

# 垂直电偶极子在球外侧电磁场的闭合解及验证<sup>\*</sup>

王海龙<sup>1)†</sup> 吴 群<sup>1)</sup> 李乐伟<sup>1)‡</sup> 吴 健<sup>1)‡</sup> 孟繁义<sup>1)</sup>

1) 哈尔滨工业大学电子与信息技术研究院, 哈尔滨 150001)

2) 新加坡国立大学电气与计算机工程系, 新加坡)

3) 电波环境特性及模化技术国家重点实验室, 北京 102206)

(2006 年 3 月 31 日收到, 2006 年 4 月 24 日收到修改稿)

给出了理想导体球外侧垂直电偶极子激励电磁场的闭合解, 解决了直接场的级数表达式的不连续性问题. 同球外电磁场直接级数求和表达式的计算结果进行了比较. 在相同的电磁模型下, 利用闭合解对一种近似方法进行了验证. 当垂直电偶极子以及场点在球体表面附近并且频率较低时, 这两种方法的计算结果非常一致; 当垂直电偶极子以及场点不在球体表面附近并且频率较高时, 闭合解的计算结果逐渐出现了近似方法未出现的干涉现象.

关键词: 垂直电偶极子, 并矢格林函数, 干涉现象, 散射

PACC: 4110H, 4225

## 1. 引 言

垂直电偶极子在球体外侧激励产生的电磁场的计算问题是一个古老而经典的课题, 在通信、地球探测等很多领域都必须对此类问题所得到的结果进行利用<sup>[1-6]</sup>. 在早期研究中, 很多学者都已经作出了大量的工作, 包括 Mie<sup>[7]</sup>, Debye<sup>[8]</sup>, Watson<sup>[9]</sup>, Norton<sup>[10]</sup>, Bremmer<sup>[11]</sup>, Wait<sup>[12, 13]</sup>, Wu<sup>[14]</sup>, Hill 和 Wait<sup>[15]</sup>. 最近, King<sup>[16, 17]</sup>, Houdzoumis<sup>[18-20]</sup>, Margetis<sup>[21, 22]</sup>, Li<sup>[23]</sup>, Li<sup>[24, 25]</sup>, Zhang 和 Pan<sup>[26]</sup>等人对这个问题进行了更加深入的分析. 本文给出了一种导体球上方垂直电偶极子激励电磁场的闭合表达式解, 解决了直接场级数表达式的不连续性问题; 同球外电磁场的直接级数求和表达式相比, 这种方法具有很高的计算精度, 并且计算不受  $k_0 a$  参数的限制, 解决了直接级数求和表达式在  $k_0 a$  较大时收敛慢的问题; 用这种闭合表达式对 Zhang 等人<sup>[26]</sup>提出的方法进行了验证. 当垂直电偶极子以及场点在球体表面附近并且频率较低时, 两种计算方法得到的结果非常一致; 而当垂直电偶极子以及场点远离球表面并且频率较高时, 闭合解计算的电磁场逐渐出现了 Zhang 等人的计算方法所未得到的干涉现象.

## 2. 球外侧激励场的闭合表达式

图 1 给出了本文讨论的电磁模型.

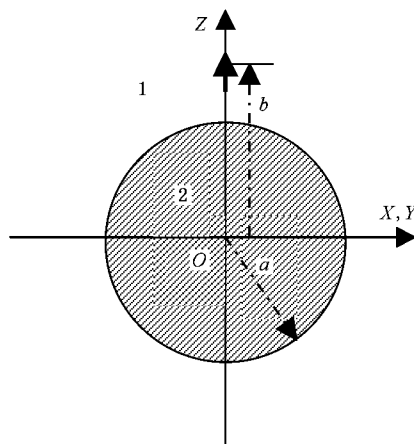


图 1 垂直电偶极子在球体存在时的电磁场激励模型

图 1 中区域 1 是空气, 波数为  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ; 区域 2 是球体, 波数  $k_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_1}$ . 球体半径为  $a$ , 球心为坐标原点, 垂直电偶极子位于  $Z$  轴上, 离球心距离为  $b$ . 球坐标系下的电流分布表达式为  $J(r') = \frac{I_0}{b^2 \sin \theta} \delta(r' - b) \delta(\theta') \delta(\phi') \hat{r}$ , 其中  $I_0$  表示电流分布的

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60571026), 电波环境特性及模化技术国家重点实验室项目(批准号: 514860303HT0101)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: wdashou\_1981@hit.edu.cn

幅度  $\delta(\cdot)$  表示 Dirac  $\delta$  函数.

定义标量本征函数

$$\psi_{e_{mn}}^{(k)}(k) = z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} (m\phi), \quad (1)$$

向量本征函数

$$M_{e_{mn}}^{(k)}(k) = \nabla \times [\psi_{e_{mn}}^{(k)} \hat{r}], \quad (2)$$

$$N_{e_{mn}}^{(k)}(k) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times [\psi_{e_{mn}}^{(k)} \hat{r}], \quad (3)$$

其中  $z_n(kr)$  表示  $n$  阶球 Bessel 函数,  $P_n^m(\cos\theta)$  表示阶数为  $(n, m)$  的第一类连带 Legendre 函数. 将 (1) 式代入 (2) (3) 式展开向量本征函数

$$M_{e_{mn}}^{(k)}(k) = \mp \frac{m}{\sin\theta} z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin}{\cos} m\phi \hat{\theta} - z_n(kr) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{\cos}{\sin} m\phi \hat{\phi}, \quad (4)$$

$$N_{e_{mn}}^{(k)}(k) = \frac{n(n+1)}{kr} z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} m\phi \hat{r} + \frac{1}{kr} \frac{d[rz_n(kr)]}{dr} \cdot \left[ \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \times \frac{\cos}{\sin} m\phi \hat{\theta} \mp \frac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin}{\cos} m\phi \hat{\phi} \right] \quad (5)$$

利用并矢格林函数的方法来求解垂直电偶极子在球体存在时激励的电场. 根据散射叠加定理  $\bar{G}_e^{(f1)}(r, r') = \bar{G}_{0e}(r, r') \delta_f^1 + \bar{G}_{es}^{(f1)}(r, r')$ ,  $\bar{G}_{0e}(r, r')$  表示无界媒质中垂直电偶极子辐射的直接波并矢格林函数,  $\bar{G}_{es}^{(f1)}(r, r')$  表示由于球体存在导致的散射格林函数. 其中  $(f1)$  表示场点和源点所在的位置, 下标  $e$  表示电类型,  $s$  表示散射. 根据传统的并矢格林函数的求解方法, 得到无界媒质的直接波并矢格林函数为

$$\begin{aligned} & \bar{G}_{0e}(r, r') \\ &= \frac{ik_1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_m^0) \\ & \times \frac{2n+1}{n(n+1)(n+m)!} \\ & \times \begin{cases} M_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) M'_{e_{mn}}(k_1) + N_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) N'_{e_{mn}}(k_1), \\ M_{e_{mn}}(k_1) M'_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) + N_{e_{mn}}(k_1) N'_{e_{mn}}^{(1)}(k_1). \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

垂直电偶极子位于球外侧时的散射格林函数表达式为

$$\begin{aligned} \bar{G}_{es}^{(1)}(r, r') &= \frac{ik_1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_m^0) \\ & \times \frac{2n+1}{n(n+1)(n+m)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ B_M^{11} M_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) M'_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) \right. \\ & \left. + B_N^{11} N_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) N'_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{es}^{21}(r, r') &= \frac{ik_1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_m^0) \\ & \times \frac{2n+1}{n(n+1)(n+m)!} \\ & \times \left[ D_M^{21} M_{e_{mn}}^{(1)}(k_2) M'_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) \right. \\ & \left. + D_N^{21} N_{e_{mn}}^{(1)}(k_2) N'_{e_{mn}}^{(1)}(k_1) \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

(7) 和 (8) 式中的系数  $B_{MN}^{11}, D_{MN}^{21}$  可以通过边界条件确定. 假定文中讨论的电磁场激励模型的球体是理想的导体球, 由于球中的电场为零, 因此

$$\begin{aligned} B_M^{11} &= -\frac{j_n(\rho_a)}{h_n^{(1)}(\rho_a)}, B_N^{11} = -\frac{[\rho_a j_n(\rho_a)]}{[\rho_a h_n^{(1)}(\rho_a)]}, \\ D_M^{21} &= D_N^{21} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\rho_a = k_1 a$  确定格林函数的表达式之后, 得到球外电场的表达式为

$$\begin{aligned} E(r) &= -\frac{k\omega\mu_0 I_0}{4\pi(kb)} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \\ & \times \begin{cases} [j_n(kb) + B_N^{11} h_n^{(1)}(kb)] N_{e_{0n}}^{(1)}(k), r > b, \\ h_n^{(1)}(kb) N_{e_{0n}}(k) + B_N^{11} h_n^{(1)}(k), r < b. \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

将电场写成直接场和散射场叠加的形式

$$E(r) = E_{\text{direct}}(r) + E_{\text{scat}}(r),$$

其中

$$\begin{aligned} E_{\text{direct}}(r) &= -\frac{k\omega\mu_0 I_0}{4\pi(kb)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \\ & \times \begin{cases} j_n(kb) N_{e_{0n}}^{(1)}(k), r > b, \\ h_n^{(1)}(kb) N_{e_{0n}}(k), r < b, \end{cases} \quad (11) \\ E_{\text{scat}}(r) &= -\frac{k\omega\mu_0 I_0}{4\pi(kb)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \\ & \times B_N^{11} h_n^{(1)}(kb) N_{e_{0n}}^{(1)}(k). \quad (12) \end{aligned}$$

由于 (11) 式直接场的分段级数表达式导致了不仅在垂直电偶极子的位置场存在着不连续性, 在  $r = b$  处都存在着不连续性, 而实际情况下应该仅仅在垂直电偶极子的位置场存在不连续性. 为了解决这个不连续性问题, 利用级数展开式

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikR}}{ikR} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) \\ & \times \begin{cases} j_n(kb) h_n^{(1)}(kr), r > b, \\ h_n^{(1)}(kb) j_n(kr), r < b, \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

其中  $R = |r - r'| = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}$ , 省略数学推导过程可得

$$E_{\text{direct}}(r) = -\frac{k\omega\mu_0 I_0}{4\pi(kb)} \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \left[ \frac{e^{ikR}}{ikR} \right], \quad (14)$$

$$E_{\text{direct},r}(r) = -\frac{k\omega\mu_0 I_0}{4\pi(kb)} \times \frac{be^{ik\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}}{k^2 [b^2+r^2-2br\cos\theta]^2} \times \left\{ 4br\cos^2\theta [i + k\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}] + b[3i + k(-ik(b^2+r^2) + 3\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta})] \sin^2\theta + (2i)\cos\theta [k(b^2+r^2) \times (i + k\sqrt{b^2+k^2-2br\cos\theta}) + b^2k^2r^2\sin^2\theta] \right\}. \quad (15)$$

同样可以得到直接场  $\theta$  分量表达式. 表达式(15)解决了直接场分段表达式的不连续性的问题.

为了加速级数的收敛性, 将散射场表达为镜像场和修正场分量相叠加的形式  $E_{\text{scat}}(r) = E_{\text{image}}(r) + E_{\text{corr}}(r)$ , 根据镜像场的位置, 可以得到

$$\frac{e^{ikR'}}{ikR'} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(\cos\theta) \times \begin{cases} j_n(kb)h_n^{(1)}(kr), & r > 2a - b, \\ h_n^{(1)}(kb)j_n(kr), & r < 2a - b, \end{cases}$$

其中  $R' = |r - r'| = \sqrt{(2a - b)^2 + r^2 - 2(2a - b)r\cos\theta}$ . 由于需要计算球外侧的场, 则  $r > 2a - b$  始终满足, 因此  $E_{\text{image}}(r) = E_{\text{direct}}(r)|_{b \rightarrow 2a - b}$ ,  $E_{\text{image},r}(r) = E_{\text{direct},r}(r)|_{b \rightarrow 2a - b}$ . 令

$$E_{\text{corr}}(r) = -\frac{k\omega\mu_0 I_0}{4\pi(kb)} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \times [B_N^{11}h_n^{(1)}(kb) - (b(2a - b))] \times j_n[k(2a - b)] N_{\text{d0n}}^{(1)}(k), \quad (16)$$

与  $E_{\text{image}}(r)$  相比, 可以证明  $E_{\text{corr}}(r)$  非常小, 只是起到改善计算精度的作用. 因此, 这一项在计算中可以忽略, 于是得到球外场的闭合表达式

$$E(r) = E_{\text{direct}}(r) + (b(2a - b))E_{\text{direct}}(r)|_{b \rightarrow 2a - b}, \\ E_r(r) = E_{\text{direct},r}(r) + (b(2a - b))E_{\text{direct},r}(r)|_{b \rightarrow 2a - b}. \quad (17)$$

将(17)式的闭合解计算结果同直接级数求和的(10)式的计算结果相比较, 取  $a = 6370000$  m,  $f = 3000$  Hz,  $b = 6370010$ ,  $r = 6370500$ , 得到图2的对比

结果. 其中实线表示直接级数求和得到电场  $r$  分量, 虚线表示利用闭合表达式得到的电场  $r$  分量. 可以看出, 闭合表达式的结果非常精确, 而计算时间大大减少. 另外, 当  $k_0 a$  较大时, (10)式的收敛很慢, 几乎无法进行计算, 而闭合表达式的计算不受  $k_0 a$  的影响.

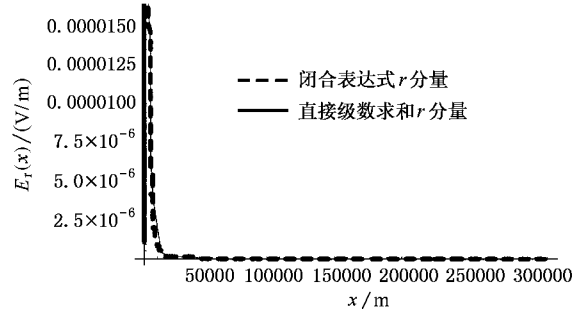


图2 闭合表达式和直接求和表达式的计算结果比较

### 3. 两种计算方法的数值结果对比

将闭合解同 Zhang 的方法相比较来计算无介质层覆盖的导体球外侧由于垂直电偶极子激励产生的电场. 根据文献[26]中的(41)(42)式,

$$E_r = E_0 e^{i\pi/4} \sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{t_s - q} G_s(y_s) G_s(y_r) e^{it_s x},$$

其中

$$E_0 = \frac{iIdl}{\lambda} \frac{\eta e^{ik_0 a \theta}}{a \sqrt{\theta} \sin\theta}, \quad \eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0},$$

$$G_s(y) = w_2(t_s - y) w_2(t_s),$$

$$y_s = (2/k_0 a)^{1/3} k_0 z_s,$$

$$q = \frac{k_0 \sqrt{k_1^2 - k_0^2}}{k_1^2} \tan(\sqrt{k_1^2 - k_0^2} l) \left( \frac{k_0 a}{2} \right)^{1/3}.$$

$l = 0$  时表示无介质层覆盖.

取球体半径为  $a = 6370000$  m, 分别取不同的频率、垂直电偶极子的位置以及场点位置来比较两种方法的一致性.

1) 假定垂直电偶极子和场点都在球的表面即  $a = r = b = 6370000$  m, 频率  $f$  变化. 图3和图4分别给出了  $f = 10000$  Hz 和  $f = 100000$  Hz 的场的对数结果比较. 其中虚线表示 Zhang 的方法, 实线表示本文中的闭合表达式的方法.

2) 取  $a = 6370000$  m,  $f = 10000$  Hz, 垂直电偶极子在球的表面, 而场点位置分别是  $r = 6371000$  m 和  $r = 6380000$  m.

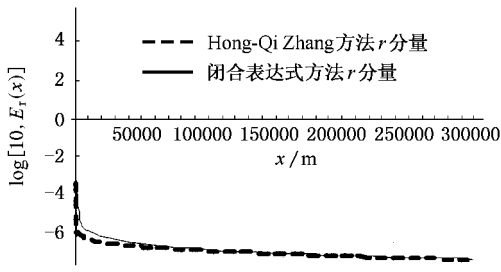


图3  $f = 10000$  Hz 时两种方法的对数比较结果

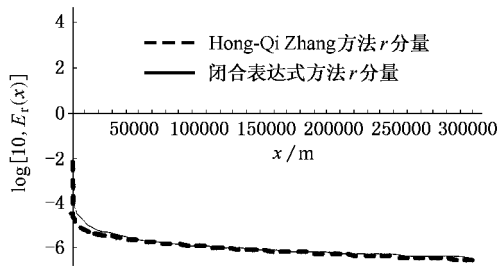


图4  $f = 100000$  Hz 时两种方法的对数比较结果

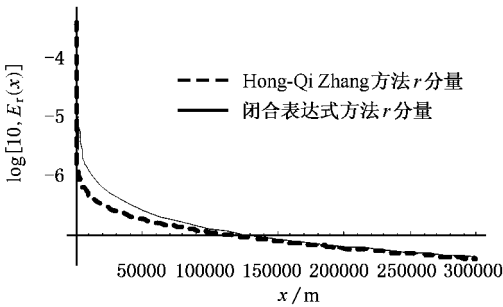


图5  $r = 6371000$  m 时两种方法的对数比较结果

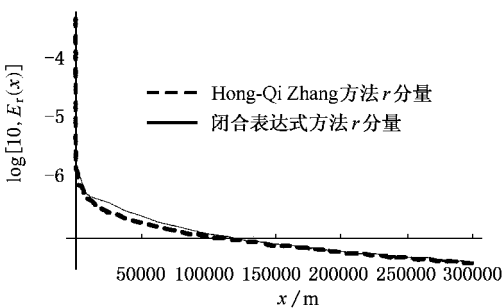


图6  $r = 6380000$  m 时两种方法的对数比较结果

从图3至图6得到如果水平距离较小的时候两种计算方法有一些的差距,这是因为 Zhang 的方法中在水平距离较小时对  $P_r(\cos(\pi - \theta))$  应用的近似方法不再准确,这个问题作者在文献 [26] 中也进行

了讨论,在水平距离较大时两种方法的计算结果非常一致。

3) 垂直电偶极子以及场点都在球体表面附近,当频率较低(图形变化规律同1)2)类似。但是当频率较高,垂直电偶极子以及场点都不在球体表面附近时,令  $f = 100000$  Hz,图7中  $b = 6380000$  m,  $r = 6370000$  m;图8中  $b = 6380000$  m,  $r = 6380000$  m;图9中  $b = 6390000$  m,  $r = 6390000$  m。从图7至图9看出闭合解计算的电场逐渐出现了明显的干涉现象,而 Zhang 的方法没有,这是因为 Zhang 的近似方法适用于低频以及场和源点都在球体表面附近的情况,在高频以及场和源点不在球体表面附近时,这种方法不再适用,而闭合表达式的结果则是精确的。

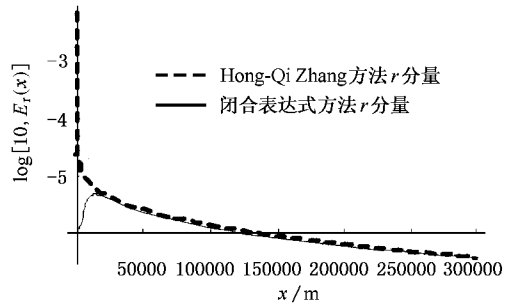


图7  $f = 100000$ ,  $b = 6380000$ ,  $r = 6370000$  时两种方法的对数比较结果

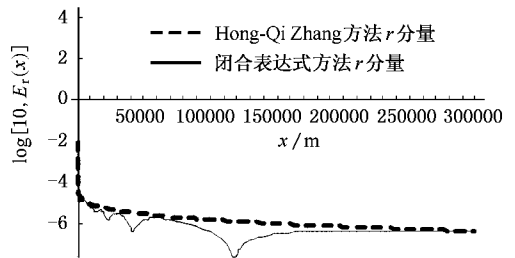


图8  $f = 100000$ ,  $b = 6380000$ ,  $r = 6380000$  时两种方法的对数比较结果

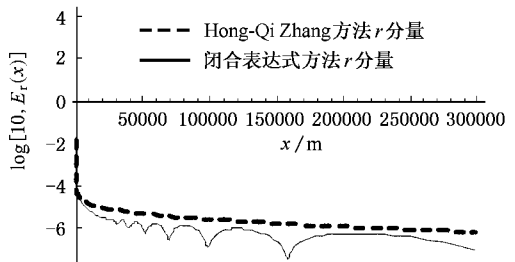


图9  $f = 100000$ ,  $b = 6390000$ ,  $r = 6390000$  时两种方法的对数比较结果

## 4. 结 论

本文讨论了传统的垂直电偶极子在球体外侧激励产生的电磁场的计算问题. 利用并矢格林函数的方法给出了导体球存在时垂直电偶极子激励的电场的闭合解, 解决了直接场级数表达式的不连续性问题, 同球外电磁场的直接级数求和的表达式相比, 闭合解的计算结果非常精确并且不受参数  $k_0 a$  的影

响. 利用闭合解对 Zhang 的方法进行了验证, 通过图 3 至图 9 的电场  $r$  分量的对数计算结果比较可以看出当垂直电偶极子以及场点位于球表面附近, 频率较低时, 水平距离较远时, 两种方法的计算结果非常一致; 当垂直电偶极子以及场点不在球表面附近, 频率较高时, 闭合表达式的电场  $r$  分量计算结果逐渐出现了较为明显的干涉现象, 而 Zhang 的方法并未出现这种现象. 本文介绍的闭合表达式所得到的结果具有足够的计算精度和广泛的适用性.

- [ 1 ] Zhuang F , Shen J Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 955 ( in Chinese )  
[ 庄 飞、沈建其 2005 物理学报 **54** 955 ]
- [ 2 ] Luo C R , Kang L , Zhao Q , Fu Q H , Song J , Zhao X P 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1607 ( in Chinese ) [ 罗春荣、康 雷、赵 乾、付全红、宋 娟、赵晓鹏 2005 物理学报 **54** 1607 ]
- [ 3 ] Meng F Y , Wu Q , Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **5** 2194 ( in Chinese ) [ 孟繁义等 2006 物理学报 **5** 2194 ]
- [ 4 ] Meng F Y , Wu Q , Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **5** 2200 ( in Chinese ) [ 孟繁义等 2006 物理学报 **5** 2200 ]
- [ 5 ] Zhang T Y , Cao J C 2004 *Chin. Phys.* **10** 1742
- [ 6 ] He Q C , Xu S H , Li P Y 2004 *Chin. Phys.* **5** 682
- [ 7 ] Mie G 1908 *Ann. Phys. Leipzig* **25** 377
- [ 8 ] Debye P 1909 *Ann. Phys. Leipzig* **30** 57
- [ 9 ] Watson G N 1918 *Proc. Royal Society of London A* **95** 83
- [ 10 ] Norton K A 1941 *IRE Proc* **29** 623
- [ 11 ] Brenner H 1958 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **6** 267
- [ 12 ] Wait J R 1953 *Can. J. Phys.* **31** 670
- [ 13 ] Wait J R 1956 *J. Res. National Bureau of Standards* **56** 237
- [ 14 ] Wu T T 1956 *Phys. Rev.* **104** 1201
- [ 15 ] Hill D A , Wait J R 1980 *Radio Sci.* **15** 637
- [ 16 ] King R W P , Harrison C W. Jr , Houdzoumis V A 1997 *Radio Sci.* **32** 103
- [ 17 ] King R W P , Harrison C W. Jr 1998 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **40** 337
- [ 18 ] Houdzoumis V A 1994 *part II. Vertical Electric Dipole Radiation over Spherical Earth PhD thesis* ( Harvard University ) p70
- [ 19 ] Houdzoumis V A 1999 *J. Appl. Phys.* **86** 3939
- [ 20 ] Houdzoumis V A 2000 *Radio Sci.* **35** 19
- [ 21 ] Margetis D , Wu T S 2001 *J. Math. Phys.* **42** 713
- [ 22 ] Margetis D 2002 *J. Math. Phys.* **43** 3162
- [ 23 ] Li L W , Kooi P S , Leong M S , Yeo T S 1994 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **42** 2302
- [ 24 ] Li K , Lu Y L 2005 *PIER* **54** 221
- [ 25 ] Li K , Park S O , Zhang H Q 2004 *Radio Sci.* **39** doi : 10. 1029/2002RS002771
- [ 26 ] Pan W Y , Zhang H Q 2003 *Radio Sci.* **38** doi : 10. 1029/2002RS002689

# The closed solution and verification of the electromagnetic field of a vertical dipole over the sphere<sup>\*</sup>

Wang Hai-Long<sup>1)†</sup> Wu Qun<sup>1)</sup> Li Le-Wei<sup>1)2)</sup> Wu Jian<sup>1)3)</sup> Meng Fan-Yi<sup>1)</sup>

1) (*Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

2) (*Department of Electrical & Computer Engineering, National University of Singapore, Singapore*)

3) (*National key Laboratory of Electromagnetic Environment, Beijing 102206, China*)

(Received 31 March 2006; revised manuscript received 24 April 2006)

## Abstract

The closed solution of the electromagnetic field of the vertical dipole over a perfect conducting sphere is introduced, the problem of discontinuity encountered in the series expression of the direct field is solved. Computation result is compared with the direct summation of the series form solutions of the electromagnetic field over the sphere. Based on the same electromagnetic model, an approximate method is verified by the closed solution. If the vertical dipole and the observation point are near the surface of the sphere and the frequency is not too high, then the computation results of the two methods are quite the same. If the vertical dipole and the observation point are not near the surface of the sphere and the frequency is high, then the behavior of interference is gradually obtained by the closed solution but not by the approximate method.

**Keywords:** vertical dipole, dyadic green function, behavior of interference, scattering

**PACC:** 4110H, 4225

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60571026), and the Fund for the National Key Laboratory of Electromagnetic Environment (Grant No. 514860303HT010).

<sup>†</sup> E-mail: dashou\_1981@hit.edu.cn