第 56 卷 第 1 期 2007 年 1 月
1000-3290/2007/56(01)/0010-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.1,January,2007

广义不确定关系与整体单极黑洞 Dirac 场的熵*

韩亦文[1)†] 洪 云[1)] 杨树政[2)]

1)(重庆工商大学理学院,重庆 400067)

2)(西华师范大学理论物理研究所,南充 637002)

(2005 年 8 月 24 日收到;2005 年 12 月 8 日收到修改稿)

将广义不确定关系引入新的态密度方程,采用 WKB 近似方法,对含整体单极黑洞 Dirac 场的熵进行了直接计算,所得黑洞熵与它的视界面积成正比,以此揭示了黑洞熵是其视界面处量子态的熵.与 brick-wall 模型方法不同,该结果不需要取任何截断.同时表明,用此方法不仅可以计算黑洞标量场的熵,而且可以计算 Dirac 场的熵.

关键词:黑洞,广义不确定关系,Dirac 场,熵

PACC:0420,9760L

1.引 言

广义不确定关系的提出缘于量子引力理论和微扰弦理论,微扰量子引力理论的主要问题之一是将引力场作为一种给定背景下的物质场引入量子场时有源情况下会出现不可重整化的困难.长期以来,人们相信引力效应会导致一个最小可观测距离的存在,这个最小长度为 Planck 长度的量级.根据 Heisenberg 不确定原理,要探测某一线度 Δl 的空间范围,则空间线度不确定量应不大于 Δl,动量不确定量应不小于某个 Δp.非微扰量子引力理论也认为空间能被量子化为 Planck 网格[1],弦理论指出不能探测到比弦尺度 $l_s \equiv \sqrt{\lambda}$ 更小的空间距离[2—5](l_s 也为 Planck 长度下的量级).因此,人们普遍认定最小空间距离的存在且该最小空间长度应该用量子理论描述为空间位置的最小不确定量,进而提出了广义的正则变量的对易关系

$$[\hat{x},\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\left(1+\frac{\lambda}{\hbar^2}\hat{p}^2\right). \tag{1}$$

由(1)式可得广义不确定关系

$$\Delta x \geqslant \hbar/\Delta p + \lambda\Delta p/\hbar, \tag{2}$$

其中 $\hbar$ 为 Planck 常数,λ 为引力修正因子.上式以 Δp 为自变量求 Δx 的极限值可得

$$\Delta x \geqslant 2\sqrt{\lambda}, \tag{3}$$

即存在最小空间不确定度,也就是最小空间长度 $2\sqrt{\lambda}$.

众所周知,用半经典方法描述量子态时,若采用通常的不确定关系 $\Delta x\Delta p \geqslant 2\pi\hbar$,则粒子在相空间中的体元内的量子态数为

$$\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p/(2\pi\hbar)^3. \tag{4}$$

若采用广义不确定关系(2),文献[6]给出了如下的量子态数:

$$\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p/(2\pi\hbar)^3(1+\lambda p^2), \tag{5}$$

其中 $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$;弯曲时空中 $p^2 = p_ip^i = g^{i\mu}p_ip_\mu$,$g^{i\mu}$ 为度规的逆变分量,$i = 1,2,3$;$\mu = 0,1,2,3$.文献[7]将广义不确定关系(2)用于讨论黑洞热力学问题,在不用 brick-wall 模型的情况下,计算了黑洞 Klein-Gorden 场的熵,并避免了为克服紫外发散而必须引入的截断因子.本文采用经广义不确定关系改进后的态密度方程,计算了球对称整体单极黑洞 Dirac 场的熵,结果显示,在 Dirac 场中不取任何截断同样可以克服 brick-wall 模型计算黑洞熵所出现的发散,此乃将引力量子化应用于计算黑洞 Dirac 场的熵的一次有效尝试.

2. Dirac 方程的退耦与变量分离

含整体单极黑洞时空的线元为[8]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\left(1-8\pi\eta^2G-\frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 \\ &-\left(1-8\pi\eta^2G-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 \\ &- r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\end{aligned} \tag{6}$$

† E-mail:hanyw1965@163.com

其中 M 为黑洞质量，η 为整体单极子，G 取自然坐标. 由时空(6)可构造如下零标架：

$$l_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{R}, \frac{1}{\sqrt{R}}, 0, 0\right),$$

$$n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{R}, -\frac{1}{\sqrt{R}}, 0, 0\right),$$

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, r, \mathrm{i}r\sin\theta),$$

$$\bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, r, -\mathrm{i}r\sin\theta), \tag{7}$$

其中 $R(r) = 1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}$. 按照 Newman-Penrose 方法[9]可求得不为零的旋系数

$$\rho = \mu = \frac{\sqrt{R}}{2\sqrt{2}r},$$

$$\alpha = \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r},$$

$$\beta = -\bar{\alpha} = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r},$$

$$\varepsilon = \gamma = -\frac{1}{2\sqrt{2R}}\frac{M}{r^2}, \tag{8}$$

弯曲时空中，旋量粒子的动力学行为可由旋标架形式的 Dirac 方程来描述[10-12]. 在考虑粒子不带电时，Dirac 方程为

$$(\mathrm{D} + \varepsilon - \rho)F_1 + (\bar{\delta} + \pi - \alpha)F_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 G_1,$$

$$(\Delta + \mu - \gamma)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 G_2,$$

$$(\mathrm{D} + \varepsilon^* - \rho^*)G_2 - (\delta + \pi^* - \alpha^*)G_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 F_2,$$

$$\Delta + \mu^* - \gamma^*)G_1 - (\bar{\delta} + \beta^* - \tau^*)G_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mu_0 F_1, \tag{9}$$

其中 μ_0 为 Dirac 粒子的静质量；F_1, F_2, G_1, G_2 为波函数四分量旋量；$\mathrm{D}, \Delta, \delta, \bar{\delta}$ 为普通微分算符，它们与零标架的关系由下式定义[13,14]：

$$\mathrm{D} = l^\mu\partial_\mu, \Delta = n^\mu\partial_\mu,$$

$$\delta = m^\mu\partial_\mu, \bar{\delta} = \bar{m}^\mu\partial_\mu. \tag{10}$$

将(7)式代入(10)式可得

$$\mathrm{D} = \frac{1}{\sqrt{2R}}\left(\frac{\partial}{\partial t} - R\frac{\partial}{\partial r}\right),$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2R}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + R\frac{\partial}{\partial r}\right),$$

$$\delta = -\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\bar{\delta} = -\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{11}$$

将(11)式及(8)式代入(9)式，可得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{M}{2Rr^2} - \frac{\sqrt{R}}{2r}\right)F_1 - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{2r}\right)F_2 - \mathrm{i}\mu_0 G_1 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{M}{2Rr^2} + \frac{\sqrt{R}}{2r}\right)F_2 - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{2r}\right)F_1 - \mathrm{i}\mu_0 G_2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{M}{2Rr^2} - \frac{\sqrt{R}}{2r}\right)G_2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{2r}\right)G_1 - \mathrm{i}\mu_0 F_2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{M}{2Rr^2} + \frac{\sqrt{R}}{2r}\right)G_1 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{2r}\right)G_2 - \mathrm{i}\mu_0 F_1 = 0, \tag{12}$$

根据时空的对称性，我们令

$$F_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_1(r)Y_1(\theta, \varphi),$$

$$F_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f_2(r)Y_1(\theta, \varphi),$$

$$G_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}g_1(r)Y_2(\theta, \varphi),$$

$$G_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}g_2(r)Y_2(\theta, \varphi), \tag{13}$$

将(13)式代入(12)式并分离变量，得

$$\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{R}} - \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} - K\right)f_1 - \frac{\chi_1}{r}f_2 - \mathrm{i}\mu_0 g_1 = 0,$$

$$\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} + K\right)f_2 - \frac{\chi_2}{r}f_1 - \mathrm{i}\mu_0 g_2 = 0,$$

$$\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{R}} - \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} - K\right)g_2 + \frac{\chi_2}{r}g_1 - \mathrm{i}\mu_0 f_2 = 0,$$

$$\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} + K\right)g_1 + \frac{\chi_1}{r}g_2 - \mathrm{i}\mu_0 f_1 = 0, \tag{14}$$

其中 $K = \frac{M}{2Rr^2} + \frac{\sqrt{R}}{2r}$，$\chi_1, \chi_2$ 为分离变量常数，

$$\chi_1 = \frac{1}{Y_1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{2}\right)Y_2(\theta, \varphi),$$

$$\chi_2 = \frac{1}{Y_2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{2}\right)Y_1(\theta, \varphi). \tag{15}$$

为使方程组(14)自洽，须满足

$$f_1 = g_2, f_2 = g_1, \chi_1 = -\chi_2 = \chi, \tag{16}$$

于是(14)式简化成

$$\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{R}} - \sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r} - K\right)f_1 - \frac{\chi}{r}f_2 - \mathrm{i}\mu_0 f_2 = 0,$$

$$\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{R}}+\sqrt{R}\frac{\partial}{\partial r}+K\right)f_2-\frac{\chi}{r}f_1-\mathrm{i}\mu_0 f_1=0.\quad(17)$$

球对称的旋分量方程为

$$\hat{L}_- Y_-=-\chi^2 Y_1,\hat{L}_+ Y_+=-\chi^2 Y_2,\quad(18)$$

其中

$$\hat{L}_{\mp}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\times\left(\frac{\cos^2\theta}{4}\mp\mathrm{i}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{2}\right).\quad(19)$$

分离变量常数 χ 满足

$$\chi^2=(l+s_z)(l+s_z+1),\quad(20)$$

其中,自旋 $s_z=\pm\frac{1}{2}$ 对应球谐函数 $Y_2(\theta,\varphi)$ 和 $Y_1(\theta,\varphi)$;对于 Dirac 场,它表征相空间每一点对应的两个态.

3. 新的态密度方程及黑洞的熵

由(5)式可求得含整体单极黑洞视界面附近 Hawking 辐射场的内能密度[6]

$$u=\int_0^\infty\frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)(1+\lambda\omega^2)^3}<\frac{\pi}{16\lambda^{3/2}}\beta^{-1}\quad(21)$$

与之对应的量子态密度称为新的态密度,其方程为

$$g(\varepsilon)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{(1+\lambda p^2)^3}.\quad(22)$$

方程(17)一合理近似解可表示为场函数 $\phi\approx\exp[-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}X(r,\theta,\varphi)]$,使用 WKB 近似,得

$$\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{R}}-\mathrm{i}X\sqrt{R}\right)f_1-\left(\mathrm{i}\mu_0+\frac{\chi}{r}\right)f_2=0,$$

$$\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{R}}+\mathrm{i}X\sqrt{R}\right)f_2-\left(\mathrm{i}\mu_0-\frac{\chi}{r}\right)f_1=0.\quad(23)$$

解方程(23)得非平庸解为

$$p_r^2=X'^2=\frac{1}{R}\left(\frac{\omega^2}{R}-\mu_0-\frac{\chi^2}{r^2}\right).\quad(24)$$

将(24)式代入(22)式并作零质量近似,得对应 ω 自旋为 $s_z=\pm1/2$ 的量子态数

$$g_1(\omega)=\frac{2}{3\pi}\int\frac{\omega^3r^2\mathrm{d}r}{R^2(1+\lambda\omega^2/R)^3},$$

$$g_2(\omega)=\frac{2}{3\pi}\int\frac{(\omega^3/R-R/r^2)^{3/2}r^2\mathrm{d}r}{R^{1/2}(1+\lambda\omega^2/R)^3}.\quad(25)$$

我们注意到,在这里 $g_1(\omega)$ 和 $g_2(\omega)$ 不相同,但这个不同是可以忽略的[15],于是得总的量子态数为

$$g(\omega)=g_1(\omega)+g_2(\omega)\approx\frac{4}{3\pi}\int\frac{\omega^3r^2\mathrm{d}r}{R^2(1+\lambda\omega^2/R)^3}.\quad(26)$$

由量子统计理论得黑洞视界面附近量子场的自由能

$$F=-\frac{1}{\beta}\int\mathrm{d}g(\omega)\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta\omega})=\frac{4}{3\pi}\int_{r_\mathrm{h}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\int_0^\infty\frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}+1)^2(1+\lambda\omega^2/R)^3}.\quad(27)$$

进一步可得黑洞 Dirac 场的统计熵

$$S=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{4\beta^2}{3\pi}\int_{r_\mathrm{h}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\times\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\beta\omega}\omega^4\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}+1)^2(1+\lambda\omega^2/R)^3}=\frac{4\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_\mathrm{h}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+1)(1+\lambda x^2/\beta^2R)^3},\quad(28)$$

其中 $x=\beta\omega$.考虑到下面的不等式:

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}<\mathrm{e}^x,\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}<\mathrm{e}^{-x},\quad(29)$$

则(28)式可改写成

$$S<\frac{4\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_\mathrm{h}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\int_0^\infty\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1+\lambda x^2/\beta^2R)^3}=\frac{4\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_\mathrm{h}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\beta^2R}\right)^{-2}+\frac{\pi}{16}\left(\frac{\lambda}{\beta^2R}\right)^{3/2}\right]=\frac{\beta}{3\pi\lambda^2}\int_{r_\mathrm{h}}r^2\mathrm{d}r+\frac{\lambda^{-3/2}}{12}\int_{r_\mathrm{h}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^{1/2}}.\quad(30)$$

对此,我们感兴趣的是黑洞视界附近 $[r_\mathrm{h},r_\mathrm{h}+\varepsilon]$ 对熵的贡献,由(2)式不难求得在 Planck 尺度下纯空间线元的最小长度为 $2\sqrt{\lambda}$.这里的 $2\sqrt{\lambda}$ 应该是用广义不确定关系来衡量的长度的最小单位,对于黑洞的视界,也应以此为最小尺度,所以将固有积分区域定在零到 $2\sqrt{\lambda}$ 的范围内,也就是将 $2\sqrt{\lambda}$ 定义为薄层的固有厚度.利用固有量与坐标量的关系确定积分上限,从而可以确定薄层厚度 ε[16],

$$2\sqrt{\lambda}=\int_{r_\mathrm{h}}^{r_\mathrm{h}+\varepsilon}\sqrt{\gamma_{11}}\mathrm{d}r=\int_{r_\mathrm{h}}^{r_\mathrm{h}+\varepsilon}\frac{1}{R^{1/2}}\mathrm{d}r\approx\int_{r_\mathrm{h}}^{r_\mathrm{h}+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\kappa(r-r_\mathrm{h})}}=\sqrt{2\varepsilon/\kappa},\quad(31)$$

其中 $\varepsilon=2\lambda\kappa$,$\kappa=2\pi\beta^{-1}$,为黑洞视界的表面引力势.于是得黑洞视界附近对熵的贡献结果

$$S\propto\frac{\beta}{3\pi\lambda^2}r_\mathrm{h}^2\varepsilon+\frac{\lambda^{-3/2}}{6}r_\mathrm{h}\sqrt{\lambda}=\frac{3A_\mathrm{h}}{8\pi\lambda},\quad(32)$$

其中 λ 的单位为长度的平方,量级为 Planck 长度 l_s 的平方[16].在 Planck 单位制中 $l_s = 1$,取引力修正因子 $\lambda = 1/2\pi$,这样 λ 的量级与 l_s^2 的量级相一致,则(32)式可简化为

$$S \propto \frac{3}{4} A_{\mathrm{h}}, \tag{33}$$

式中,A_{h} 是整体单极黑洞的表面积,r_{h} 是黑洞的视界位置,可由三维零超曲面的二维类空截面确定,其值为

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{h}} &= \int \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\ &= \int r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 4\pi r_{\mathrm{h}}^2. \end{aligned} \tag{34}$$

上式表明,经引入广义不确定关系计算新的态密度,所得黑洞的熵与其视界面积成正比,这也是我们所期待的结果.

4. 结论与讨论

我们从含整体单极黑洞背景下的 Dirac 方程出发,通过引入广义不确定关系得到新的态密度方程,采用 WKB 近似方法,计算了此黑洞 Dirac 场的熵,结果显示,利用此法研究黑洞熵,不需要取截断就可消除 brick-wall 模型中出现的发散[17—20],进而得到球对称整体单极黑洞视界面处 Dirac 场的熵与其视界面积成正比,这与 Bekenstein 的结论一致.进一步把这个结果即本文中的(32)式与文献[21]中的(20)式相比较,我们看到黑洞 Dirac 场的熵比同质量黑洞 Klein-Gordon 场的熵稍大.

诚然,在上述黑洞熵的计算中我们所给出的仅仅是黑洞熵的上界,但仍可体现出黑洞熵与其视界面面积之间的内在联系,也进一步表明黑洞熵是其视界面处量子态的熵,是一种量子效应.

[1] Ashtekar A, Rovelli G, Smolin L 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 237

[2] Gross D J, Mende P F 1988 *Nucl. Phys.* B **303** 407

[3] Garay L J 1995 *Mod. Phys.* A **10** 145

[4] Maggiore M 1993 *Phys. Lett.* B **319** 83

[5] Amati n D, Ciafaloni M, Veneziano G 1987 *Phys. Lett.* B **197** 81

[6] Chang L N 2002 *Phys. Rev.* D **65** 125028

[7] Li X 2002 *Phys. Lett.* B **540** 9

[8] Yu H W 1993 *Phys. Lett.* A **182** 353

[9] Newman E, Penrose P 1962 *J. Math. Phys.* **3** 566

[10] Gao C J, Shen Y G 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1167

[11] Liu W B, Zhu J Y, Zhao Z 2000 *Acta. Phys. Sin.* **49** 581 (in Chinese) [刘文彪、朱建阳、赵　峥 2000 物理学报 **49** 581]

[12] Li X 2002 *Phys. Rev.* D **65** 084005

[13] Page D N 1976 *Phys. Rev.* D **14** 1509

[14] Zhao Z 1999 *Thermal Property of Black Hole and Singularity of Spacetime* (Beijing: Beijing Normal University Press) pp19-36 [赵　峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性(北京 :北京师范大学出版社)第 19—36 页]

[15] Li X 2002 *Phys. Rev.* D **65** 084005

[16] Sun X F, Jing L, Liu W B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4002 (in Chinese) [孙学锋、景　玲、刘文彪 2004 物理学报 **53** 4002]

[17] Luo Z J, Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 395 (in Chinese) [罗志坚、朱建阳 1999 物理学报 **48** 395]

[18] Liu W B, Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 310

[19] Zhang J Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2354 (in Chinese) [张靖仪 2003 物理学报 **52** 2354]

[20] Song T P, Hou C X, Huang J S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1905 (in Chinese) [宋太平、侯晨霞、黄金书 2002 物理学报 **51** 1905]

[21] Han Y W, Yang S Z, Liu W B 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 382

The generalized uncertainty relation and Dirac field entropy of black hole with an internal global monopole

Han Yi-Wen[1)†] Hong Yun[1)] Yang Shu-Zheng[2)]

1)(*Science College, Chongqing Technology and Business University, Chongqing* 400067, *China*)

2)(*Department of Physics, Chinesewest Normal University, Nanchong* 637002, *China*)

(Received 24 August 2005; revised manuscript received 8 December 2005)

Abstract

The generalized uncertainty relation is considered in the new equation of state density. Using the WKB approximation, Dirac field entropy of the horizon of the black hole with an internal global monopole is calculated directly. The result shows that the black hole entropy is proportional to the horizon area, which brings to light the relationship between the black hole entropy and the entropy of quantum state near the event horizon. The difference from the brick-wall model is that the present result is convergent without any cutoff. It is indicated that this method can be used to calculate the entropy of the scale field of black hole, and it can be extended to calculate the entropy of Dirac field.

Keywords: black hole, the generalized uncertainty relation, Dirac field, entropy

PACC: 0420, 9760L

† E-mail: hanyw1965@163.com