

副热带圈和赤道太平洋年代际变更的 海-气振子模型解的同伦映射方法^{*}

莫嘉琪^{1,2,3,†} 林万涛⁴

1 安徽师范大学 芜湖 241000)

2 湖州师范学院 湖州 313000)

3 上海高校计算科学院 E-研究院上海交通大学研究所 上海 200240)

4 中国科学院大气物理研究所 北京 100029)

(2007 年 1 月 11 日收到, 2007 年 1 月 27 日收到修改稿)

研究了一类海-气振子时滞方程. 目的是构建一个非线性海-气振子模型的近似求解方法, 利用同伦映射理论讨论了对应的问题的近似解. 这是一个近似的解析方法, 它能够进一步分析海-气振子模型海表温度异常的其他性态.

关键词: 非线性, 时滞, 厄尔尼诺-南方振子, 同伦映射

PACC: 0200

1. 引言

海气之间的交互作用对全球气候起着很大的影响. 对于这些交互作用集中在对厄尔尼诺-南方涛动(ENSO)现象的研究. 这种现象以 3 到 4 年作为一个周期, 它主要表现在赤道太平洋地区^[1,2]. 赤道太平洋的海表温度(SST)是全球气候的研究中心. 此外, 赤道东太平洋 SST 变异(SSTAs)也显示了年代或年代际的变更及其调节 ENSO 的振幅和频率^[3]. 目前在赤道太平洋年代际的 SSTAs 的原因还不清楚. Nonaka 等^[4]研究了热带海-气的非线性性将在十年或更长的时间尺度内出现 ENSO 的混沌现象. ENSO 现象是国际学术界很关注的研究问题^[5-9]. Feng 等^[6]研究了一个海-气振子的不稳定模型. Wang^[8]研究了一个特殊的 ENSO 机理. Mo 和 Lin 等^[10-20]也讨论了一类大气物理、海洋气候、动力系统等问题.

近来, 许多学者研究了非线性问题的近似理论^[21-23]. 近似方法不断地被发展和优化, 包括平均

法、渐近展开法、匹配法、边界层法和多重尺度法等. 本文是利用简单而有效的同伦映射方法来讨论一个海-气振子模型^[24-26].

2. 赤道太平洋振子模型

实验数据表明, 赤道太平洋的风速影响赤道年代际 SSTAs 的机理. 温度异常主要是确定在从 11°S 到 15°N 和从 -550 m 到海表面的范围内. 温度异常方程可表示为^[4]

$$\frac{dH'}{dt} = v' - Q', \quad (1)$$

其中 H' 为热容量, t 为时间变量, v' 为热传导量, $Q' = \gamma \iint_A T_0 dx dy$ 为通过研究区域 A 流出的热流的曲面积分, γ 为热流系数, T_0 为解的 SSTa 场. 并且实验数据还表明, Q' 正比于东赤道区域 140°W—90°W, 1°S—1°N 年代际的 T , 且 $Q' = bT$, $b = 2.83 \times 10^{14} \text{ W/}^\circ\text{C}$ ^[4]. 同时 Q' 和 H' 的关系为 $H' = aQ'$, $a = 841 \text{ m}$. 这意味着有 $T = \frac{1}{ab}H'$ (a, b 为常数). 于是对

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 40676016, 40471039), 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号: 2003CB415101-03, 2004CB418304), 中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号: KZCX3-SW-221), 上海市教育委员会科研计划(批准号: N. E03004)和浙江省自然科学基金(批准号: Y606268)资助的课题.

[†] E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn

年代际时间尺度的关系式为

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{a}T + \frac{1}{ab}v'. \quad (2)$$

由经验数据表明,热传导 v' 为 $T^2 \mathcal{T}(t - \delta)$, 其中 δ 为 T 的时滞数. 因此可得到如下赤道太平洋海表温度异常的时滞模型

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{1}{a}T(t) + \frac{\gamma}{ab}T^2(t)\mathcal{T}(t - \delta). \quad (3)$$

3. 同伦映射

引入一个同伦映射^[22-24] $H(v, p): X \times I \rightarrow R$:

$$H(T, p) = L(T) - L(u_0) + p(L(u_0) - \frac{\gamma}{ab}T^2(t)\mathcal{T}(t - \delta)), \quad (4)$$

其中 $X = [0, \infty)$, $I = [0, 1]$, $R = (-\infty, +\infty)$, 而线性算子 $L(T) = \frac{dT}{dt} + \frac{1}{a}T$, u_0 为原方程(3)的零次近似.

现设 $u_0 = A \exp(\alpha t)$, 其中 A 为任意常数, α 为调节常数.

显然, 由(4)式知, $H(T, 1) = 0$ 就是方程(3). 故方程(3)的解 $\mathcal{T}(t)$ 就是 $H(T, p) = 0$ 的解当 $p \rightarrow 1$ 的极限情形.

考虑

$$H(T, p) = 0, \quad (5)$$

设

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t) p^i. \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式, 展开非线性项为 p 的幂级数, 比较等式两边 p 的同次幂的系数. 由 p 的零次幂的系数, 可得 $L(T_0) = L(u_0)$. 显然, 这时有

$$T_0(t) = \mathcal{T}(0) \exp(\alpha t), \quad (7)$$

其中 $\mathcal{T}(0)$ 为 T 的初值.

由 p 的一次幂的系数, 并由(7)式可得

$$\frac{dT_1}{dt} + \frac{1}{a}T_1 = -\mathcal{T}(0) \left[\alpha + \frac{1}{a} \right] \exp(\alpha t) + \frac{\chi(\mathcal{T}(0))^3}{ab} \exp(-\alpha\delta) \exp(3\alpha t). \quad (8)$$

为避免“共振”项的出现, 选择调节常数 $\alpha = -\frac{1}{a}$.

这时(8)式为

$$\frac{dT_1}{dt} + \frac{1}{a}T_1 = \frac{\chi(\mathcal{T}(0))^3}{ab} \exp\left(-\frac{3t - \delta}{a}\right). \quad (9)$$

不难得到方程(9)具有零初值的解为

$$T_1(t) = \frac{\chi(\mathcal{T}(0))^3}{2b} \left[\exp\left(-\frac{t - \delta}{a}\right) - \exp\left(-\frac{3t - \delta}{a}\right) \right]. \quad (10)$$

由 p 的二次幂的系数, 并由(7)式和(10)式可得

$$\frac{dT_2}{dt} + \frac{1}{a}T_2 = \frac{\chi(\mathcal{T}(0))^3}{ab} \exp\left(-\frac{3t - \delta}{a}\right) + \frac{2\gamma^2(\mathcal{T}(0))^5}{ab^2} \left[\exp\left(-\frac{3t - 2\delta}{a}\right) - \exp\left(-\frac{5t - 2\delta}{a}\right) \right]. \quad (11)$$

由方程(11)可以得到零初值的解为

$$T_2(t) = \frac{\chi(\mathcal{T}(0))^3}{2b} \left[\exp\left(-\frac{t - \delta}{a}\right) - \exp\left(-\frac{3t - \delta}{a}\right) \right] + \frac{\gamma^2(\mathcal{T}(0))^5}{2b^2} \left[-\exp\left(-\frac{3t - 2\delta}{a}\right) + \exp\left(-\frac{5t - 2\delta}{a}\right) \right]. \quad (12)$$

于是由(6)式, 令 $p = 1$, 并由(7), (10)和(12)式, 便得到了方程(3)的二次近似的解:

$$T_{\text{app}} = \mathcal{T}(0) \exp\left(-\frac{t}{a}\right) + \frac{\chi(\mathcal{T}(0))^3}{b} \times \left[\exp\left(-\frac{t - \delta}{a}\right) - \exp\left(-\frac{3t - \delta}{a}\right) \right] + \frac{\gamma^2(\mathcal{T}(0))^5}{2b^2} \left[-\exp\left(-\frac{3t - 2\delta}{a}\right) + \exp\left(-\frac{5t - 2\delta}{a}\right) \right]. \quad (13)$$

用同样的方法, 可以得到更高次的近似解.

4. 精度比较

为了说明上述结果(13)式的精度, 首先, 从解析方法作比较. 考虑当 γ 为小参数的情形. 利用摄动展开法, 设

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{T}_i(t) \gamma^i, \quad 0 < \gamma \ll 1,$$

其中 \bar{T} 为方程(3)的摄动解. 将上式代入方程(3), 按 γ 的幂展开非线性项, 并且比较方程的同次幂的系数. 可依次地求得 \bar{T}_i , 不难得到如下摄动解^[27]:

$$\bar{\mathcal{T}}(t) = \mathcal{T}(0) \exp\left(-\frac{t}{a}\right) + \frac{\chi(\mathcal{T}(0))^3}{b} \left[\exp\left(-\frac{t - \delta}{a}\right) - \exp\left(-\frac{3t - \delta}{a}\right) \right] + O(\gamma^2), \quad 0 < \gamma \ll 1, \quad (14)$$

其中 $\mathcal{T}(0)$ 为原模型的初值.

比较关系式(13)和(14), 可以看出它们对小量

γ 具有达到 $O(\gamma^2)$ 相同量级的精确度.

其次,从数值模拟的方法作比较.不妨选取无量纲参数: $a = b = 1, \gamma = 0.1, \delta = 0$.于是,由同伦映射方法得到的近似解式(13)的曲线和原方程数值模拟曲线的比较如图1所示.

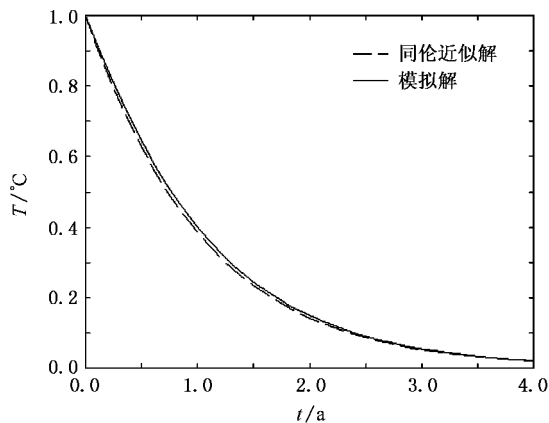


图1 同伦映射解与模拟解的比较

由图1可以看出,用同伦映射方法求出的近似解(虚线)和用数值模拟方法得到的解(实线)具有较高的近似度.

5. 讨 论

厄尔尼诺现象是一个很复杂的大气物理的自然现象.我们只能把它简化为一些基本海-气振子模型来研究,并且去求解它们.利用同伦映射方法就是一个简单而有效的方法.

同伦映射方法是一个近似的解析方法,它不同于一般的数值解法.利用同伦映射方法能对求得的近似展开式进行解析运算,从而可以进一步得到其他相应的物理量.例如可以从关系式(13)出发,进而用微分求导的方法去算出赤道太平洋相应海域的海表温度 SST 的变化率等其他物理量的定量和定性情况.然而用数值模拟的方法就不能很好地实现这样的分析研究.关于对振子模型(3)的同伦近似解进一步进行解析运算方面的研究,不再在本文中讨论.

- [1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603
- [2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805
- [3] An S I, Wang B 2000 *J. Climate* **13** 2044
- [4] Nonaka M, Xie S P, McCreary J P 2001 *Geophys. Res. Lett.* **20** 1116
- [5] Kushnir Y, Robinson W A 2002 *J. Climate* **15** 2233
- [6] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese)[封国林、董文杰、贾晓静、曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
- [7] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 10]
- [8] Wang C 2001 *Advances in Atmospheric Sciences* **18** 674
- [9] Biondi F, Gershunov A, Cayan D R 2001 *J. Climate* **14** 5
- [10] Mo J Q, Zhu J, W H 2003 *Progress in Natural Sci.* **13** 768
- [11] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Progress in Natural Sci.* **14** 550
- [12] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Progress in Natural Sci.* **14** 1126
- [13] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]
- [14] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 993 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]
- [15] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]
- [16] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3229 (in Chinese)[莫嘉琪、王辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 3229]
- [17] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875
- [18] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2005 *Chin. Phys.* **14** 2387
- [19] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2006 *Chin. Phys.* **15** 1927
- [20] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chinese Science Bulletin* **48** II 5
- [21] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The theory of singular perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.)
- [22] Bell D C, Deng B 2003 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **3** 515
- [23] Hwangm S 2004 *J. Diff. Equ.* **200** 191
- [24] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Publisher)(in Chinese)[何吉欢 2002 工程与科学计算中的近似非线性分析方法(郑州:河南科学技术出版社)]
- [25] He J H 1999 *Methods Appl. Mech. Eingr.* **178** 257
- [26] He J H 2002 *J. of Non-linear Mechanics* **35** 37
- [27] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛、朱江 2004 物理学报 **53** 3245]

Homotopic mapping method of solution for the sea-air oscillator model of decadal variations in subtropical cells and equatorial pacific

Mo Jia-Qi^{1,2,3,†} Lin Wan-Tao⁴

¹ *Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*

² *Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China*

³ *Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU, Shanghai 200240, China*

⁴ *Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*

(Received 11 January 2007 ; revised manuscript received 27 January 2007)

Abstract

A time delay equation for sea-air oscillator model is studied. We aim at the creation of an approximate method for solving sea-air oscillator model of nonlinear equation, employing the theory of homotopic mapping, with due consideration of the approximate solution of the corresponding problem. This is an approximate analytical method, which can be further used for analyzing other behaviors of the sea surface temperature anomaly of the atmosphere-ocean oscillator model.

Keywords : nonlinearity, time delay, El Niño-Southern oscillator, homotopic mapping

PACC : 0200

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016, 10471039), the State Key Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Direction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221), the Scientific Research Program from the Education Committee of Shanghai, China (Grant No. N. E03004) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y606268).

† E-mail : mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn