光子可用来作为传递量子信息的物理载体(飞行比特),人们利用腔场中原子与腔模的相互作用,在原子、光子纠缠态的制备、传送和纠缠态的纯化等方面取得了重要进展^[1-6].随着腔量子电动力学技术在量子信息科学中的广泛应用,腔 QED 体系被认为是实现量子存储器的理想方案之一.例如利用腔 QED 技术可制备纠缠态、实现量子隐形传态、制造量子逻辑门、普适量子克隆等^[7-11].近年来,人们研究了偶极共振下腔束缚 Bell 态原子的辐射谱、纠缠态原子的操纵对腔内光场的压缩特性的影响以及纠缠态原子与相干态光场相互作用的动力学等^[12-14].这种利用腔 QED 技术束缚纠缠态原子产生的非经典性质引起了广泛关注.但这些研究都未考虑耗散的影响,而在实验上,腔场不可避免地与环境发生相互作用,损耗对光场和原子相互作用的影响是明显的.

本文研究在腔场存在能量损耗时,大失谐下两纠缠二能级原子与单模辐射场相互作用的纠缠动力

学,考察初始原子间的纠缠度、纠缠形式、腔场的平均光数、腔场的衰变系数对原子纠缠度演化的影响.

2. 模型与密度算符

考虑两纠缠二能级原子与单模辐射场相互作用,在大失谐(即 $\Delta \gg g$, Δ 为原子-场失谐量, g 为原子-场耦合常数)和旋波近似下,系统的有效哈密顿量为^[9]($\hbar = 1$)

$$H = \Omega \sum_{j=1,2} (|1_{jj} \rangle \langle 1_{jj}| aa^+ - |0_{jj} \rangle \langle 0_{jj}| a^+ a) + (S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+), \quad (1)$$

式中 $\Omega = g^2/\Delta$, a^+ (a) 为光场的产生(湮没)算符, S_j ($j = 1, 2$) 为第 j 个原子的赝自旋算符.在考虑腔场损耗时,系统的密度算符满足主方程

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -[H, \rho(t)] + D\rho(t), \quad (2)$$

式中 $D\rho(t)$ 描述腔场的能量损耗,在绝对零度时可写为^[15]

$$D\rho(t) = k[2a\rho(t)a^+ - a^+ a\rho(t) - \rho(t)a^+ a], \quad (3)$$

式中 k 为衰变系数.

设初始时刻,腔模场处于相干态

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10374025)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: mffang@hunnu.edu.cn

两纠缠二能级原子处于如下两种形式的纠缠态：

$$|\psi_a(0)\rangle_I = C_1|1\rangle_1|1\rangle_2 + C_2|0\rangle_1|0\rangle_2, \quad (5)$$

$$|\psi_a(0)\rangle_{II} = C_1|1\rangle_1|0\rangle_2 + C_2|0\rangle_1|1\rangle_2, \quad (6)$$

式中 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 分别为原子的激发态和基态, $C_1^2 + C_2^2 = 1$. 令 $C_1 = \cos\theta$, 则 $C_2 = \sin\theta$. 为了计算方便, 令 $\theta \in [0, \pi/2]$ 则(5)(6)式可化为

$$|\psi_a(0)\rangle_I = \cos\theta|1\rangle_1|1\rangle_2 + \sin\theta|0\rangle_1|0\rangle_2, \quad (7)$$

$$|\psi_a(0)\rangle_{II} = \cos\theta|1\rangle_1|0\rangle_2 + \sin\theta|0\rangle_1|1\rangle_2. \quad (8)$$

为了方便, 我们称(7)式所给定的原子纠缠态为第 I 类纠缠态(8)式所给定的原子纠缠态为第 II 类纠缠态. 显然, 对于一个两体系统的纯量子态, 它的纠缠度等于任意一个子系统的约化密度矩阵的 Von Neumann 熵^[16], 但为了与文章后面讨论的两体混合量子态的纠缠量度一致, 我们统一采用 Wootters 定义的 concurrence^[17]来量度其纠缠度

$$C = \max(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0), \quad (9)$$

式中 $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是厄密矩阵 $R = \sqrt{\rho^{1/2} \cdot \tilde{\rho} \cdot \rho^{1/2}}$ 的按从大到小顺序排列的本征值, ρ 为二体系统的密度矩阵, $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$ (σ_y 为泡利矩阵). 不难得到对于(7)(8)式所给定两纠缠原子, 纠缠度可表示为

$$C(\theta) = 2|\cos(\theta)\sin(\theta)|. \quad (10)$$

两原子纠缠度随纠缠因子 θ 变化, 当纠缠因子 θ 从0到 $\pi/2$ 变化时, 纠缠度先增大后减小, 在 $\theta = \pi/4$ 时, 纠缠度有最大值1, 当 θ 为0或 $\pi/2$ 时, 纠缠度有最小值0, 即非纠缠态. 下面求解(7)(8)两式所给定的两类初始纠缠态下的密度算符.

2.1. 两原子初始处于第 I 类纠缠态时的密度算符

当原子初始处于第 I 类纠缠态时, 系统初始密度算符为

$$\begin{aligned} \rho(0) = & \cos^2\theta|1\rangle_1|1\rangle_2\langle 1|_1\langle 1|_2 + \cos\theta\sin\theta|1\rangle_1|1\rangle_2\langle 0|_1\langle 0|_2 \\ & + \cos\theta\sin\theta|0\rangle_1|0\rangle_2\langle 1|_1\langle 1|_2 \\ & + \sin^2\theta|0\rangle_1|0\rangle_2\langle 0|_1\langle 0|_2. \end{aligned} \quad (11)$$

在(11)式给定的初始条件下, 在相互作用绘景中, (2)式主方程中系统密度算符不为零的分量满足

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{1111}(t) = & \langle 1|_1\langle 1|_2|\dot{\rho}(t)|1\rangle_1|1\rangle_2 \\ = & -2i\Omega[a^+ a, \rho_{1111}(t)] + D\rho_{1111}(t), \\ \dot{\rho}_{1100}(t) = & \langle 1|_1\langle 0|_2|\dot{\rho}(t)|0\rangle_2 \\ = & -2i\Omega[a^+ a, \rho_{1100}(t) + \rho_{1100}(t)a^+ a] \\ & - 2i\Omega\rho_{1100}(t) + D\rho_{1100}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{0011}(t) = & \langle 0|_1\langle 1|_2|\dot{\rho}(t)|1\rangle_1|1\rangle_2 \\ = & 2i\Omega[a^+ a, \rho_{0011}(t) + \rho_{0011}(t)a^+ a] \\ & + 2i\Omega\rho_{0011}(t) + D\rho_{0011}(t), \\ \dot{\rho}_{0000}(t) = & \langle 0|_1\langle 0|_2|\dot{\rho}(t)|0\rangle_2 \\ = & 2i\Omega[a^+ a, \rho_{0000}(t)] + D\rho_{0000}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

通过计算可求得系统的密度算符为

$$\begin{aligned} \rho(t) = & a_1|1\rangle_1|1\rangle_2\langle 1|_1\langle 1|_2 e^{-2i\Omega t} + a_2|1\rangle_1|1\rangle_2\langle 0|_1\langle 0|_2 e^{-2i\Omega t} \\ & + a_3|0\rangle_1|0\rangle_2\langle 1|_1\langle 1|_2 e^{2i\Omega t} + a_4|0\rangle_1|0\rangle_2\langle 0|_1\langle 0|_2 e^{2i\Omega t}, \\ a_1 = & \cos^2\theta, \\ a_2 = & \cos\theta\sin\theta e^{-2i\Omega t} \\ & \times \exp\left[\frac{k}{k+2i\Omega}(1 - e^{-\chi(k+2i\Omega)t})\right]|\alpha|^2 \\ & \times \exp[-|\alpha|^2(1 - e^{-2kt})], \\ a_3 = & a_2^*, a_4 = \sin^2\theta, \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $|\alpha(t)\rangle = |\alpha e^{-kt}\rangle$. 原子的约化密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_a(t) = & \text{Tr}_b(\rho(t)) \\ = & a_1|1\rangle_1\langle 1|_1 + a_2\exp[-|\alpha(t)|^2] \\ & \times (1 - e^{-4i\Omega t})|1\rangle_1\langle 0|_1 \\ & + a_3\exp[-|\alpha(t)|^2(1 - e^{4i\Omega t})] \\ & \times |0\rangle_1\langle 1|_1 + a_4|0\rangle_1\langle 0|_1. \end{aligned} \quad (14)$$

2.2. 两原子初始处于第 II 类纠缠态时的密度算符

当原子初始处于第 II 类纠缠态时, 系统初始密度算符为

$$\begin{aligned} \rho(0) = & \cos^2\theta|1\rangle_1|0\rangle_2\langle 1|_1\langle 0|_2 \\ & + \cos\theta\sin\theta|1\rangle_1|0\rangle_2\langle 0|_1\langle 0|_2 \\ & + \cos\theta\sin\theta|0\rangle_1|1\rangle_2\langle 1|_0\langle 1|_2 \\ & + \sin^2\theta|0\rangle_1|1\rangle_2\langle 0|_1\langle 1|_2. \end{aligned} \quad (15)$$

在(15)式给定的初始条件下, 在相互作用绘景中, (2)式主方程中系统密度算符不为零的分量满足

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{1010}(t) = & \langle 1|_1\langle 0|_2|\dot{\rho}(t)|1\rangle_1|0\rangle_2 \\ = & i\Omega[\rho_{1010}(t) - \rho_{0110}(t)] \\ & + D\rho_{1010}(t), \\ \dot{\rho}_{1001}(t) = & \langle 1|_1\langle 0|_2|\dot{\rho}(t)|0\rangle_2 \\ = & i\Omega[\rho_{1010}(t) - \rho_{0101}(t)] \\ & + D\rho_{1001}(t), \\ \dot{\rho}_{0110}(t) = & \langle 0|_1\langle 1|_2|\dot{\rho}(t)|1\rangle_1|0\rangle_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -i\Omega[\rho_{1010}(t) - \rho_{0101}(t)] \\
 &\quad + D\rho_{0110}(t), \\
 \dot{\rho}_{0101}(t) &= 0 \text{ , } | \dot{\rho}(t) | 0 \text{ , } 1 \\
 &= -i\Omega[\rho_{1001}(t) - \rho_{0110}(t)] \\
 &\quad + D\rho_{0101}(t). \tag{16}
 \end{aligned}$$

通过计算可得系统的密度算符为

$$\begin{aligned}
 \rho(t) &= b_1 |1, 0\rangle\langle 1, 0| + b_2 |1, 0\rangle\langle 0, 1| \\
 &\quad + b_3 |0, 1\rangle\langle 1, 0| + b_4 |0, 1\rangle\langle 0, 1|, \\
 b_1 &= \frac{1}{2}[(1 + \cos 2\Omega t)\cos^2\theta \\
 &\quad + (1 - \cos 2\Omega t)\sin^2\theta], \\
 b_2 &= \frac{1}{2}[2\cos\theta\sin\theta + i\sin 2\Omega t \\
 &\quad \times (2\cos^2\theta - 1)], b_3 = b_2^*, \\
 b_4 &= \frac{1}{2}[(1 - \cos 2\Omega t)\cos^2\theta \\
 &\quad + (1 + \cos 2\Omega t)\sin^2\theta]. \tag{17}
 \end{aligned}$$

原子的约化密度算符为

$$\begin{aligned}
 \rho_a(t) &= \text{Tr}_f(\rho(t)) \\
 &= b_1 |10\rangle\langle 10| + b_2 |10\rangle\langle 01| \\
 &\quad + b_3 |01\rangle\langle 10| + b_4 |01\rangle\langle 01|. \tag{18}
 \end{aligned}$$

3. 数值计算及讨论

3.1. 两原子初始处于第 I 类纠缠态时的纠缠动力学

当初始原子处于第 I 类纠缠态时,由(14)式,可求得纠缠度

$$\begin{aligned}
 C_\rho(t) &= 2 |a_2 \exp[-|\alpha|^2 e^{-2kt}(1 - \cos 4\Omega t)]| \\
 &= \alpha(\theta) \exp\left[\frac{k|\alpha|^2}{k^2 + 4\Omega^2} \left[k + e^{-2kt} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (2\Omega \sin 4\Omega t - k \cos 4\Omega t) \right] \right] \\
 &\quad \times \exp[-|\alpha|^2(1 - e^{-2kt})] \\
 &\quad \times \exp[-|\alpha|^2 e^{-2kt}(1 - \cos 4\Omega t)]. \tag{19}
 \end{aligned}$$

式中 $\alpha(\theta)$ 为原子初始纠缠度,由(19)式可以看出,原子的纠缠动力学决定于原子初始纠缠度、腔场平均光子数和衰变系数.当初始原子纠缠度 $C(\theta) = \alpha(\theta = 0, \pi/2)$ 时, $C_\rho(t)$ 始终为零,即两原子在演化过程中始终是退纠缠的,这是因为形如 $|11\rangle$ 或 $|00\rangle$ 的原子初态通过该腔时大失谐下腔场与原子无光子交换,只会导致原子体系出现依赖腔场的动态斯塔克位移和原子偶极-偶极相互作用,而相同的原子能级移位相同,这种偶极-偶极相互作用对直积态 $|11\rangle$ 或 $|00\rangle$ 也不起作用,故不能产生纠缠;当光场的平均光子数 $|\alpha|^2 = 0$ 时, $C_\rho(t) = \alpha(\theta)$,即腔场初始处于真空态时,腔场损耗对原子的纠缠度没有影响,原子的

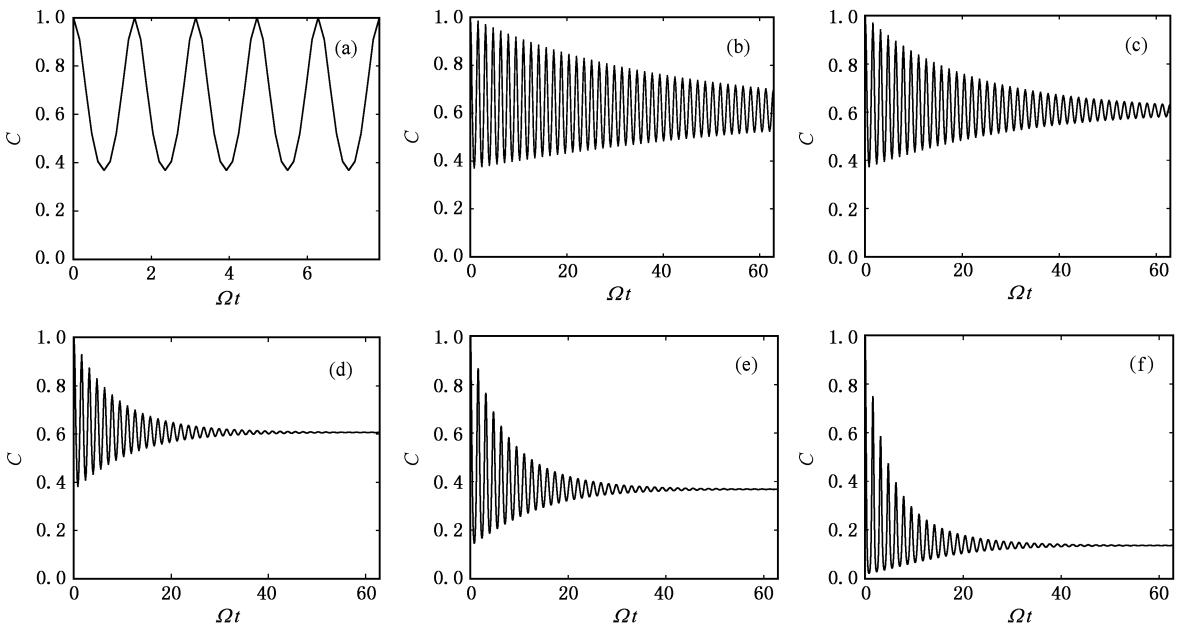


图 1 原子初始处于第 I 类纠缠态时纠缠度的演化图 (a) $|\alpha|^2 = 0.5, \kappa/\Omega = 0$ (b) $|\alpha|^2 = 0.5, \kappa/\Omega = 0.01$ (c) $|\alpha|^2 = 0.5, \kappa/\Omega = 0.02$ (d) $|\alpha|^2 = 0.5, \kappa/\Omega = 0.05$ (e) $|\alpha|^2 = 1, \kappa/\Omega = 0.05$ (f) $|\alpha|^2 = 2, \kappa/\Omega = 0.05$

纠缠度保持不变.图 1 展示了当取初始纠缠度 $C(\theta) = C(\theta = \pi/4) = 1$ 时,不同的腔场平均光子数和衰变系数对原子纠缠度演化的影响,图 1(a)–(d)给出了不同的衰变系数对原子纠缠度演化的影响,可以看出,当 $k=0$ 时,原子纠缠度随时间作周期性等幅振荡,振荡周期为 $\pi/2\Omega$,在 $\Omega t = \pi n/2$ 时纠缠度保持初始值不变;当 $k \neq 0$ 时,随 k 增大,即损耗加大时,原子纠缠度作减幅振荡,振幅随着时间和 k 的增加而减小.图 1(d)–(f)显示了不同的光场平均光子数对原子纠缠度演化的影响,可以看出,随着光场平均光子数的增大,原子纠缠度作减幅振荡,经过一段时间趋于一稳定值,该稳定值随着光场平均光子数的增加而急剧减小.以上说明在初始处于第 I 类纠缠态的两原子与腔场相互作用过程中,耗散削弱了原子之间的纠缠程度,只有当腔场初始处于真空态时,原子的纠缠度演化才不受腔损耗的影响.

3.2. 两原子初始处于第 II 类纠缠态时纠缠度的演化

当初始原子处于第 II 类纠缠态时,由(18)式,可求得纠缠度

$$C_\rho(t) = \sqrt{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta \sin^2 2\Omega t} \\ = \sqrt{C^2(\theta) + \cos^2 2\theta \sin^2 2\Omega t}. \quad (20)$$

由(20)式可以看出,原子的纠缠动力学仅依赖于原子的初始纠缠度,而与腔场的损耗和平均光子数无关.当 $C(\theta) = 0$ 时,即 $\theta = 0, \pi/2$ 时, $C_\rho(t) = |\sin 2\Omega t|$, 纠缠度在 0 到 1 之间作等幅振荡,如图 2(a)所示,由(17)式,可求得此时系统的密度算符可表示为

$$\rho(t) = \frac{1}{2}[(1 + \cos 2\Omega t)|1,0\rangle\langle\alpha(t)|\langle 1,0|\langle\alpha(t)| \\ + i\sin 2\Omega t|1,0\rangle\langle\alpha(t)|\langle 0,1|\langle\alpha(t)| \\ - i\sin 2\Omega t|0,1\rangle\langle\alpha(t)|\langle 1,0|\langle\alpha(t)| \\ + (1 - \cos 2\Omega t)|0,1\rangle\langle\alpha(t)|\langle 0,1|\langle\alpha(t)|] \\ = [\cos \Omega t|1,0\rangle - i\sin \Omega t|0,1\rangle] \otimes [\cos \Omega t|1,0\rangle \\ - i\sin \Omega t|0,1\rangle] \otimes |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|. \quad (21)$$

由(21)式可以看出,在此条件下,腔场与原子是退耦合的,原子与原子之间的偶极-偶极相互作用产生纠缠(可从(1)式看出),腔场的损耗仅仅导致了光场振幅的指数衰减.在(21)式中,若选取 $\Omega t = \pi/4$, 则有

$$\rho(t) = \frac{1}{2}[(|1,0\rangle - i|0,1\rangle] \otimes [|1,0\rangle + i|0,1\rangle] \\ \otimes (|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|) \\ = |EPR\rangle\langle EPR| \otimes [|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|]. \quad (22)$$

此时制备的 EPR 对不会由于腔场的损耗而发生衰减,这与 Zheng 等所得结论^[7]相符,只是这里无须假设腔场初始为真空态.有趣的是我们由图 2(a)–(c)可以看出,对于不同的初始纠缠度,其演化在初始值和 1 之间作等幅振荡,振荡周期为 $\pi/2\Omega$,在 $\Omega t_n = n\pi/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 时, $C_\rho(t) = C(\theta)$, 在 $\Omega t_n = n\pi/2 + \pi/4$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 时, $C_\rho(t) = 1$.这说明在初始处于第 II 类纠缠态的原子与腔场相互作用过程中,任意初始纠缠度都可以放大到 1,且不受腔场损耗影响,特别是当初始为最大纠缠态时,原子可保持为最大纠缠态.由于纠缠的保持在量子信息处理技术中十分重要,我们的这个结论有重要的应用价值.

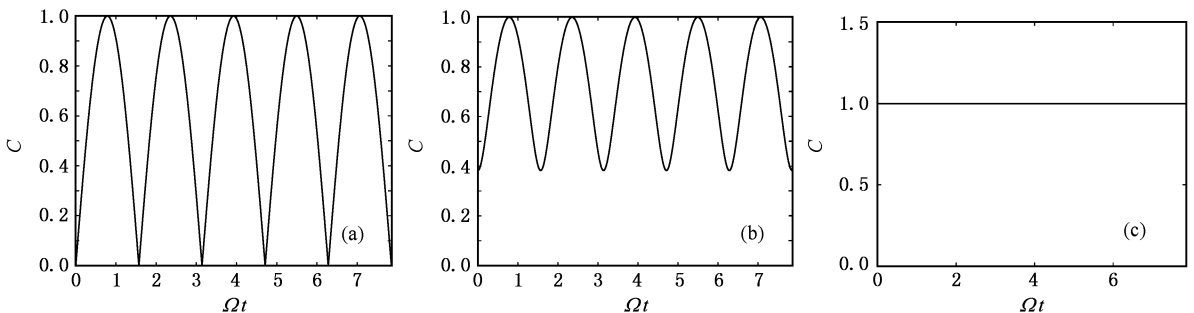


图 2 原子初始处于第 II 类纠缠态时纠缠度的演化图 (a) $C_\rho(\theta) = C_\rho(0)$ (b) $C_\rho(\theta) = C_\rho(\pi/16)$ (c) $C_\rho(\theta) = C_\rho(\pi/4)$

4. 结 论

研究了一位于能量损耗腔中大失谐下,两纠缠二能级原子与单模辐射场相互作用过程中,原子的

纠缠动力学,讨论了不同的原子纠缠初态、腔场的平均光子数、腔场衰变系数对原子纠缠度演化的影响,结果表明腔场损耗使得初始处于第 I 类纠缠态的原子退纠缠而对初始处于第 II 类纠缠态的原子不起作用.在第 II 类纠缠态原子与腔场相互作用时,任意初

始纠缠度都可以放大到 1. 因此在能量损耗腔中, 我们找到了不受能量损耗影响, 能够实现纠缠放大和

保持的方法. 这种方法对利用腔 QED 实现量子信息处理过程具有重要的应用价值.

- [1] Raimond J M , Brune M , Haroche S 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 565
- [2] Huang Y X , Zhan M S 2004 *Chin. Phys.* **13** 2021
- [3] Li Y , Zhang T C , Zhang J C , Xie C D 2003 *Chin. Phys.* **12** 0861
- [4] Liu Y , Guo G C 2005 *Phys. Rev. A* **71** 034304
- [5] Liu Y , Guo G C 2004 *Phys. Lett. A* **327** 284
- [6] Huang Y X , Guo G C 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 49(in Chinese)
[黄燕霞、郭光灿 1999 物理学报 **48** 49]
- [7] Zheng S B , Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
- [8] Tian Y H , Peng J S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 67(in Chinese) [田永红、彭金生 2000 物理学报 **49** 67]
- [9] Guo G P , Li C F , Li J , Guo G C 2002 *Phys. Rev. A* **65** 042102
- [10] Sleator T , Weingurter H 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4087
- [11] Domokos P , Raimond J M , Brune M , Haroche S 1995 *Phys. Rev. A* **52** 3554
- [12] Cao Z L , Zhou Z W , Guo G C , Han Z F 2002 *Chinese J. Lasers B* **11** 413
- [13] Guo G C , Yang C P 1998 *Physica A* **260** 173
- [14] Yang C P , Guo G C 1999 *Phys. Lett. A* **255** 129
- [15] Walls D F , Milburn G J 1985 *Phys. Rev. A* **31** 2403
- [16] Vedral V , Plenio M B , Rippin M A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [17] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245

The entanglement dynamics of two entangled atoms in the dissipative cavity^{*}

Jiang Chun-Lei Fang Mao-Fa[†] Wu Zhen-Zhen

(College of Physics and Information Science , Hunan Normal University , Changsha 410081 , China)

(Received 29 September 2005 ; revised manuscript received 9 January 2006)

Abstract

In this paper , we investigate the entanglement dynamics of two entangled two-level atoms interacting with a single-mode field in a dissipative cavity. The results show that the evolution properties of the entanglement degree of two entangled atoms depend on the initial atomic entanglement degree and form , the average photon number of the cavity field , and the cavity leakage rate. When the atoms are initially in a particular entangled state , the degree of entanglement can be amplified and not influenced by the dissipation of the cavity field.

Keywords : two-level atom , entanglement degree , density operator , single mode radiation field

PACC : 4250 , 0365

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No.10374025).

[†] E-mail : mffang@hunnu.edu.cn