

色关联噪声驱动的非对称双稳系统中 平均首次穿越时间的研究*

宁丽娟¹⁾²⁾ 徐 伟^{1)†} 杨晓丽¹⁾²⁾

1) 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

2) 陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062)

(2006 年 4 月 5 日收到, 2006 年 5 月 16 日收到修改稿)

研究了由色关联的乘性白噪声和加性白噪声驱动的非对称双稳系统中, 色关联及非对称性对平均首次穿越时间的影响. 数值结果表明乘性噪声强度 α 和加性噪声强度 D 及互相关时间 τ 对首次穿越时间 T 的影响是一致的. 加性和乘性噪声间的互关联强度 λ 及势阱的非对称性 r 对 T 的影响是一致的. τ 的增加能提高粒子的逃逸率, λ 的增加则减小逃逸率.

关键词: 平均首次穿越时间, 非对称双稳系统, 色关联, 互关联强度

PACC: 0540, 0250

1. 引 言

在随机动力系统的研究中, 人们发现在某些情况下, 乘性和加性噪声可能来自于同一个噪声源, 它们之间具有某种形式的互关联^[1-17]. 在许多实际的问题中噪声的相关时间较长而不能当作白噪声处理, 所以具有关联色噪声的非线性系统受到了人们的广泛关注^[3-17]. 平均首次穿越时间(MFPT)是系统从一个稳态出发穿越势垒进入另一势阱所用时间的平均值, 它是用来刻画逃逸问题的重要的特征量, 大量的文献研究了关联噪声对 MFPT 的影响^[13-17]. Jia^[14]和 Mei^[15]分别研究了由白关联和色关联加性和乘性白噪声驱动的双稳系统的 MFPT, Xie^[16]和 Jin^[17]分别对白关联和色关联的乘性色噪声和加性白噪声驱动的双稳模型的平均首次穿越问题进行了研究.

上述文献主要研究的是对称的双稳系统, 然而在许多实际的系统中对称性是难以保证的, 故势阱的非对称性被引入磁通量闸门磁力计器和超导量子干涉设备中来探测弱的信号^[18-20]. 靳艳飞^[21]对具有不相关的乘性和加性白噪声驱动的非对称双稳系统的 MFPT 进行了研究. 本文进一步将理论分析

与实际情况相结合, 对由色关联的乘性和加性白噪声驱动的非对称双稳系统进行了研究, 并且讨论了噪声对 MFPT 的影响.

2. MFPT

受色关联的乘性白噪声和加性白噪声激励的非对称过阻尼达芬模型可由下列一维运动微分方程描述:

$$\dot{x} = -U'(x) + x\xi(t) + \gamma(t), \quad (1)$$

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + rx, \quad (2)$$

其中, r 代表势阱的非对称性, 势函数 $U(x)$ 在 $-2\sqrt{3}/9 < r < 2\sqrt{3}/9$ 的条件下表示一个非对称双稳势函数. 噪声项 $\xi(t)$ 和 $\gamma(t)$ 是高斯噪声, 它们的统计性质可以由均值和相关函数来表示, 即

$$\xi(t) = \gamma(t) = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \xi(t)\xi(t') &= 2\alpha\delta(t-t'), \\ \gamma(t)\gamma(t') &= 2D\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi(t)\gamma(t') &= \gamma(t)\xi(t') \\ &= \frac{\lambda\sqrt{\alpha D}}{\tau} \exp\left[-\frac{1}{\tau}|t-t'|\right] \\ &\rightarrow 2\lambda\sqrt{\alpha D}, \tau \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10472091, 10332030)和陕西省自然科学基金(批准号:2003A03)资助的课题.

† E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

其中 α 和 D 分别为乘性噪声强度和加性噪声强度, λ ($|\lambda| \leq 1$) 为噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的互关联强度 (由于 $-\lambda$ 和 λ 的情况是对称的, 以下只考虑 $\lambda > 0$ 的情况), τ 为白噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的互关联时间.

根据式(2), 当 $-2\sqrt{3}/9 < r < 2\sqrt{3}/9$ 时, 系统具有两个稳定点和一个不稳定点, 它们分别为

$$\begin{aligned} x_{s1} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) - \frac{\pi}{3}\right), \\ x_{s2} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right)\right), \\ x_{un} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

这里 x_{s1} 和 x_{s2} 代表稳定点, x_{un} 代表不稳定点.

应用统一色噪声近似, 可导出方程(1)–(5)对应的近似 Fokker-Planck 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -U'(x) + D \left(Rx + \frac{\lambda\sqrt{R}}{1 + \alpha(\tau)} \right) \right\} \\ &\times \rho(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &\times \left\{ Rx^2 + \frac{2\lambda\sqrt{R}}{1 + \alpha(\tau)}x + 1 \right\} \rho(x, t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $R = \alpha/D$ 表示乘性噪声强度和加性噪声强度的比值, 当 $x \leq x_{un}$ 时 $\alpha(\tau) = (3x_{s1}^2 - 1)\tau$, 当 $x \geq x_{un}$ 时 $\alpha(\tau) = (3x_{s2}^2 - 1)\tau$. $\rho_i(x, \lambda, r)$ 满足下列的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -U'(x) + D \left(Rx + \frac{\lambda\sqrt{R}}{1 + c_i(\tau)} \right) \right\} \\ &\times \rho_i(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &\times \left\{ Rx^2 + \frac{2\lambda\sqrt{R}}{1 + c_i(\tau)}x + 1 \right\} \rho_i(x, t), \\ &i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $c_1(\tau) = (3x_{s1}^2 - 1)\tau$, $c_2(\tau) = (3x_{s2}^2 - 1)\tau$. 方程(8)的稳态概率密度函数为

$$\begin{aligned} \rho_i(x, \lambda, r) &= \frac{N_i}{\sqrt{Rx^2 + \frac{2\lambda\sqrt{R}}{1 + c_i(\tau)}x + 1}} \\ &\times \exp\left[-\frac{\tilde{U}_i(x, \lambda, r)}{D}\right] \\ &i = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

其中 N_1, N_2 为归一化常数, $\tilde{U}_i(x, \lambda, r)$ 为广义势函数.

方程(7)的近似稳态解为

$$\rho(x, \lambda, r) = \begin{cases} a\rho_1(x, \lambda, r), & x \leq x_{un}; \\ b\rho_2(x, \lambda, r), & x > x_{un}. \end{cases} \quad (10)$$

其中 a, b 满足 $a\rho_1(x_{un}, \lambda, r) = b\rho_2(x_{un}, \lambda, r)$, 且保证了 $\rho(x, \lambda, r)$ 的归一化. 此时广义势函数为

$$\tilde{U}(x, \lambda, r) = \begin{cases} \tilde{U}_1(x, \lambda, r), & x \leq x_{un}; \\ \tilde{U}_2(x, \lambda, r) + d, & x > x_{un}. \end{cases} \quad (11)$$

其中 d 满足 $d = \tilde{U}_1(x_{un}, \lambda, r) - \tilde{U}_2(x_{un}, \lambda, r)$,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i(x, \lambda, r) &= \frac{x^2}{2R} - \frac{2\theta x}{R\sqrt{R}} - \frac{R + (1 - 4\theta^2)}{2R^2} \\ &\times \ln(Rx^2 + 2\theta\sqrt{R}x + 1) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{R}(1 - \theta^2)} \left[r + \frac{\theta}{\sqrt{R}} + \frac{\theta(3 - 4\theta^2)}{R\sqrt{R}} \right] \\ &\times \tan^{-1} \left(\frac{\theta + \sqrt{R}x}{\sqrt{1 - \theta^2}} \right), \\ &i = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

其中当 $x \leq x_{un}$ 时 $\theta = \lambda[1 + (3x_{s1}^2 - 1)\tau]$, 当 $x > x_{un}$ 时 $\theta = \lambda[1 + (3x_{s2}^2 - 1)\tau]$.

利用 MFPT 的定义和最速下降方法^[22], 可得粒子由 x_{s1} 所在的势阱跃迁到 x_{s2} 所在的势阱的 MFPT 为

$$\begin{aligned} T &= 2\pi |(-1 + 3x_{s1}^2)(-1 + 3x_{s2}^2)|^{-1/2} \\ &\times \exp\left\{ \frac{1}{D} [\tilde{U}(x_{un}, \lambda, r) - \tilde{U}(x_{s1}, \lambda, r)] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\tilde{U}(x, \lambda, r)$ 和 x_{s1}, x_{s2}, x_{un} 分别同上述方程(11)和(6)定义.

3. 讨论与结论

根据 MFPT 的表达式(13), 讨论乘性噪声强度 α 、加性噪声强度 D 、互关联强度 λ 、相关时间 τ 和势阱的非对称性 r 对 MFPT 的影响.

在图1和图2中, 考虑了平均首次穿越时间 T 作为噪声强度的函数随着势阱非对称性 r 的变化情况. 在图1中, 固定参数 α, τ 和 λ 的值, T 曲线随着 r 的增加而增加. 当 $r \geq 0$ 时, T 曲线随着 D 的增加而单调的减小; 当 $r < 0$ 时, T 曲线随着 D 的增加而增大. 在图2中, 固定参数 D, τ 和 λ 的值, T 曲线随着 α 的增加而单调的减小, 同时随着 r 的增加而增加. 因此, 由图可见当 $r \geq 0$ 时, 加性噪声强度 D 和乘性噪声强度 α 对 T 的影响是一致的; 当 $r < 0$ 时, 加性噪声强度 D 和乘性噪声强度 α 对 T 的影响是不同的.

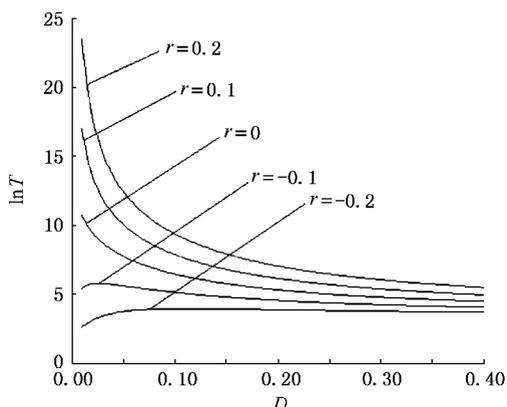


图 1 T 作为加性噪声强度 D 的函数随 r 变化的曲线 ($\alpha = 0.4, \tau = 0.1, \lambda = 0.8$)

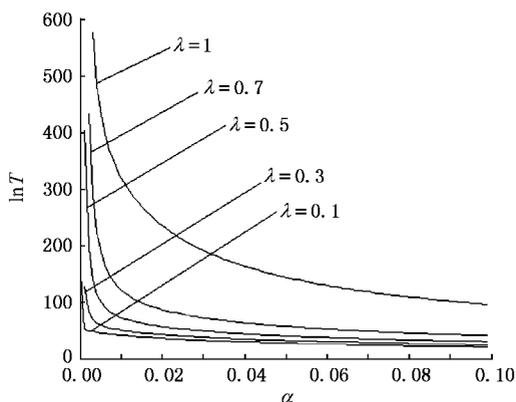


图 4 T 作为乘性噪声强度 α 的函数随 λ 变化的曲线 ($D = 0.01, \tau = 0.1, r = 0.2$)

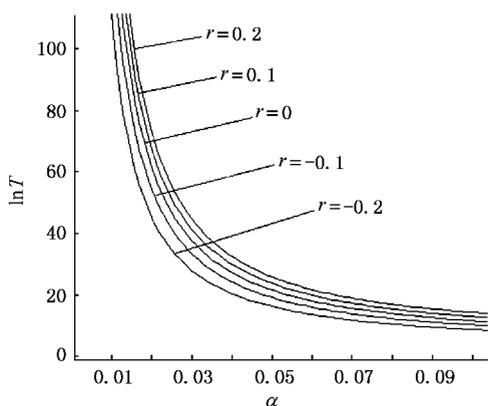


图 2 T 作为乘性噪声强度 α 的函数随 r 变化的曲线 ($D = 0.2, \tau = 0.1, \lambda = 0.8$)

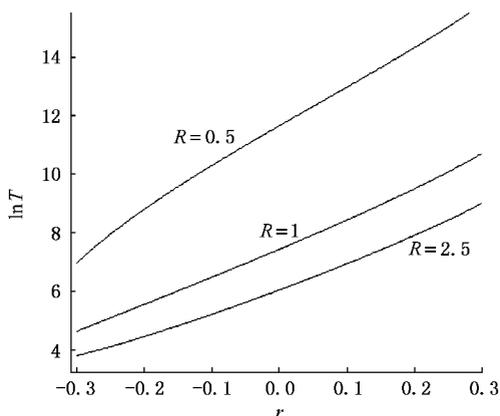


图 5 T 作为势阱非对称性 r 的函数随 $R = \alpha/D$ 变化的曲线 ($\tau = 0.1, \lambda = 0.8$)

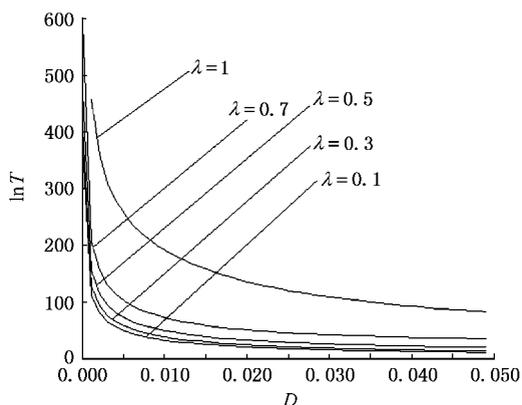


图 3 T 作为加性噪声强度 D 的函数随 λ 变化的曲线 ($\alpha = 0.03, \tau = 0.1, r = 0.2$)

值,在图 4 中固定参数 D, τ 和 r 值,在图 3 和图 4 中 T 分别随着 D 和 α 的增加而减小同时随着 λ 的增加

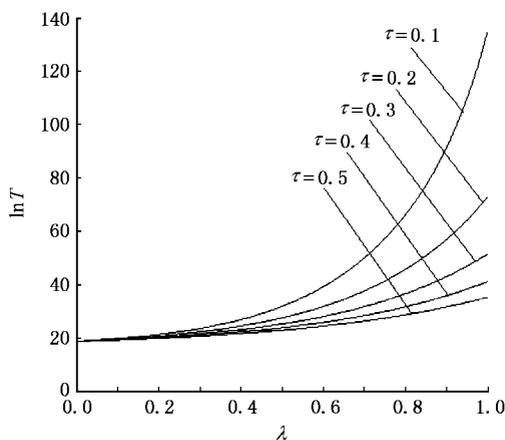


图 6 T 作为相关强度 λ 的函数随相关时间 τ 变化的曲线 ($D = 0.02, \alpha = 0.03, r = 0.2$)

在图 3 和图 4 中,考虑了平均首次穿越时间 T 作为噪声强度的函数随着乘性和加性噪声的互关联强度 λ 的变化情况.在图 3 中固定参数 α, τ 和 r 的

而增大.因此,由图可见当 λ 由 0.1 变化到 1 时,加性噪声强度 D 和乘性噪声强度 α 对 T 的影响是一致的.

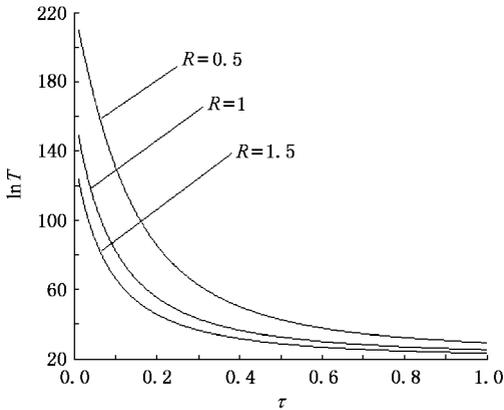


图 7 T 作为相关时间 τ 的函数随 $R = \alpha/D$ 变化的曲线 ($\lambda = 0.8$, $r = 0.2$)

在图 5 中,考虑了平均首次穿越时间 T 作为势

阱非对称性 r 的函数在 $R = 0.5 (< 1)$, $R = 1$ 和 $R = 2.5 (> 1)$ 三种情况下的变化.在图中,固定参数 τ 和 λ , T 随着 r 的增加而单调的增大同时随着 R 的增大而减小.因此,由图可见在乘性噪声强度和加性噪声强度的比率 R 小于 1,等于 1 和大于 1 三种情况下,势阱非对称性 r 对 T 的影响是一致的.

在图 6 和图 7 中,考虑了噪声之间的互关联强度 λ 和互关联时间 τ 对 T 的影响.在图 6 中,固定参数 D , α 和 r ,考虑 T 作为 λ 的函数随 τ 的变化情况.当 τ 从 0.1 变化到 0.5 时, T 随着 λ 的增加而单调的增加同时随着 τ 的增加而减小.在图 7 中,固定参数 λ 和 r ,考虑 T 作为 τ 的函数在乘性噪声强度和加性噪声强度的比率 $R = 0.5 (< 1)$, $R = 1$ 和 $R = 1.5 (> 1)$ 三种情况下的变化. T 随着 τ 的增加而单调的减小同时随着 R 的增大而减小.因此,由图可见 λ 的增加可以减小粒子的逃逸率,而 τ 的增加可以加快粒子的逃逸率.

- [1] Fox R F 1983 *Phys. Lett. A* **94** 281
- [2] Fulinski A, Telejko T 1991 *Phys. Lett. A* **152** 11
- [3] Jia Y, Zheng X P, Hu X M, Li J R 2001 *Phys. Rev. E* **63** 031107
- [4] Jia Y, Yu S N, Li J R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
- [5] Wang J, Cao L, Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **308** 23
- [6] Xie C W, Mei D C 2004 *Phys. Lett. A* **323** 421
- [7] Luo X Q, Zhu S Q 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
- [8] Liang G Y, Cao L, Wang J, Wu D J 2003 *Physica A* **327** 3042
- [9] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese) [张良英、曹力、吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]
- [10] Wang J, Cao L, Wu D J 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1416
- [11] Mei D C, Xie C W, Zhang L 2003 *Phys. Rev. E* **68** 051102
- [12] Liang G Y, Cao L, Zhang L, Wu D J 2003 *Chin. Phys.* **12** 1109
- [13] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys.* **12** 1208
- [14] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5764
- [15] Mei D C, Xie C W, Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3880
- [16] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 813
- [17] Jin Y F, Xu W 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **23** 275
- [18] Bulsara A R, Inchiosa M E, Gammaitoni L 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2162
- [19] Inchiosa M E, Bulsara A R, Gammaitoni L 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4049
- [20] Gammaitoni L, Bulsara A R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 230601
- [21] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese) [靳艳飞、徐伟、马少娟、李伟 2005 物理学报 **54** 3480]
- [22] Hu G 1991 *Phys. Rev. A* **43** 700

The mean first-passage time for an asymmetric bistable system driven by multiplicative and additive noise with colored correlations *

Ning Li-Juan^{1,2)} Xu Wei^{1)†} Yang Xiao-Li^{1,2)}

¹ *Department of Applied Mathematics ,Northwestern Polytechnical University ,Xi 'an 710072 ,China)*

² *College of Mathematics and Information Science ,Shaan Xi Normal University , Xi 'an 710062 ,China)*

(Received 5 April 2006 ; revised manuscript received 16 May 2006)

Abstract

In this paper ,the effects of colored correlations and asymmetry of the potential on the mean first-passage time(MFPT) are investigated for an asymmetric bistable system driven by multiplicative noise and additive noise . Numerical results show that the intensities of multiplicative and additive noises and the cross-correlation time τ affect the MFPT in the same way ,the coupling strength λ and asymmetry r of the potential affected the MFPT in the same way . The increase of τ enhances the escape rate ,while increase of λ reduces the escape rate .

Keywords : mean first-passage time , asymmetric bistable system , colored correlation , cross-correlation strength

PACC : 0540 , 0250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091 , 10332030) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province ,China (Grant No. 2003A03).

† E-mail : weixu@nwpu.edu.cn