第 56 卷 第 10 期 2007 年 10 月
1000-3290/2007/56(10)/5597-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.10,October,2007

失谐量子频率转换系统薛定谔方程的显式解析解*

厉江帆[1)3)†] 单树民[2)] 杨建坤[3)] 姜宗福[3)]

1)(长沙理工大学物理与电子科学学院,长沙 410076)

2)(长沙理工大学计算机与通信学院,长沙 410076)

3)(国防科技大学理学院,长沙 410073)

(2007 年 3 月 24 日收到;2007 年 4 月 21 日收到修改稿)

根据光和频产生过程的动力学演化总是保持闲置光和信号光的光子数之和守恒这一性质,构建出了光学谐振腔中频率转换系统的含时不变量.并运用此不变量及 Lewis-Riesenfeld 量子不变量方法,在失谐情形下,对这一双模量子化电磁场耦合系统相应的薛定谔方程进行了求解.得到了系统随时间演化的量子态和演化算符的显示解析表达式.此解对于进一步研究系统各种量子性质是有用的.

关键词:量子频率转换,薛定谔方程,解析解,Lewis-Riesenfeld 不变量方法

PACC:0365D,4265K

1. 引 言

非线性光学参量过程中的参量上转换和参量下转换过程是产生可调谐相干辐射的有效途径.例如,利用参量上转换过程能有效地将一频率固定的可见激光束和一频率可调的可见激光束转换为一束位于紫外区的可调谐激光;也可以借助强的可见或近红外的抽运激光把入射的红外弱信号转换成可见范围内的光信号[1].人们已对参量频率上转换过程的时间演化、量子统计特征、量子相互作用过程中的信息转移等性质进行了重点关注[2—8];特别是最近 Tan 等[9]的研究表明量子频率转换系统不改变两纠缠态的纠缠性质,这一发现对量子通信网络的研究具有较重要的意义.另一方面,量子频率下转换系统是产生各种非经典态强有力的工具,人们已对这一系统的时间演化、压缩与纠缠性质等进行了较深入的探讨[10—14].特别是文献[15]和[16]采用李代数方法研究了谐振腔中失谐简并与失谐非简并参量下转换过程的时间演化规律以及失谐量对输出压缩态光场光子对概率分布的影响.为了研究失谐量对参量频率上转换系统演化以及输出场的量子性质的影响,本文采用对求解含时量子系统强有力的 Lewis-Riesenfeld 量子不变量理论[17](人们已对此理论进行了推广,并将其应用到各种含时问题[18—32]),重点研究失谐量子频率转换系统的动力学演化规律.

2. 动力学模型

将二阶非线性双折射晶体置于一高 Q 值谐振腔内,调节晶体光轴的方向使闲置光和信号光沿着与抽运光平行的方向射离谐振腔.在这一装置中,一频率为 ω_{P} 的强抽运激光与另一频率为 ω_{s} 的信号光,借助于非线性相互作用转换成频率为 ω_{I} 的闲置光.闲置光和信号光的频率由如下能量守恒以及相位匹配条件决定:

$$\omega_{\mathrm{I}} = \omega_{\mathrm{P}} + \omega_{\mathrm{s}}, \tag{1a}$$

$$n_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{I}} = n_{\mathrm{P}}\omega_{\mathrm{p}} + n_{\mathrm{s}}\omega_{\mathrm{s}}. \tag{1b}$$

显然,谐振腔在这一系统中主要起提高能量转换效率和抑制输出闲置光和信号光的空间弥散的作用.我们知道,当腔模频率 ω_{s}^0 和 ω_{I}^0 与 ω_{s} 和 ω_{I} 即使相差十分微小,其非线性相互作用强度也会大大降低.为了考虑失谐对频率转换系统的影响,本文采用与文献[16]处理失谐参量下转换类似的模型进行研究,即考虑由如下 Hamilton 量描述的物理模型(取 $\hbar = c = 1$):

$$\hat{H} = \omega_{\mathrm{s}}^0\left(\hat{a}_{\mathrm{s}}^+\hat{a}_{\mathrm{s}} + \frac{1}{2}\right) + \omega_{\mathrm{I}}^0\left(\hat{a}_{\mathrm{I}}^+\hat{a}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\right)$$

* 国家自然科学基金(批准号:60673147)和湖南省教育厅科研项目(批准号:06C163)资助的课题.

† E-mail:lijiang6211@yahoo.com.cn

$$+\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}\{\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}}\exp[-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{P}}t+\varphi_0)]+\hat{a}_{\mathrm{I}}\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}\exp[\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{P}}t+\varphi_0)]\},\tag{2}$$

这里 $\hat{a}_{\mathrm{s}}(\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+})$和 $\hat{a}_{\mathrm{I}}(\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+})$分别为信号腔模和闲置腔模的玻色子湮没算符(产生算符);κ 是有效宏观非线性耦合强度,ε_{P} 是抽运光的振幅(假设忽略抽运光的衰减),φ_0 是闲置场与抽运场和信号场的初相位之差.值得指出的是,Tucker 等[5]已基于此模型研究了无限大介质中的行波频率转换问题,并采用海森堡运动方程求出了 $\hat{a}_{\mathrm{s}}(t)$和 $\hat{a}_{\mathrm{I}}(t)$随时间演化的表达式,但并没有求出系统随时间的演化算符.

下面引入失谐参量

$$\Delta\omega=(\omega_{\mathrm{I}}^{0}-\omega_{\mathrm{I}})-(\omega_{\mathrm{s}}^{0}-\omega_{\mathrm{s}})=\omega_{\mathrm{I}}^{0}-\omega_{\mathrm{s}}^{0}-\omega_{\mathrm{P}},\tag{3}$$

当腔模频率 ω_{I}^{0} 和 ω_{s}^{0} 之差等于经典抽运光频率 ω_{P},即 $\Delta\omega=0$ 时,我们得到参量共振,这时能很容易求出系统的动力学演化规律.然而,由于存在一些不可控制的展宽机理(例如,腔镜的机械和热振动使得腔长发生改变),腔模频率 ω_{I}^{0} 和 ω_{s}^{0} 可能与上转换光子的频率 ω_{s} 和 ω_{I} 有稍许的偏离,即 $\Delta\omega\neq0$,下面借助于 Lewis-Riesenfeld 不变量理论求出相应系统在失谐情形下薛定谔方程的解析解.

3.薛定谔方程的解

量子系统量子态随时间的演化遵循薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle.\tag{4}$$

如同非含时不变量对哈密顿量不显含时间的系统的求解具有重要的作用一样,含时不变量对哈密顿量显含时间的系统的研究具有举足轻重的地位.所谓含时不变量是指该物理量本身是一个显含时间的厄密算符 $\hat{I}(t)$,但其期望值在量子态随时间的演化过程中总是保持为一个恒量,即有 $\hat{I}(t)$满足不变量方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{I}(t)\rangle=0$$

或

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\hat{I}(t)+[\hat{I}(t),\hat{H}(t)]=0.\tag{5}$$

那么,对于由哈密顿量(2)所描述的含时系统,怎样构造出这一系统的含时不变量呢?显然,由方程(2)和(5)可知,$\hat{H}(t)$本身并不是系统的不变量.由频率上转换系统两耦合量子场非线性相互作用的机理可知,一个频率为 ω_{s} 的信号光子和一个频率为 ω_{P} 的抽运光子的湮灭必定伴随着一个频率为 ω_{I} 闲置光子的产生,因此在系统量子态随时间的演化过程中,信号和闲置光子数之和的期望值 $\langle C_1\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{I}}+C_2\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}}\rangle$(其中 $C_1=C_2=1$)必定是一个不变量.然而在实际中这个不变量很难严格不变,因为任何一个光子的损失(如被吸收或散射),都将破坏这种不变性.所以,即使对于几乎无损耗的介质,我们也只能取 $C_1\approx C_2\approx1$.因此本文假设系统的初始不变量算符为

$$\hat{I}(t=0)=\hat{I}_0=C_1\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{I}}+C_2\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}},\tag{6}$$

显然 $C_1\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{I}}+C_2\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}}$ 是厄密算符,为保证不变量 $\hat{I}(t)$的期望值不随时间改变,必须对其施以适当的含时幺正变换.由方程(2)不难看出,可以对方程(6)进行如下幺正变换来构造这个含时不变量,即

$$\hat{I}(t)=\hat{V}(\zeta(t))(C_1\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{I}}+C_2\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}})\hat{V}^{+}(\zeta(t)),\tag{7}$$

这里 $\hat{V}(\zeta)$是两模混合算符,定义为

$$\hat{V}(\zeta)=\exp[\zeta^{*}(t)\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}}-\zeta(t)\hat{a}_{\mathrm{I}}\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}],\tag{8}$$

其中

$$\zeta=r(t)\exp(\mathrm{i}\delta(t)),\tag{9}$$

这里 $r(t)$和 $\delta(t)$均是实时间函数(由(6)—(9)式得 $r(t=0)=0$),它们可由方程(2)及含时不变量条件(5)来确定.利用下面的关系式[18]

$$\hat{V}(\zeta)\hat{a}_{\mathrm{I}}\hat{V}^{+}(\zeta)=\hat{a}_{\mathrm{I}}\cos r(t)-\hat{a}_{\mathrm{s}}\exp(-\mathrm{i}\delta(t))\times\sin r(t),\tag{10a}$$

$$\hat{V}(\zeta)\hat{a}_{\mathrm{s}}\hat{V}^{+}(\zeta)=\hat{a}_{\mathrm{s}}\cos r(t)+\hat{a}_{\mathrm{I}}\exp(\mathrm{i}\delta(t))\times\sin r(t),\tag{10b}$$

方程(7) 变成

$$\begin{aligned}\hat{I}(t)=&[C_1\cos^2r(t)+C_2\sin^2r(t)]\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{I}}\\&+[C_2\cos^2r(t)+C_1\sin^2r(t)]\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}}\\&+\frac{1}{2}(C_2-C_1)\exp(\mathrm{i}\delta(t))\\&\times\sin2r(t)\hat{a}_{\mathrm{I}}\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}+\mathrm{H.c.},\end{aligned}\tag{11}$$

这里 H.c.表此项是前一项的厄密共轭.将(11)和(2)代入(5)式,可得如下两个相互独立的微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}\sin[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0],\tag{12a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}=\omega_{\mathrm{I}}^{0}-\omega_{\mathrm{s}}^{0}+2\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}\cot2r(t)\times\cos[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0].\tag{12b}$$

将 $\cos[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi]$对 $r(t)$求导并利用方程(12)

得

$$\frac{\mathrm{d}\cos[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0]}{\mathrm{d}r(t)}$$
$$=\frac{\mathrm{d}\cos[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0]}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r(t)}$$
$$=-2\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}\cot 2r(t)\cos[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0]$$
$$-\frac{\omega_{\mathrm{I}}^0-\omega_{\mathrm{s}}^0-\omega_{\mathrm{P}}}{\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}}. \quad (13)$$

将(3)式代入方程(13)得该方程的解为

$$\cos[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0]$$
$$=\frac{\Delta\omega\cot 2r(t)}{2\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}}+B_1\csc 2r(t), \quad (14)$$

这里 B_1 为积分常数，由 $r(t=0)=0$ 的条件，可从(14)式定出，$B_1=-\frac{\Delta\omega}{2\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}}$，$\delta(t=0)=\pi/2+\varphi_0$. 为简便起见，引入如下无量纲参数：

$$\tau=\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}t,\ \Delta k=\frac{\Delta\omega}{2\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}},$$
$$\xi=\sqrt{1+(\Delta k)^2}, \quad (15)$$

将其代入方程(14)得

$$\cos[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0]=-(\Delta k)\tan r(t). \quad (16)$$

将(16)式代入(12a)式整理后两边积分得

$$\int_0^{r(t)}\frac{\cos r(t)\mathrm{d}r(t)}{\sqrt{\cos^2 r(t)-(\Delta k)^2\sin^2 r(t)}}$$
$$=\int_0^t\kappa\varepsilon_{\mathrm{P}}\mathrm{d}t. \quad (17)$$

方程(17)的解为

$$r(t)=\arcsin[\sin(\xi\tau)/\xi]. \quad (18)$$

从(16)和(18)式得

$$\exp(\mathrm{i}\delta(t))=\frac{\cos(\xi\tau)+\mathrm{i}(\Delta k)\sin(\xi\tau)/\xi}{\sqrt{1-\sin^2(\xi\tau)]/\xi^2}}$$
$$\times\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega_{\mathrm{P}}t+\frac{\pi}{2}+\varphi_0\right)\right]. \quad (19)$$

若令

$$\theta_{\mathrm{D}}=\arg[\cos(\xi\tau)+\mathrm{i}(\Delta k)\sin(\xi\tau)/\xi], \quad (20)$$

则有

$$\delta(t)=\omega_{\mathrm{P}}t+\frac{\pi}{2}+\varphi_0+\theta_{\mathrm{D}}. \quad (21)$$

将(18)和(21)式代入(11)式便得含时不变量 $\hat{I}(t)$.

设 $|n_1,n_2\rangle$ 为算符 $\hat{I}_0$ 的本征态，即

$$\hat{I}_0|n_1,n_2\rangle=(C_1n_1+C_2n_2)|n_1,n_2\rangle. \quad (22)$$

从(7)和(22)式可以看出，量子态 $\hat{V}(\zeta)|n_1,n_2\rangle$ 是 $\hat{I}(t)$ 的本征态，由 Fock 基的完备性关系 $\sum_{n_1,n_2}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|=1$ 可以证明态矢 $\hat{V}(\zeta)|n_1,n_2\rangle$ 也是一组完备基. 根据 Lewis-Riesenfeld 不变量理论，含时薛定谔方程(4)的通解可用 $\hat{I}(t)$ 的本征态表示为

$$|\psi(t)\rangle=\sum_{n_1,n_2}C_{n_1n_2}\exp(\mathrm{i}\alpha_{n_1n_2})\hat{V}(\zeta)|n_1,n_2\rangle, \quad (23)$$

式中

$$\alpha_{n_1n_2}(t)=\int_0^t\langle n_1,n_2|\hat{V}^+(\zeta)$$
$$\times\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}\right)\hat{V}(\zeta)|n_1,n_2\rangle\mathrm{d}t, \quad (24)$$

称为 Lewis-Riesenfeld 相位. 显然有 $\alpha_{n_1n_2}(t=0)=0$. 将(2)式代入(24)式，并利用如下关系式(略去其厄米共轭形式)：

$$\hat{V}^+(\zeta)\hat{a}_{\mathrm{I}}\hat{V}(\zeta)=\hat{a}_{\mathrm{I}}\cos r(t)+\hat{a}_{\mathrm{s}}\exp(-\mathrm{i}\delta(t))$$
$$\times\sin r(t), \quad (25a)$$

$$\hat{V}^+(\zeta)\hat{a}_{\mathrm{s}}\hat{V}(\zeta)=\hat{a}_{\mathrm{s}}\cos r(t)-\hat{a}_{\mathrm{I}}\exp(\mathrm{i}\delta(t))$$
$$\times\sin r(t), \quad (25b)$$

$$\hat{V}^+(\zeta)\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\hat{V}(\zeta)=\frac{1}{2}\hat{a}_{\mathrm{I}}\hat{a}_{\mathrm{s}}^+\left[\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}\sin 2r(t)\right.$$
$$\left.-\mathrm{i}2\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\right]\exp(\mathrm{i}\delta(t))+\mathrm{H.c}$$
$$-(\hat{a}_{\mathrm{I}}^+\hat{a}_{\mathrm{I}}-\hat{a}_{\mathrm{s}}^+\hat{a}_{\mathrm{s}})\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}\sin^2 r(t), \quad (25c)$$

可得

$$\alpha_{n_1n_2}=-\frac{\omega_{\mathrm{I}}+\omega_{\mathrm{s}}}{2}t-n_{\mathrm{I}}\int_0^t\{\omega_{\mathrm{I}}$$
$$-k\varepsilon_{\mathrm{P}}\cos[\delta(t)-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0]\tan r\}\mathrm{d}t$$
$$-n_{\mathrm{s}}\int_0^t\{\omega_{\mathrm{s}}+k\varepsilon_{\mathrm{P}}\cos[\delta(t)$$
$$-\omega_{\mathrm{P}}t-\varphi_0]\tan r\}\mathrm{d}t. \quad (26)$$

将(16)和(18)式代入(26)式得

$$\alpha_{n_1n_2}=-\frac{\omega_{\mathrm{I}}+\omega_{\mathrm{s}}}{2}t-n_{\mathrm{I}}\left(\omega_{\mathrm{I}}t-\frac{\Delta\omega}{2}t+\theta_{\mathrm{D}}\right)$$
$$-n_{\mathrm{s}}\left(\omega_{\mathrm{s}}t+\frac{\Delta\omega}{2}t-\theta_{\mathrm{D}}\right). \quad (27)$$

当 $t=0$，由(23)式得系统的初态为

$$|\psi(0)\rangle=\sum_{n_1,n_2}C_{n_1n_2}|n_1,n_2\rangle. \quad (28)$$

从(8)，(9)，(27)，(28)和(23)式可得量子系统的态矢为

$$|\psi(t)\rangle=\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{I}}+\omega_{\mathrm{s}}}{2}t\right)$$
$$\times\exp\{r(t)[\exp(-\mathrm{i}\delta(t))\hat{a}_{\mathrm{I}}^+\hat{a}_{\mathrm{s}}$$

$$- \exp(\mathrm{i}\delta(t))\hat{a}_{\mathrm{I}}\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}]\}$$
$$\times \exp\Big\{-\mathrm{i}\Big[\Big(\omega_{\mathrm{I}}t - \frac{\Delta\omega}{2}t + \theta_{\mathrm{D}}\Big)\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{I}}$$
$$+ \Big(\omega_{\mathrm{s}}t + \frac{\Delta\omega}{2}t - \theta_{\mathrm{D}}\Big)\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}}\Big]\Big\}|\psi(0)\rangle. \qquad (29)$$

这样量子系统随时间的演化算符为

$$\hat{U}(t,0) = \exp\Big(-\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{I}} + \omega_{\mathrm{s}}}{2}t\Big)\exp\{r(t)$$
$$\times [\exp(-\mathrm{i}\delta(t))\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}} - \exp(\mathrm{i}\delta(t))\hat{a}_{\mathrm{I}}\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}]\}$$
$$\times \exp\Big\{-\mathrm{i}\Big[\Big(\omega_{\mathrm{I}}t - \frac{\Delta\omega}{2}t + \theta_{\mathrm{D}}\Big)\hat{a}_{\mathrm{I}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{I}}$$
$$+ \Big(\omega_{\mathrm{s}}t + \frac{\Delta\omega}{2}t - \theta_{\mathrm{D}}\Big)\hat{a}_{\mathrm{s}}^{+}\hat{a}_{\mathrm{s}}\Big]\Big\}. \qquad (30)$$

在 Heisenberg 表象中，任意的时间演化算符为

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^{+}(t,0)\hat{A}(0)\hat{U}(t,0). \qquad (31)$$

4. 概要与结论

本文根据光和频产生过程的时间演化总是保持闲置光和信号光粒子数之和守恒这一性质，通过选择适当的幺正变换，获得了系统含时不变量的精确表达式．并运用此不变量及 Lewis-Riesenfeld 量子不变量方法，在失谐情形下，求出了光学谐振腔内频率参量上转换系统薛定谔方程的显示解析解．此解对于进一步研究系统各种量子性质是有用的．借助于演化算符(30)可以直接计算出任意算符随时间的演化及其期望值，从而能进一步研究量子系统的各种非经典性质．在下一步的研究中，我们将利用这一解析解，探讨在输入场为粒子数态、相干态及压缩态的情形下，失谐对量子频率转换效率、输出场光子数概率分布、相干性以及压缩性的影响．另外，还需指出的是，运用(30)和(31)式很容易算出闲置光和信号光湮灭算符 $\hat{a}_{\mathrm{I}}(t)$ 和 $\hat{a}_{\mathrm{s}}(t)$ 随时间演化的表达式，并发现所得结果与 Tucker 等[5] 采用海森堡运动方程所得的表达式(3.13)完全一致．但 Tucker 等并没有求出系统随时间的演化算符．因此用本文所得的解还可进一步研究 Tucker 等的行波频率转换模型的量子性质．

[1] Boyd R W 1992 *Nonlinear Optics* (London: Academic Press) p8

[2] Mollow B R 1967 *Phys. Rev.* **162** 1256

[3] Louisell W H, Yariv A, Siegman A E 1961 *Phys. Rev.* **124** 1646

[4] Tucker J, Walls D F 1969 *Ann. Phys.* (N Y) **52** 1

[5] Tucker J, Walls D F 1969 *Phys. Rev.* **178** 2036

[6] Ji L L, Wu L A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 736 (in Chinese) [季玲玲、吴令安 2005 物理学报 **54** 736]

[7] Li J F, Xiao F L, Jiang Z F, Huang C J 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 9297

[8] Oliveira M C, Mizrahi S S, Dodonov V V 1999 *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **1** 610

[9] Tan A H, Jia X J, Xie C D 2006 *Phys. Rev.* A **73** 033817

[10] Dang L F 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1071 (in Chinese) [党兰芬 1998 物理学报 **47** 1071]

[11] Rekdal P K, Skagerstam B S K 2000 *Physica Scripta* **61** 296

[12] Fan H Y, Jiang Z H 2004 *J. Phys. A Math. Gen.* **37** 2439

[13] Li J F, Huang C J, Jiang Z F, Huang Z H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 522 [厉江帆、黄春佳、姜宗福、黄祖洪 2005 物理学报 **54** 522]

[14] Li J F, Jiang Z F, Xiao F L, Huang C J 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 4459

[15] Zahler M, Ben-Aryeh Y 1991 *Phys. Rev.* A **43** 6368

[16] Zahler M, Ben-Aryeh Y 1992 *Phys. Rev.* A **45** 3194

[17] Lewis H R Jr, Riesenfeld W B 1969 *J. Math. Phys.* **10** 1458

[18] Fu J, Gao X C, Xu J B, Zou X B 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 606 (in Chinese) [符 建、高孝纯、许晶波、邹旭波 1998 物理学报 **47** 606]

[19] Gao X C, Xu J B, Qian T Z 1991 *Phys. Rev.* A **44** 7016

[20] Lai Y Z, Liang J Q 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 738 (in Chinese) [赖云忠、梁九卿 1996 物理学报 **45** 738]

[21] Li B Z, Zhang D G, Wu J H, Yan F L 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 227 (in Chinese) [李伯臧、张德刚、吴建华、阎凤利 1997 物理学报 **46** 227]

[22] Li B Z, Zhang L Y, Zhang X D 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2081 (in Chinese) [李伯臧、张凌云、张向东 1997 物理学报 **46** 2081]

[23] Li B Z, Hou B P, Yu W L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 712 (in Chinese) [李伯臧、侯邦品、余万伦 1998 物理学报 **47** 712]

[24] Gao X C, Gao J, Fu J 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 912 (in Chinese) [高孝纯、高 隽、符 建 1996 物理学报 **45** 912]

[25] Fu J, Gao X C, Xu J B, Zou X B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1011 (in Chinese) [符 建、高孝纯、许晶波、邹旭波 1999 物理学报 **48** 1011]

[26] Shen J Q, Zhu H Y, Li J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1884 (in Chinese) [沈建其、朱红毅、李 军 2001 物理学报 **50** 1884]

[27] Shen J Q, Zhu H Y, Shi S L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 536 (in Chinese) [沈建其、朱红毅、施申蕾 2002 物理学报 **51** 536]

[28] Zhu H Y, Shen J Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1448 (in Chinese) [朱红毅、沈建其 2002 物理学报 **51** 1448]

[29] Xu H L, Shen J Q, Chen Y X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1372 (in Chinese) [徐海磊、沈建其、陈一新 2003 物理学报 **52** 1372]

[30] Liu Q, Zou D, Ji Y H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** (in Chinese) [刘 清、邹 丹、嵇英华 2006 物理学报 **55** 1596]

[31] Zhao H, Liang J Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1442

[32] Zhao H, Gao Y F, Liang J Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 865

An explicit analytical solution of the Schrödinger equation for a detuned quantum frequency conversion system *

Li Jiang-Fan[1)3)†] Shan Shu-Min[2)] Yang Jian-Kun[3)] Jiang Zong-Fu[3)]

1)(*Institute of Physics and Electronic Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha* 410076, *China*)

2)(*Institute of Computer and Telecommunication Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha* 410076, *China*)

3)(*Institute of Science, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China*)

(Received 24 March 2007; revised manuscript received 21 April 2007)

Abstract

The time-dependent invariant of a quantum frequency conversion system in an optical cavity is found from the simple observation that the dynamical evolution of a sum-frequency generation process preserves the total number of the idler photons and the signal photons involved in the process. By using this invariant and the Lewis-Riesenfeld quantum invariant approach, the Schrödinger equation for the coupled system of the two quantized modes of the electromagnetic field is solved under detuned condition. The explicitly analytical formulae of the quantum states and the evolution operators of the system are obtained. It should be useful for further studies on the various quantum properties of the quantum system.

Keywords: quantum frequency conversion, Schrödinger equation, analytical solution, Lewis-Riesenfeld quantum invariant approach

PACC: 0365D, 4265K

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60673147) and the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department of China (Grant No. 06C163).

† E-mail: lijiang6211@yahoo.com.cn