

不确定混沌系统的参数识别与同步控制器的 backstepping 设计^{*}

吕 翎^{1)†} 郭治安²⁾ 李 岩¹⁾ 夏晓岚¹⁾

1) (辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

2) (大连交通大学数理系, 大连 116028)

(2006 年 5 月 16 日收到 2006 年 5 月 31 日收到修改稿)

设计了一种参数观测器,对不确定 Rossler 系统中的未知参数进行了识别,采用 backstepping 方法实现了异结构不确定 Rossler 系统和 Coullet 系统之间的混沌同步.根据稳定性原理,确定了同步控制器的结构和控制增益的取值范围.仿真模拟结果表明,在参数观测器和 backstepping 控制器的共同作用下,Coullet 系统所有的状态变量严格地跟踪了不确定 Rossler 系统的混沌轨迹,从而证明了该观测器和控制器的有效性.

关键词:混沌同步,参数识别,backstepping 控制器

PACC:0545

1. 引 言

混沌同步问题以其理论研究的前沿性以及实际应用的广泛性受到极大关注.自 Pecora 和 Carroll 提出了一种混沌同步方法实现两个同结构混沌系统的恒等同步以来^[1],许多混沌同步的方法和技术已被介绍,如驱动响应法,变量耦合法,自适应法,变量反馈法等^[2-16].然而,对于参数未知的不确定混沌系统,上述同步控制方法失效.而参数未知的不确定混沌系统的同步问题更具有实际意义.为此,Park 提出了参数未知的不确定混沌系统的自适应同步方法,并用以实现了超 Chen 系统的同步控制^[17];Elabbasy 等完成了不确定 Lü 系统的自适应同步^[18];Kim 等利用自适应法达到了 Duffing 等系统的自适应同步^[19];但是,上述研究均是针对同结构混沌系统的同步控制而设计的,由于同结构的两个混沌系统拥有相同的非线性函数,仅仅是两系统的初始条件不同,所以实现起来相对容易.并且在实际的物理、自动控制以及信息通信等系统中,两个完全相同的系统是很难找到的,所以,研究异结构不确定混沌系统的同步控制问题越来越显现出它的重要性. Rossler 系统和 Coullet 系统是两个异结构混沌系统,它们拥有的非线性函数差异很大,相图的形状与类型也极其不同.

本文以不确定 Rossler 系统作为目标系统,Coullet 系统作为响应系统,设计了一种参数观测器,对不确定 Rossler 系统中的未知参数进行了识别,采用 backstepping 方法实现了异结构不确定 Rossler 系统和 Coullet 系统之间的混沌同步.根据稳定性原理,确定了同步控制器的结构和控制增益的取值范围,仿真模拟结果表明,在参数观测器和 backstepping 控制器的共同作用下,Coullet 系统所有的状态变量严格地跟踪了不确定 Rossler 系统的混沌轨迹,从而证明了该观测器和控制器的有效性.

2. 观测器的设计

Rossler 混沌系统作为目标系统由下列动力学方程描述^[20]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -y_1 - z_1, \\ \dot{y}_1 &= x_1 + a_1 y_1, \\ \dot{z}_1 &= b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1.\end{aligned}\quad (1)$$

响应系统为 Coullet 混沌系统^[21]

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a z_2 + b y_2 + c x_2 - x_2^3,\end{aligned}\quad (2)$$

其中参数 $a_1 = 0.2, b_1 = 0.2, c_1 = 5.7, a = -0.45, b$

^{*} 国家自然科学基金(批准号 20373021)和辽宁省自然科学基金(批准号 20052151)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

$= -1.1, c = 0.8$ 时,两系统处于混沌态.

假设目标系统(1)是参数未知的不确定混沌系统,其中的参数 a_1, b_1, c_1 未知,为了实现该系统与 Coulllet 系统的混沌同步,首先设计一个观测器确定 Rossler 系统的未知参数.为此,设 $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1$ 是参数 a_1, b_1, c_1 的待观测量,设计观测器的结构为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{a}}_1 &= -\frac{dQ(y_1)}{dy_1}y_1(a_1 - \bar{a}_1), \\ \dot{\bar{b}}_1 &= -\frac{dS(z_1)}{dz_1}(b_1 - \bar{b}_1), \\ \dot{\bar{c}}_1 &= -\frac{dR(z_1)}{dz_1}z_1(c_1 - \bar{c}_1),\end{aligned}\quad (3)$$

其中 $Q(y_1), S(z_1), R(z_1)$ 为待定的增益调制函数.

将(1)式的第二和第三个方程变形

$$\begin{aligned}a_1 y_1 &= \dot{y}_1 - x_1, \\ b_1 &= \dot{z}_1 - x_1 z_1 + c_1 z_1, \\ c_1 z_1 &= -\dot{z}_1 + b_1 + x_1 z_1,\end{aligned}$$

代入(3)式,并考虑到 $\dot{a}_1 = \dot{b}_1 = \dot{c}_1 = 0$,可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\bar{a}}_1 &= -\frac{dQ(y_1)}{dy_1}(\dot{y}_1 - x_1) + \frac{dQ(y_1)}{dy_1}y_1\bar{a}_1, \\ \dot{\bar{b}}_1 &= -\frac{dS(z_1)}{dz_1}(\dot{z}_1 - x_1 z_1 + c_1 z_1) + \frac{dS(z_1)}{dz_1}\bar{b}_1, \\ \dot{\bar{c}}_1 &= -\frac{dR(z_1)}{dz_1}(-\dot{z}_1 + b_1 + x_1 z_1) - \frac{dR(z_1)}{dz_1}z_1\bar{c}_1.\end{aligned}\quad (4)$$

由于观测器中含有状态变量 y_1, z_1 的导数,在实际中难以观测,故引入辅助函数

$$\begin{aligned}u &= \bar{a}_1 + Q(y_1), \\ w &= \bar{b}_1 + S(z_1), \\ v &= \bar{c}_1 + R(z_1).\end{aligned}\quad (5)$$

由方程(4)和(5),得

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{\bar{a}}_1 + \dot{Q}(y_1) \\ &= \frac{dQ(y_1)}{dy_1}(x_1 + y_1 u - y_1 Q(y_1)), \\ \dot{w} &= \dot{\bar{b}}_1 + \dot{S}(z_1) \\ &= \frac{dS(z_1)}{dz_1}(x_1 z_1 - c_1 z_1 + w - S(z_1)), \\ \dot{v} &= \dot{\bar{c}}_1 + \dot{R}(z_1) \\ &= \frac{dR(z_1)}{dz_1}(b_1 + x_1 z_1 - z_1 v + Z_1 R(z_1)).\end{aligned}\quad (6)$$

选择增益调制函数 $Q(y_1), S(z_1), R(z_1)$ 的具体形

式为

$$\begin{aligned}Q(y_1) &= -\frac{1}{2}g_1 y_1^2 \\ S(z_1) &= -\frac{1}{3}g_2 z_1^3, \\ R(z_1) &= \frac{1}{2}g_3 z_1^2,\end{aligned}\quad (7)$$

其中系数 g_1, g_2, g_3 满足 $g_1 > 0, g_2 > 0, g_3 > 0$.

定义误差

$$\begin{aligned}e_a &= a_1 - \bar{a}_1, \\ e_b &= b_1 - \bar{b}_1, \\ e_c &= c_1 - \bar{c}_1,\end{aligned}\quad (8)$$

则

$$\begin{aligned}\dot{e}_a &= \dot{a}_1 - \dot{\bar{a}}_1 = -g_1 y_1^2 e_a, \\ \dot{e}_b &= \dot{b}_1 - \dot{\bar{b}}_1 = -g_2 z_1^2 e_b, \\ \dot{e}_c &= \dot{c}_1 - \dot{\bar{c}}_1 = -g_3 z_1^2 e_c.\end{aligned}\quad (9)$$

容易看出,当 $t \rightarrow \infty$ 时,(9)式对所有的状态变量 y_1, z_1 均以指数形式渐进稳定,即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\bar{a}_1$ 以指数率趋于 a_1 , $\bar{b}_1$ 以指数率趋于 b_1 , $\bar{c}_1$ 以指数率趋于 c_1 .从而使系统(1)的参数全部得到确定.此时,根据(5),(6),(7)和(8)式,观测器的结构变为

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= u + \frac{1}{2}g_1 y_1^2, \\ \bar{b}_1 &= w + \frac{1}{3}g_2 z_1^3, \\ \bar{c}_1 &= v - \frac{1}{2}g_3 z_1^2,\end{aligned}\quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -g_1 y_1 \left(x_1 + y_1 u + \frac{1}{2}g_1 y_1^3 \right), \\ \dot{w} &= -g_2 z_1^2 \left[x_1 z_1 - \left(e_c + v - \frac{1}{2}g_3 z_1^2 \right) z_1 \right. \\ &\quad \left. + w + \frac{1}{3}g_2 z_1^3 \right], \\ \dot{v} &= g_3 z_1 \left(e_b + w + \frac{1}{3}g_2 z_1^3 + x_1 z_1 \right. \\ &\quad \left. - z_1 v + \frac{1}{2}g_3 z_1^3 \right).\end{aligned}$$

3. backstepping 控制器

设目标系统状态变量信号中 x_1 容易提取,将同步控制器加在响应系统(2)的第三个方程中,则(2)式变为

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= az_2 + by_2 + cx_2 - x_2^3 + U(t).\end{aligned}\quad (11)$$

定义误差变量

$$e_1 = x_2 - x_1, \quad (12)$$

由(1)式和(11)式可得

$$\dot{e}_1 = y_2 + y_1 + z_1 = y_2 - r_1. \quad (13)$$

上式中 $r_1 = -(y_1 + z_1)$.

继续对 e_1 求二阶导数,

$$\begin{aligned}\ddot{e}_1 &= z_2 + x_1 + a_1 y_1 + b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1 \\ &= z_2 - r_2,\end{aligned}\quad (14)$$

其中

$$r_2 = -(x_1 + a_1 y_1 + b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1).$$

对 e_1 再次求三阶导数,得到下列表达式:

$$\begin{aligned}\dddot{e}_1 &= az_2 + by_2 + cx_2 - x_2^3 + U(t) \\ &\quad - y_1 - z_1 + a_1(x_1 + a_1 y_1) \\ &\quad + x_1(b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1) \\ &\quad - z_1(y_1 + z_1) - c_1(b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1) \\ &= a(\ddot{e}_1 - x_1 - a_1 y_1 - b_1 - x_1 z_1 + c_1 z_1) \\ &\quad + b(\dot{e}_1 - y_1 - z_1) + c(e_1 + x_1) \\ &\quad - (e_1 + x_1)^3 + U(t) \\ &\quad - y_1 - z_1 + a_1(x_1 + a_1 y_1) \\ &\quad + x_1(b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1) \\ &\quad - z_1(y_1 + z_1) - c_1(b_1 + x_1 z_1 - c_1 z_1) \\ &= a\ddot{e}_1 + b\dot{e}_1 + ce_1 + U(t) \\ &\quad + f(x_1, y_1, z_1),\end{aligned}\quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned}&f(x_1, y_1, z_1) \\ &= (-a + c + b_1 + a_1)x_1 \\ &\quad + (-aa_1 - b_1 + a_1^2 - 1)y_1 \\ &\quad + (ac_1 - b - 1 - c_1^2)z_1 \\ &\quad - (a + 2c)z_1 x_1 - ab_1 - b_1 c_1 \\ &\quad - (e_1 + x_1)^3 + x_1^2 z_1 - y_1 z_1 - z_1^2.\end{aligned}\quad (16)$$

容易看出,(15)式等价于

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \\ \dot{e}_3 &= ae_3 + be_2 + ce_1 + U(t) + f(x_1, y_1, z_1).\end{aligned}\quad (17)$$

当同步控制器设计为

$$U(t) = -f(x_1, y_1, z_1) + k_3 e_3 + k_2 e_2 + k_1 e_1, \quad (18)$$

k_1, k_2, k_3 为控制增益,误差方程可以写成

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \\ \dot{e}_3 &= (c + k_1)e_1 + (b + k_2)e_2 + (a + k_3)e_3.\end{aligned}\quad (19)$$

误差变量的本征值方程为

$$\lambda^3 - (a + k_3)\lambda^2 - (b + k_2)\lambda - (c + k_1) = 0. \quad (20)$$

根据稳定性原理^[22],当控制增益 k_1, k_2, k_3 的取值满足

$$\begin{aligned}-(a + k_3) &> 0, \\ -(c + k_1) &> 0, \\ (a + k_3)(b + k_2) + (c + k_1) &> 0,\end{aligned}\quad (21)$$

所有的本征值将具有负的实部,这便使受控系统(11)跟踪了混沌系统(1)的混沌轨迹,从而达到两个混沌系统的同步.此时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad (22)$$

因此,当观测器和控制器的结构分别满足(10)和(18)式时,不确定 Rossler 系统与 Couillet 系统达到混沌同步.

4. 仿真模拟

同步仿真模拟时,目标系统和响应系统的初值分别取 $x_1(0) = -6, y_1(0) = 5, z_1(0) = -10, x_2(0) = -0.1, y_2(0) = 0.1, z_2(0) = 0.5$,由于 Rossler 系统和 Couillet 系统是两个异结构混沌系统,Rossler 系统的轨道在相图中构成单螺旋混沌吸引子,而 Couillet 系统则构成双螺旋混沌吸引子(如图 1 所示),所以未进行同步控制时,它们的轨道毫不相干.

当观测器中增益调制函数的系数取 $g_1 = 3, g_2 = 6, g_3 = 3$,控制器中同步控制增益 $k_1 = -1, k_2 = k_3 = 0$ 时,采用设计的观测器和控制器(10)和(18)得到目标系统(1)的参数识别过程如图 2 所示;目标系统和响应系统的同步过程如图 3 所示;两系统状态变量的误差曲线如图 4 所示.由图 2 可以看出,当时间序列接近 0.15s, 0.33s 和 0.1s 时,参数 a_1, b_1, c_1 的值分别稳定在 0.2, 0.2 和 5.7,表明利用本文设计的参数观测器可以识别出目标系统的未知参数.图 3 表明在时间序列接近 40s 时,响应系统中所有的状态变量严格地跟踪了不确定 Rossler 系统的混沌轨迹,并且图 4 中各误差信号平稳地趋于零.

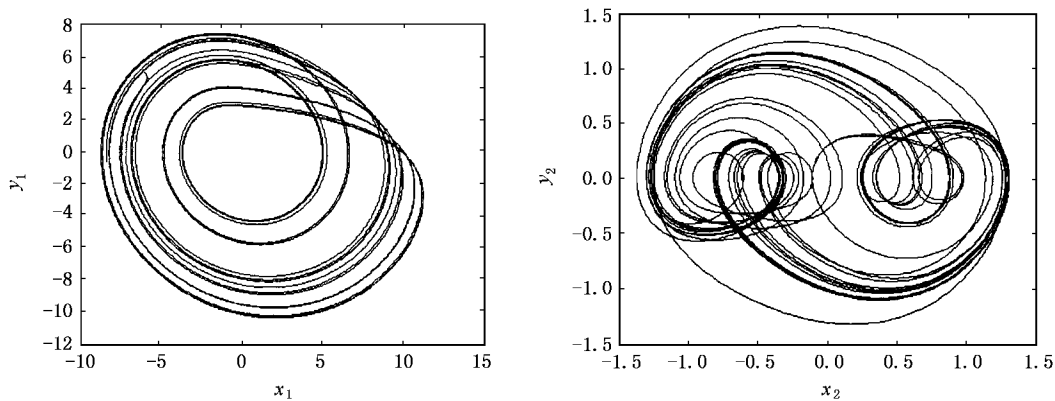


图 1 系统(1)和(2)的相图

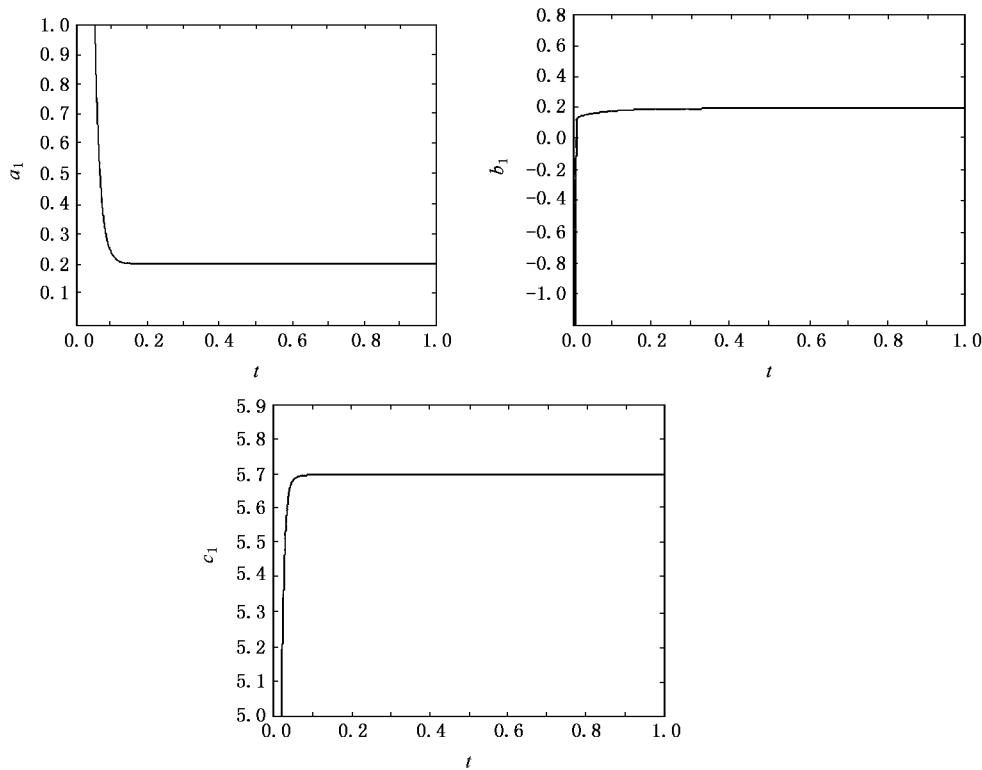


图 2 系统(1)的参数识别过程

5. 结 论

本文以不确定 Rossler 系统作为目标系统, Couillet 系统作为响应系统,设计了一种参数观测器,对不确定 Rossler 系统中的未知参数进行了识别,采用 backstepping 方法实现了异结构不确定 Rossler 系

统和 Couillet 系统之间的混沌同步. 识别参数 a_1, b_1, c_1 时,通过设计参数观测器(10)式,使参数 a_1, b_1, c_1 的待观测量以指数率趋于实际值 0.2,0.2 和 5.7;同时,在 backstepping 控制器的作用下, Couillet 系统所有的状态变量严格地跟踪了不确定 Rossler 系统的混沌轨迹.

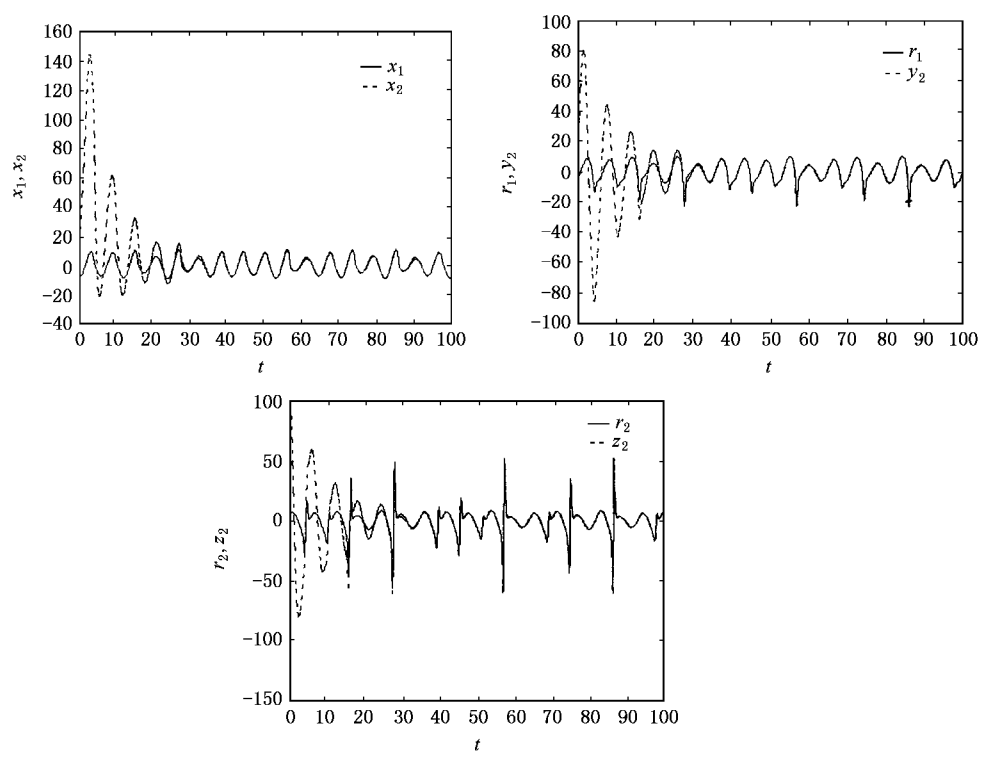


图 3 目标系统和响应系统的同步过程

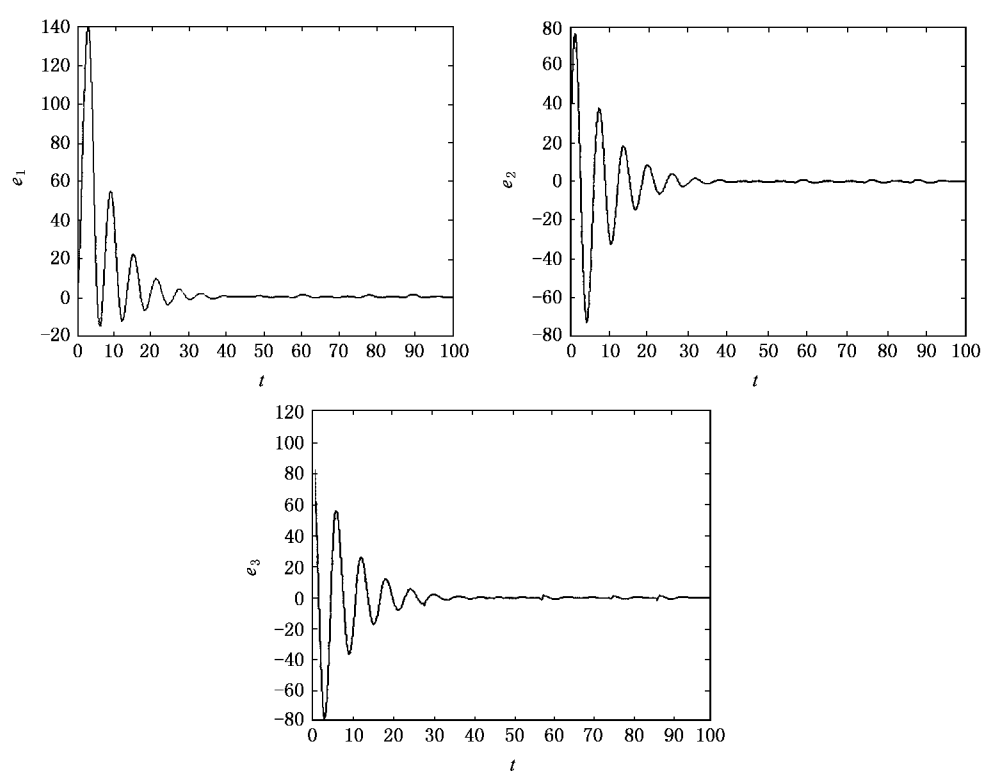


图 4 目标系统和响应系统状态变量的误差曲线

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Awad E G 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 345
- [3] Lu J G 2006 *Chin. Phys.* **15** 83
- [4] Tao C H, Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5058 (in Chinese) [陶朝海、陆君安 2005 物理学报 **54** 5058]
- [5] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁、刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]
- [6] Ma J, Liao G H, Mo X H, Li W X, Zhang P W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5585 (in Chinese) [马 军、廖高华、莫晓华、李维学、张平伟 2005 物理学报 **54** 5585]
- [7] Wang Y W, Guan Z H, Wang H O 2005 *Phys. Lett. A* **339** 325
- [8] Tsimring L S, Rulkov N F, Larsen M L, Gabbay M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 14101
- [9] Yan W W, Zhi H G, Hua O W 2005 *Phys. Lett. A* **339** 325
- [10] Yue L J, Shen K 2005 *Chin. Phys.* **14** 1760
- [11] Wang X Y, Shi Q J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5591 (in Chinese) [王兴元、石其江 2005 物理学报 **54** 5591]
- [12] Huang L, Feng R, Wang M 2004 *Phys. Lett. A* **320** 271
- [13] Lu J, Wu X, Han X, Li J 2004 *Phys. Lett. A* **329** 327
- [14] Li S H, Cai H X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1687 (in Chinese) [李世华、蔡海兴 2004 物理学报 **53** 1687]
- [15] Li C, Lia X 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 857
- [16] Cheng L, Zhang R Y, Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 536 (in Chinese) [程 丽、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 536]
- [17] Park J H 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **26** 959
- [18] Elabbasy E M, Agiza H N, El-Dessoky M M 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 657
- [19] Kim J H, Park C W, Kim E, Park M 2005 *Phys. Lett. A* **334** 295
- [20] Lü L 2000 *Chem. J. Chin. Univ.* **21** 105 (in Chinese) [吕 翎 2000 高等学校化学学报 **21** 105]
- [21] Wu C W, Chua L O 1996 *Int. J. Bif. Chaos* **6** 801
- [22] Lü L 2000 *Nonlinear dynamics and chaos* (Dalian : Dalian Publishing House) (in Chinese) [吕 翎 2000 非线性动力学与混沌 (大连出版社)]

Parameter identification and backstepping design of synchronization controller for uncertain chaotic system^{*}

Lü Ling^{1)†} Guo Zhi-An²⁾ Li Yan¹⁾ Xia Xiao-Lan¹⁾

1) (College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

2) (Department of Mathematics and Physics, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

(Received 16 May 2006 ; revised manuscript received 31 May 2006)

Abstract

A parameter observer is designed to identify Rossler system with unknow parameters. Chaos synchronization between uncertain Rossler system and Coullet system is realized via backstepping method. The synchronization controller is presented based on stability theory, and the area of controlling gain is determined. The simulation results show that all the state variables in the Coullet system can track any desired trajectory in the Rossler system exactly when the parameter observer and backstepping controller are functioning, which shows the method is effective and feasible.

Keywords: chaos synchronization, parameter identification, backstepping controller

PACC: 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 20373021) and the Natural Science Foundation of Liaoning Province (Grant No. 20052151).

[†] Corresponding author. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn