

双稳随机共振参数特性的研究^{*}

冷永刚^{1)†} 王太勇¹⁾ 郭 焱²⁾ 吴振勇¹⁾

1) 天津大学机械工程学院, 天津 300072)

2) 天津大学管理学院, 天津 300027)

(2006 年 1 月 9 日收到, 2006 年 4 月 20 日收到修改稿)

以双稳系统为研究对象, 探讨了影响和产生双稳随机共振的参数选择特性. 双稳系统参数和二次采样频率参数有着内在的物理联系, 它们的改变都会引起势垒、势阱间距和粒子跃迁速率的改变, 并使噪声能量相对重新分配, 进而影响随机共振效果. 根据随机共振的参数选择规律, 可通过适当的参数选择来得到最佳的随机共振状态, 为后续数据处理奠定基础.

关键词: 随机共振, 双稳随机共振, 参数选择, 噪声

PACC: 0540, 0650

1. 引 言

1981 年 Benzi 等人^[1,2]在研究古气象冰川问题时提出了随机共振(SR)概念, 之后随机共振现象成为很多领域广泛的研究课题^[3]. 随机共振在信号处理方面的研究^[4-6], 特别是利用双稳随机共振研究弱信号的放大识别^[7-10]、传输还原^[11-12]等具有其独特的优势.

在实际信号处理过程中, 为了有效获取信息, 常常需要先得到数据的随机共振状态, 然后再对共振突出的信息进行有效的后续处理.

产生随机共振的常规方法一般是添加噪声^[1-8,13,14], 显然这种方法对于因噪声量不足而未达到随机共振的“欠共振”情况是有效的, 但对于超出随机共振合适的噪声量的“过共振”情况, 添加噪声无论如何是无济于事的. 此外, 根据信息论, 以添加噪声来获取有效信息的方法不是一种最佳的策略. 对于工程实际采集的信号, 由于不知道其噪声性质, 一般也不对其进行添加噪声的处理. 除了添加噪声方法外, 为实现随机共振, 文献^[12]和文献^[9-10]分别提出了参数调节法和二次采样法, 两种方法利用随机共振对信号的时域恢复和频域识别分别进行了讨论, 其共同点实际上是通过参数尺度的改变来对信号中的噪声进行相对重新分布调节, 以便达到

随机共振或类随机共振状态. 可以看出, 参数调节法和二次采样法比添加噪声方法更适合于实际应用, 是信息处理的一种有效的方法.

虽然参数调节法和二次采样法能够应用于实际信号的处理, 但在具体应用中, 二者都存在一个突出的问题, 就是很难确定参数的调整方向以尽快达到随机共振状态. 例如, 在参数调节的随机共振过程中, 两个可调的系统参数的值会相差很大, 可能会达到三个或四个数量级之差, 而且在确定系统参数时, 需要先根据信号的最高频率来得到系统的响应速度, 然后再根据系统响应速度与信噪比的关系选择确定系统参数, 这对于未知最高频率的实际信号的处理, 参数的确定有一定的困难. 在二次采样的随机共振过程中, 二次采样频率需要根据估计的噪声强度来确定, 而当噪声的估计存在较大的误差时, 二次采样频率的确定也会不准确, 且调整方向不确定.

为了能够正确地选择调节参数尽快实现随机共振, 本文将对双稳系统的两个参数和二次采样频率参数做进一步的深入分析, 掌握这些参数之间的内在关系, 从物理概念上来理解这些参数是如何对随机共振产生影响的, 从而更清楚方便地将其应用于工程实际.

2. 参数变化对双稳随机共振的影响

为简便起见, 令双稳势函数 $U(x) = -1/2ax^2 +$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 50675153, 50475117)、天津大学青年教师基金(批准号: 5110108)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn

$1/4bx^4$ 为产生双稳随机共振的非线性系统,其中 a 和 b 为系统参数.其输入信号为单频正弦信号 $A\sin(2\pi f_0 t)$ 和白噪声 $n(t)$,则对应的朗之万(Langevin)方程为

$$dx/dt = ax - bx^3 + A\sin(2\pi f_0 t) + n(t). \quad (1)$$

为易于比较,以一组产生双稳随机共振的数据

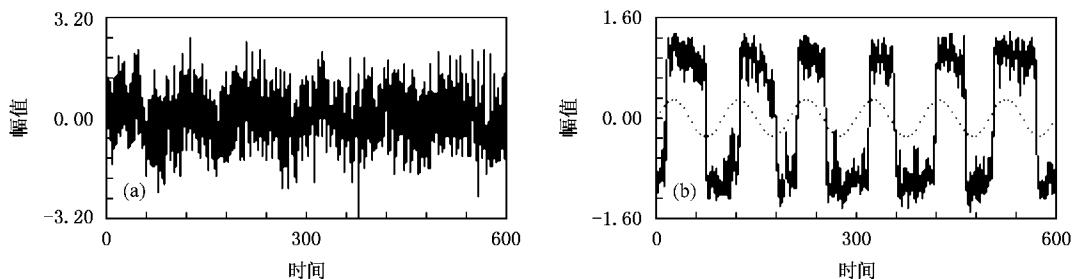


图1 基准参数的双稳随机共振 (a)系统输入波形 (b)系统输出波形(参数为 $a = b = 1$, $A = 0.3$, $f_0 = 0.01$, $D = 0.31$, $f_{sr} = f_s = 5$)

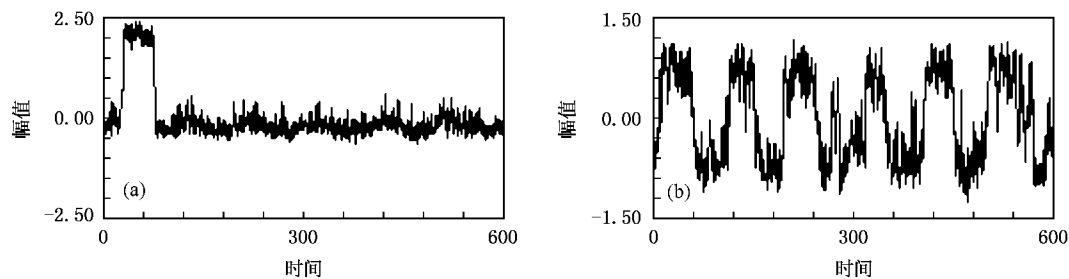


图2 保持图1其他参数不变 (a)增大 a 或减小 b 或增大 f_{sr} ,得到“欠共振”状态,如 $a = 1.4$ 或 $b = 0.5$ 或 $f_{sr} = 12$. (b)减小 a 或增大 b 或者减小 f_{sr} ,得到“过共振”状态,如 $a = 0.3$ 或 $b = 2.1$ 或 $f_{sr} = 3.4$

当系统参数 a 增大或 b 减小时,如 $a = 1.4$ 或 $b = 0.5$,或者当二次采样频率 f_{sr} (图1中二次采样频率与实际采样频率相等 $f_{sr} = f_s$)增大时,如 $f_{sr} = 12$,都得到图2(a)的类似波形结果,称之为“欠共振”状态,因为它与噪声量不足而未达到随机共振的状态相类似.

相反地,如果减小 a 或增大 b 或者减小 f_{sr} ,如 $a = 0.3$ 或 $b = 2.1$ 或 $f_{sr} = 3.4$,则都会使图1的随机共振效果弱化而得到图2(b)的类似波形结果,称之为“过共振”状态,因为它可以看成是噪声量过剩而“超出”随机共振的状态.

双稳系统参数 a 和 b 的改变,使得图1(b)随机共振状态变成了图2的“欠共振”或“过共振”状态,这一点可从双稳系统势垒 $\Delta U = a^2/4b$ 的变化得到解释.显然,增大 a 或减小 b 相当于提高了势垒 ΔU 的高度,势垒的增高打破了图1适合于噪声量的最

参数为基准,然后改变各参数来考察其对随机共振的影响.令系统参数 $a = b = 1$,正弦信号幅度和频率分别为 $A = 0.3$ 和 $f_0 = 0.01$,噪声强度 $D = 0.31$,数值计算步长 $\Delta t = 0.2$ 或采样频率 $f_s = 5$,方程(1)采用四阶 Runge-Kutta 法数值计算.根据文献[10]可知,这组参数可以产生双稳随机共振,如图1.

优势垒,导致噪声量相对减少,于是缺少的噪声能量无法诱导粒子越过势垒形成跃迁的随机共振,而只能形成“欠共振”的状态.而反过来,减小 a 或增大 b 降低了势垒的高度,降低的势垒同样打破了图1适合于噪声量的最优势垒,但它导致噪声量的相对过剩,于是一部分适合于低势垒的噪声引起粒子的跃迁产生随机共振,而另一部分多余的噪声则只能作为干扰叠加在粒子的跃迁运动中形成“过共振”的状态.

二次采样频率 f_{sr} 变化所产生的“欠共振”或“过共振”情况,可从双稳系统响应 \bar{x} 随噪声强度 D 变化的随机共振曲线^[3]图3来解释.图3表明,信号频率 f_0 增大,则随机共振曲线峰向右移.这意味着需要较大的噪声量才能在较高的频率处产生随机共振.反之, f_0 减小则需要较少的噪声量就能产生随机共振.当二次采样频率 f_{sr} 增大时,信号频率 f_0 对

二次采样频率 f_{sr} 重新归一化, 其归一化的信号频率 f_{0r} 必然也增大, 增大的信号频率需要较大的噪声量来实现随机共振, 而适合 f_0 产生随机共振的噪声量小于适合 f_{0r} 产生随机共振的噪声量. 因此 f_{sr} 的增大产生“欠共振”的状态. 同理, 对于二次采样频率 f_{sr} 的减小, 其归一化的信号频率 f_{0r} 也减小, 需要较少的噪声量就能在 f_{0r} 处产生随机共振. 因此 f_0 处较大的噪声量在 f_{0r} 处产生“过共振”状态.

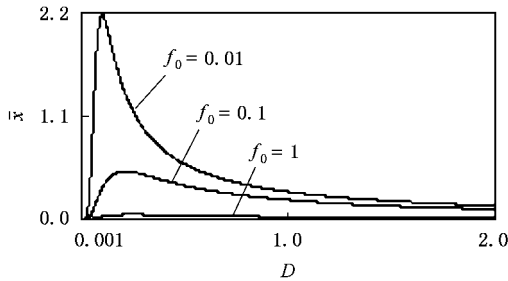


图3 双稳系统响应 x 随噪声强度 D 变化的随机共振现象 ($a = b = 1, A = 0.3$, 信号频率 f_0 分别取3个不同值 0.01, 0.1, 1)

从上述分析不难看出, 之所以系统参数 a 增大或 b 减小与二次采样频率 f_{sr} 增大具有相同的作用——产生“欠共振”的状态, 是因为这些参数的改变都使

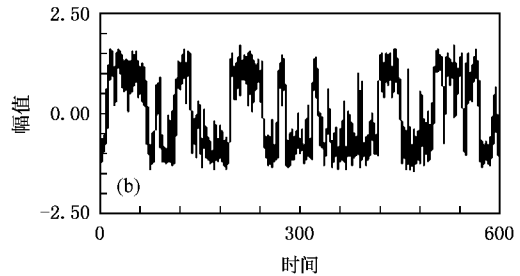
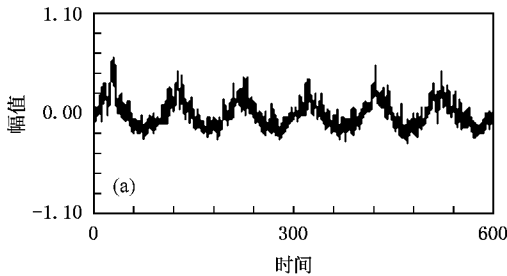


图4 噪声量不足 $D = 0.05$ 的“欠共振”状态 (a) 和噪声量过剩 $D = 0.9$ 的“过共振”状态 (b) (其他参数为 $a = b = 1, A = 0.3, f_0 = 0.01, f_{sr} = f_s = 5$)

根据上节分析, 对于图 4(a) “欠共振”状态, 可以减小 a 或增大 b 或减小 f_{sr} 来达到随机共振. 分别取合适的值 $a = 0.8$ 或 $b = 1.6$ 或 $f_{sr} = 2.2$ 时, 均产生类似图 1(b) 的随机共振状态, 其随机共振效果明显. 而对于图 4(b) 的“过共振”状态, 情况有所不同. 增大 a 或减小 b 或增大 f_{sr} , 即分别取比较合适的值 $a = 1.5$ 或 $b = 0.65$ 或 $f_{sr} = 10$ 时, 分别产生图 5(a), 图 5(b) 和图 5(c) 上半部分的随机共振波形, 其随机共振结果都不如图 1(b) 的效果好. 这里对应的下半图是用级联双稳系统^[15]对上半图进行了相应的波

噪声量相对减少, 而减小 a 或增大 b 与减小 f_{sr} 的作用则使噪声量相对增大, 导致“过共振”状态的产生. 因此, 改变系统参数与改变二次采样频率的共同点, 实际上都是通过参数尺度的变化来引起噪声量的相对重新分布, 使噪声量“不足”或“过剩”, 从而影响随机共振的效果.

3. 参数调节的双稳随机共振

根据系统参数与二次采样频率能够调节噪声分布的这一特性, 可以将其应用于实际信号处理, 使噪声中的信号产生随机共振.

利用参数调节来对实际数据进行随机共振处理时, 由于噪声量的不确定性或不易准确估计, 因此, 总是首先令双稳系统的两个参数都为 1, 二次采样频率等于实际采样频率. 这种情况下, 系统的响应结果一般不会正好达到随机共振的状态, 通常存在噪声量不足的“欠共振”或噪声量过剩的“过共振”两种情况. 不失一般性, 仍然以方程 (1) 为研究对象, 以图 1 的参数为基准. 设图 1 的其他参数保持不变, 噪声强度 $D = 0.05$ 产生“欠共振”状态, 如图 4(a), 而 $D = 0.9$ 产生“过共振”状态, 如图 4(b).

形整形, 以突出各图的共振波形轮廓, 方便比较.

图 5 随机共振效果不如图 1 好的原因可以这样理解. 根据图 3 双稳系统的响应曲线可知, 随着噪声的增大, 一方面随机共振峰右移, 另一方面随机共振峰的幅度会很快降低, 共振曲线会迅速变得扁平, 这意味着随机共振现象迅速弱化变得模糊, 这是由小参数的随机共振^[10]性质所决定的. 对于图 5, 由于其噪声 $D = 0.9$ 已偏大, 因此它的随机共振效果必然变差. 但是从图 5, 特别是它的级联效果, 仍然可以得到可识别的随机共振结果. 而且从图 5 的级联随

机共振结果来看,系统参数 b 调节的随机共振效果要比系统参数 a 调节的效果好,而二次采样参数 f_{sr} 的调节效果又好于系统参数 b 的调节效果。

4. 讨 论

以上分别单独对各个参数的变化调节进行了讨论,实际上,如果将这些参数联合起来进行改变调整,则也会得到同样的结果,这一点不难想象,因为各参数之间的调节作用可以互相配合弥补。比如对于图 5,如果取 $a = 0.4$ 和 $b = 0.09$ 以及 $f_{sr} = f_s = 5$ 时,即参数 a 不是增大而是减小,但参数 b 减得更小,两参数总体上仍然提高势垒,则可以近似得到图 5(c) 的随机共振效果;而如果取 $a = 0.7$ 和 $b = 0.2$ 以及 $f_{sr} = 4.7$ 时,即三个参数同时参与调节变化,则会得到图 5(b) 的效果。虽然可以有多种参数的组合形式来实现随机共振,但是从方便使用和明确的参数变化方向上考虑,应该优先考虑单个参数的调节。

系统参数 a 和 b 通过双稳系统势垒 $\Delta U = a^2/4b$ 可以对随机共振产生影响,然而事实上,系统参数 a 和 b 在调节势垒的同时还改变着双稳系统两个势阱之间的距离,进而也影响着随机共振的效果。如果仔细观察以上各图波形的振荡幅度,不难发现各图的振荡幅度大小是不一样的,而这种不同的共振幅度就与双稳系统两个势阱之间的距离有关。

对应方程(1)的确定性双稳系统方程的两个稳定的定态解为 $x_1 = -\sqrt{a/b}$ 和 $x_2 = \sqrt{a/b}$,分别对应两个势阱,一个不稳定的定态解是 $x_0 = 0$,对应势垒。由此得到双稳系统两个势阱之间的距离为

$$\Delta x = |x_2 - x_1| = 2\sqrt{a/b}. \quad (2)$$

比较势垒 ΔU 与势阱间的距离 Δx 可知,参数 a, b 分别变化所引起的势垒变化量和势阱间距离的变化量不成线性比例关系,换言之,如果分别调节 a, b 引起相等量的势垒变化,如 a 扩大 k 倍相当于 b 缩小 k^2 倍,那么由 a 引起势阱间距离的变化量 $\Delta x_1 = 2\sqrt{k}\sqrt{a/b}$ 与由 b 引起势阱间距离的变化量 $\Delta x_2 = 2k\sqrt{a/b}$ 不相等。当 $k > 1$ 时,势垒增高,势阱之间的距离增大,但参数 b 比 a 会产生更大的势阱间距离。当 $k < 1$ 时,势垒降低,势阱之间的距离缩小,但参数 b 反而比 a 会使势阱间的距离变得更短,如图 6。由于系统参数 a, b 调节造成了不相等的势阱间距,因此粒子在两势阱间的跃迁距离幅度也就不同,反映到系统的响应波形中就是有着不同的共振幅度差异,即产生不同的随机共振效果。反之,如果分别调节 a, b 引起相等量的势阱间距变化,则势垒的变化量就会不相同,当然其随机共振效果也就不同。事实上,参数 a 或/和 b 的改变同时影响着势垒 ΔU 与势阱间距 Δx ,为达到一个最佳的随机共振效果,应该对参数 a 或/和 b 进行细致的选择和协调平衡。通常情况下,一般得不到相同的(等幅度和同形状的)随机共振效果。

参数 a, b 除了对势垒 ΔU 和势阱间的距离 Δx 产生影响外,还对克莱默斯(Kramers)逃逸速率产生影响。逃逸速率的分析将有助于进一步深入理解系统参数 a, b 和二次采样频率 f_{sr} 之间的关系及其对随机共振的影响。克莱默斯逃逸速率表达式^[6]为

$$R = (2\pi)^{-1} \sqrt{U''(x_1)|U''(x_0)|} \exp(-\Delta U/D). \quad (3)$$

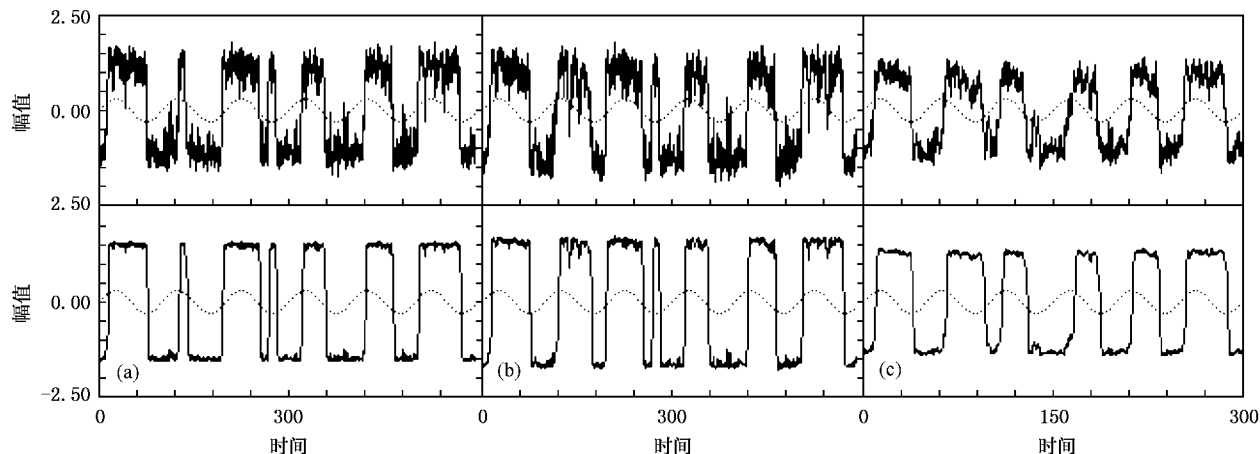


图 5 保持图 4 其他参数不变,对于“过共振”状态,取 $a = 1.5$ 或 $b = 0.65$ 或 $f_{sr} = 10$ 分别得到随机共振状态(a)(b)和(c)

上式势垒高度 ΔU 和噪声强度 D 是逃逸速率 R 的最敏感因素. 对于固定的噪声量 D 而言, 势垒 ΔU 对逃逸速率 R 起着决定性作用. 当系统响应处于“欠共振”状态时, 根据第 2 节的分析, 这种情况可看成信号频率相对太大, 可以认为系统响应跟不上信号的变化. 如果不采用减小二次采样频率 f_{sr} 的方法来相对减低信号频率, 使“欠共振”达到随机共振, 那么为了使系统输出能够跟上信号的快节奏变化, 即以信号频率产生跃迁的随机共振, 就必须让粒子在两势阱间的跃迁时间缩短, 即提高跃迁频率. 跃迁频率的提高就意味着逃逸速率 R 的增大. 由 (3) 式可知, R 增大必须降低势垒 ΔU 的高度, 而 ΔU 的减小也就是减小 a 或增大 b . 同理, 对于“过共振”状态, 过剩的噪声诱导粒子随机地过快地来回跃迁, 使得信号频率相对太小, 如果不采用增大二次采样频率 f_{sr} 的方法来相对提高信号频率, 使“过共振”达到随机共振, 那么为了消耗多余的噪声, 使其按照信号频率来诱导粒子的跃迁, 则必须延长噪声诱导粒子的

跃迁时间, 即降低跃迁频率. 跃迁频率的降低就是逃逸速率 R 的降低, R 的减小必须使 ΔU 增大, 增大 ΔU 就是增大 a 或减小 b . 由此可见, 系统参数 a, b 的调节作用与二次采样频率 f_{sr} 的调节作用在这里进一步得到了统一, 即要想改善“欠共振”, 要么减小 f_{sr} , 要么减小 a 或增大 b , 而要想改善“过共振”, 则要么增大 f_{sr} , 要么增大 a 或减小 b .

另外, 根据 (2) 式和 (3) 式可知, 跃迁(逃逸)率 R 和势阱间的距离 Δx 都与系统参数 a 和 b 有关系. 当势阱宽度 Δx 变化时, 意味着系统参数 a 或 b 发生了变化, 而这两个参数的变化必然影响跃迁(逃逸)率 R , 使跃迁率 R 改变. 具体情况是, 当势阱宽度 Δx 增大时, 表明参数 a 增大或参数 b 减小, 这导致势垒 ΔU 增高(当然 a 比 b 引起更大的势垒变化), 势垒 ΔU 增高又使得跃迁率 R 降低. 因此, 势阱宽度 Δx 增大将引起跃迁率 R 减小. 同理, 减小势阱宽度 Δx 会引起跃迁率 R 的增大.

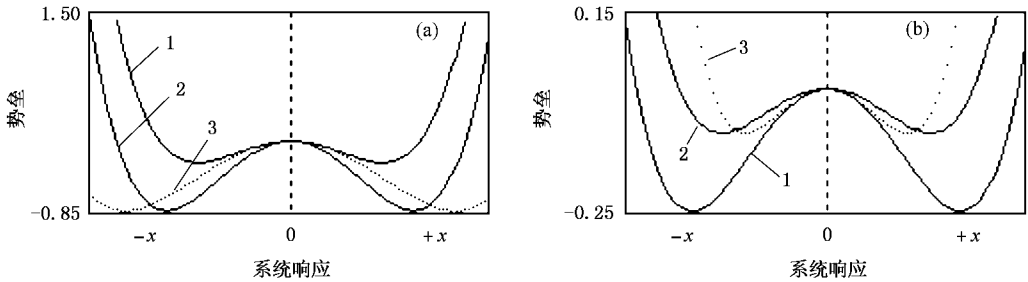


图 6 分别调节 a, b 引起相等量的势垒变化, 但势阱间距离的变化量不相等 (a) 当 $k > 1$ 时, 曲线 1: $a = b = 1$, 曲线 2 使 $a = 1.8$, 曲线 3 使 $b = 1/3.24$, b 产生更大的势阱间距离 (b) 当 $k < 1$ 时, 曲线 1: $a = b = 1$, 曲线 2 使 $a = 0.6$, 曲线 3 使 $b = 1/0.36$, b 产生更小的势阱间距离

5. 结 论

双稳系统的两个系统参数 a, b 和二次采样频率参数 f_{sr} 都可对双稳随机共振产生影响, 即当 a 增大或 b 减小或 f_{sr} 增大时, 都可使随机共振状态转变为“欠共振”的状态, 而减小 a 或增大 b 或减小 f_{sr} , 则会导致“过共振”状态的产生. 其原因在于, 这三个参

数的改变都会引起势垒、势阱间距和粒子跃迁速率的改变, 并使噪声能量相对地重新分配, 形成噪声量相对“不足”或“过剩”, 进而影响随机共振效果.

双稳随机共振参数特性的研究将有助于实际信号的分析, 根据信号的基本特征可清晰地确定参数的变化方向(增大或减小), 因此可尽快地选择适当的系统参数或二次采样参数, 使信号达到随机共振状态, 为信号的后续数据处理奠定基础.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *Phys. A* **14** 1453
 [2] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiana A 1982 *Tellus* **34** 11
 [3] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod.*

Phys. **70** 223

- [4] Xu W, Jin Y F, Li W, Ma S J 2005 *Chin. Phys.* **14** 1077
 [5] Chapeau-Blondeau F 2000 *Phys. Rev. E* **61** 940

- [6] Galdi V , Pierro V , Pinto IM 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6470
- [7] Zhu H J , Li R , Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [8] Li H G , Meng G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2069 (in Chinese) [李鸿光、孟 光 2004 物理学报 **53** 2069]
- [9] Leng Y G , Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2432 (in Chinese) [冷永刚、王太勇 2003 物理学报 **52** 2432]
- [10] Leng Y G , Wang T Y , Qin X D *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 717 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、秦旭达等 2004 物理学报 **53** 717]
- [11] Hauptmann C , Kaiser F , Eichwald C 1999 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9** 1159
- [12] Xu B H , Duan F B , Bao R H *et al* 2002 *Chaos , Solitons & Fractals* **13** 633
- [13] Harmer G P , Davis B R , Abbott D 2002 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **51** 299
- [14] Kosko B , Mitaim S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 051110
- [15] Leng Y G , Wang T Y , Guo Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1118 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、郭 焱等 2005 物理学报 **54** 1118]
- [16] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Science & Technology Education Press) p131 (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统 (上海 : 上海科学教育出版社) 131]

Study of the property of the parameters of bistable stochastic resonance *

Leng Yong-Gang^{1)†} Wang Tai-Yong¹⁾ , Guo Yan²⁾ Wu Zhen-Yong¹⁾

1 *✉ School of Mechanical Engineering , Tianjin University , Tianjin 300072 , China*

2 *✉ Management School , Tianjin University , Tianjin 300072 , China*

(Received 9 January 2006 ; revised manuscript received 20 April 2006)

Abstract

Taking a bistable system as a research object , the strategy of choosing parameters for affecting and producing stochastic resonance (SR) is investigated . The system parameters of the bistable system and the frequency parameter of twice sampling are related to each other intrinsically . Their variation can cause changes in the height of the potential barrier , the distance of the potential wells and the transition speed of the particle , causing redistribution of the relative noise energy and leading to different stochastic resonance effects . According to the regularity of the parameter choice for the stochastic resonance , the optimal stochastic resonance can be obtained by choosing these parameters properly , which lays the foundation for further data processing .

Keywords : stochastic resonance , bistable stochastic resonance , parameter choice , noise

PACC : 0540 , 0650

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 50675153 and 50475117) and the Youth Teacher Foundation of Tianjin University (Grant No. 5110108) .

† Corresponding author. E-mail : leng_yg@tju.edu.cn