第 56 卷 第 10 期 2007 年 10 月
1000-3290/2007/56(10)/6164-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.10, October, 2007

Damour-Ruffini 方法和 Reissner-Nordstrom 黑洞的非热 Hawking 辐射*

刘文彪

(北京师范大学物理学系,理论物理研究所,北京 100875)

(2007 年 1 月 8 日收到;2007 年 2 月 6 日收到修改稿)

利用 Damour-Ruffini 方法研究了 Reissner-Nordstrom 黑洞的 Hawking 辐射,在考虑辐射能量对背景时空反作用的情况下,发现辐射谱不再是理想的热谱. 得到的修正后的 Hawking 辐射谱,有可能从黑洞中带出信息,进而用来解释黑洞信息丢失佯谬问题,同时满足量子理论的幺正性. 这里的讨论不仅适合于无静止质量的粒子,而且适合于有静止质量的粒子;不仅适合于标量粒子,而且适合于 Dirac 粒子;具有广泛的适用性.

关键词:Hawking 辐射, Damour-Ruffini 方法, 幺正性, 引力反作用
PACC:9760L, 0420

1. 引 言

20 世纪 70 年代,Hawking 提出的辐射机理给出了黑洞辐射谱是精确黑体谱的证明[1],进而极大地推动了黑洞热力学的发展,从而建立了完整的黑洞热力学理论体系[2,3]. Hawking 辐射的提出使人们认识到,黑洞不再是恒星的终极状态,黑洞也将演化并最终消失. 由于 Hawking 辐射谱是精确的热谱,因此产生了一个激烈的矛盾:在黑洞蒸发过程当中,形成黑洞的物质所携带的信息跑到哪里去了呢?这是否意味着黑洞演化过程中幺正性的丢失?Hawking 在 2004 年之前一直坚信,黑洞的演化过程信息是不守恒的,黑洞的演化不满足量子理论的幺正性[4].与此同时,也有一些物理学家则持不同意见,他们主张黑洞的演化过程中应该信息守恒,并且满足幺正性原理[5].这两种观点,都不能给出强有力的说明,这个悬案一直持续了 30 多年. 直到 2004 年,Hawking 在都柏林的演讲[6]中不再坚持信息丢失,使这个问题又一次得到了人们的关注,但 Hawking 并没有给出严格的证明.

事实上,早在 2000 年 Parikh 和 Wilczek 等[7]在考虑辐射粒子的自引力作用的情况下,就将黑洞的 Hawking 辐射理解成了一种量子隧穿过程,给出了一种把黑洞的纯热谱修正为非热谱的半经典方法,这样 Hawking 辐射过程将有可能携带信息,进而黑洞蒸发过程就有可能不再是一个信息丢失的过程. 他们利用这个方法计算了无质量的粒子从 Schwarzschild 黑洞和 Reissner-Nordstrom 黑洞辐射出的修正谱,得到了辐射谱偏离纯热谱并有可能满足幺正性的结论. 随后的一些工作,都验证了这个方法的有效性,但计算都局限在对称和静止质量为零的类光粒子的讨论范围内[8—12]. Zhang 和 Zhao 等[13—18]把上述计算推广到一般轴对称 Kerr-Newman 黑洞,并在后续的工作中逐步研究了静质量非零、带电、甚至带有角动量的粒子,均得到了预期的与 Parikh 结论相符的结果. 这一系列的讨论,从客观上严格证明了黑洞 Hawking 辐射不应该是精确的热谱,支持了 Hawking 在 2004 年所持观点的改变.

我们认为,Parikh 和 Wilczek 工作的核心思想是考虑了辐射出黑洞的能量对时空背景的反作用,以及能量守恒的基本要求. 本文将从证明 Hawking 辐射的经典的 Damour-Ruffini 方法[19,20]出发,考虑辐射对背景时空的反作用,同样可得到与以往文献中相同的 Hawking 辐射修正谱. 这个方法简单直观,物理思想清楚,而且在计算过程当中不必再考虑标量粒

* 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:2003CB716302)和国家自然科学基金(批准号:10475013,10373003)资助的课题.

子和 Dirac 粒子辐射的区别，也不必考虑辐射粒子是否带有静止质量.

2. Klein-Gordon 方程和乌龟坐标变换

Reissner-Nordstrom 时空的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{1}$$

其中 M 为黑洞的质量，Q 为黑洞所带的静电荷. 此黑洞有两个视界面，分别为

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-Q^2},$$

对应的视界面上的表面重力为

$$\kappa_\pm = \frac{r_+-r_-}{2r_\pm^2}. \tag{2}$$

在 Reissner-Nordstrom 黑洞背景下，Klein-Gordon 方程 $(\Box-\mu^2)\Phi=0$，即

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}\right)-\mu^2\Phi=0,$$

可以具体写成

$$\left[-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}r^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left((r^2-2Mr+Q^2)\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-r^2\mu^2\right]\Phi=0. \tag{3}$$

分离变量 $\Phi_{\omega lm}=\frac{1}{(4\pi\omega)^{1/2}}\frac{1}{r}R_\omega(r,t)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$，可得径向方程和横向方程

$$\left[-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}r^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left((r^2-2Mr+Q^2)\frac{\partial}{\partial r}\right)-r^2\mu^2\right]\frac{R_\omega}{r} = -l(l+1)R_\omega/r, \tag{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\mathrm{Y}_{lm} = l(l+1)\mathrm{Y}_{lm}, \tag{5}$$

式中 μ,ω 分别为辐射粒子的静质量、能量，l,m 分别为角量子数、磁量子数，Y_{lm} 为球谐函数. 我们只研究沿径向传播的辐射，因此我们只对径向方程进行讨论.

在 Reissner-Nordstrom 黑洞视界 $r=r_+$ 处，定义乌龟坐标

$$r_* = r+\frac{1}{2\kappa_+}\ln\frac{r-r_+}{r_+}-\frac{1}{2\kappa_-}\ln\frac{r-r_-}{r_-}, \tag{6}$$

进而有

$$\mathrm{d}r_* = \frac{r^2}{r^2-2Mr+Q^2}\mathrm{d}r, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{r^2}{r^2-2Mr+Q^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}, \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} = \left(\frac{r^2}{r^2-2Mr+Q^2}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} + \frac{2(rQ^2-Mr^2)}{(r^2-2Mr+Q^2)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}. \tag{9}$$

把(7)—(9)式代入(4)式，整理得

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\times\left[\frac{2(Mr-Q^2)}{r^4}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\mu^2\right]\right\}R_\omega(r_*,t)=0. \tag{10}$$

径向方程式(10)在 $r\to+\infty$ 时变成

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}-\mu^2\right\}R_\omega(r_*,t)=0, \tag{11}$$

在视界附近 $r\to r_+$ 时，可以化成

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\right\}R_\omega(r_*,t)=0. \tag{12}$$

(12)式比(11)式少了质量项，这是一个合理的结果，因为任何在视界面附近运动的粒子在无穷远观者看来，均与静质量为零的粒子相仿. 另外，从方程(10)还可以看到，在 Reissner-Nordstrom 黑洞外视界到无穷远之间，存在一个势垒，它应该对进出黑洞的粒子产生散射.

考虑外视界附近的情况，由(12)式很容易得到入射波解和出射波解：

$$R_\omega^{\mathrm{in}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+r_*)},\quad R_\omega^{\mathrm{out}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-r_*)}. \tag{13}$$

引入超前 Eddington-Finkelstein 坐标 $v=t+r_*$，上式可写为

$$R_\omega^{\mathrm{in}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v},\quad R_\omega^{\mathrm{out}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega r_*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v}. \tag{14}$$

此时，Reissner-Nordstrom 时空线元变成

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}v\mathrm{d}r+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{15}$$

度规分量和度规行列式在视界面 $r=r_+$ 处不再存在坐标奇异性. 这个坐标系还能够很好地描写入射波，但后面会看到出射波在视界面上不解析. 我们研究辐射，主要关心的是黑洞在视界面附近的出射波，因此需要进行解析延拓.

3. 解析延拓和辐射反作用的影响

由(14)式中第 2 式,有

$$R_{\omega}^{\text{out}}=e^{2i\omega r_*}e^{-i\omega v}=e^{2i\omega r}e^{-i\omega v}\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{i\omega/\kappa_+}\times\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{-i\omega/\kappa_-},\tag{16}$$

可以看出,出射波在视界面 r_+ 上奇异. 上式只能描述视界 r_+ 外的出射粒子,不能描写视界内的出射粒子,为此要以奇点 $r=r_+$ 为圆心、以 $|r-r_+|$ 为半径进行解析延拓

$$(r-r_+)\to|r-r_+|e^{-i\pi}=(r_+-r)e^{-i\pi},$$

于是得到视界面 r_+ 内的出射波

$$\begin{aligned}R_{\omega}^{\text{out}}&=e^{2i\omega r}e^{-i\omega v}\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{-i\omega/\kappa_-}\times\left(\frac{r_+-r}{r_+}\right)^{i\omega/\kappa_+}e^{\pi\omega/\kappa_+}\\&=e^{-i\omega v}e^{\pi\omega/\kappa_+}e^{i2\omega\left\{r+\frac{1}{2\kappa_+}\ln\frac{r_+-r}{r_+}-\frac{1}{2\kappa_-}\ln\frac{r-r_-}{r_+}\right\}}\\&=e^{\pi\omega/\kappa_+}e^{2i\omega r_*}e^{-i\omega v}.\end{aligned}\tag{17}$$

(17)式和(14)式第 2 式分别描述了视界内、外的出射波,因此出射波在黑洞视界面上的透过率为

$$\Gamma=\left|\frac{R_{\omega}^{\text{out}}(r>r_+)}{R_{\omega}^{\text{out}}(r<r_-)}\right|^2=e^{-2\pi\omega/\kappa_+},\tag{18}$$

进一步的计算很容易得到黑洞的辐射为精确的黑体谱.

上面的讨论中,我们没有考虑辐射出来的粒子对时空背景的反作用,作为 Reissner-Nordstrom 黑洞参数的 M 也一直保持为一个常数. 如果考虑辐射粒子的能量对时空背景的影响,并且把能量的辐射过程看作一个积分过程,那么(18)式应该写成

$$\Gamma=\prod_i\Gamma_i=e^{-2\pi\int_0^{\omega}\frac{1}{\kappa_+}d\omega'}=e^{-\int_0^{\omega}\frac{1}{T}d\omega'}=e^{\Delta S},\tag{19}$$

其中 ΔS 为辐射前后黑洞的熵差. 上面的计算过程当中利用了热力学第一定律:

$$-d\omega'=TdS',$$

即

$$dS'=-\frac{d\omega'}{T}.$$

这表明 Hawking 辐射的过程应该是一个热力学的准静态过程. 对于 Reissner-Nordstrom 黑洞,辐射前后的熵差为

$$\begin{aligned}\Delta S&=\frac{1}{4}\times4\pi\times\left((M-\omega)+\sqrt{(M-\omega)^2-Q^2}\right)^2\\&\quad-\frac{1}{4}\times4\pi\times\left(M+\sqrt{M^2-Q^2}\right)^2\\&\approx-2\pi\Big[\omega/\kappa_+-\Big(1+\frac{3M}{2\sqrt{M^2-Q^2}}\\&\quad+\frac{M^3}{4(M^2-Q^2)^{3/2}}\Big)\omega^2+\cdots\Big].\end{aligned}\tag{20}$$

上式的计算中利用了 Tailor 展开,并只保留到 ω 的二次项. 可见,(19)式的结果不再是纯热谱,除了 ω 的一次方项,还包含更高阶的贡献. 但是,这个结果正好符合量子理论幺正性的要求,同时与 Parikh、Wilczek 等及其他人后续工作所得结论是完全相同的,然而我们采用的是一个完全不同的、更加简单、物理意义更清楚的方法.

量子力学告诉我们,由一个量子初态跃迁到末态的概率可以表示成

$$\Gamma(i\to f)=|M_{fi}|^2A,$$

其中 A 为相因子,右端的第 1 项为跃迁过程概率幅的平方. 相因子可以通过对所有末态求和,并对所有的初态求平均而得到. 末态的数目可以表示为末态熵的 e^- 的指数形式,同理初态的数目可以表示为初态熵的 e^- 的指数形式. 因此,有

$$\Gamma=\frac{e^{S_{\text{final}}}}{e^{S_{\text{initial}}}}=e^{\Delta S},$$

上式与(19)式是吻合的,同时与量子力学的标准形式只相差一个因子.

4. 结果和讨论

在考虑了辐射能量对背景时空的反作用后,我们得到了出射波透过率对精确黑体谱的修正结果. 这个结果与以往用 Parikh 隧穿方法得到的结果完全吻合,并且满足量子理论的幺正性. 这个方法简单直观,物理思想清楚,而且在计算过程当中不必再考虑标量粒子和 Dirac 粒子辐射的区别,也不必考虑辐射粒子是否带有静止质量. 由于 Damour-Ruffini 方法是一个成熟的研究 Hawking 辐射的方法[21—23],因此在考虑引力反作用以后也应该很容易推广到一般的时空背景的研究中,甚至用来研究动态黑洞,这将在我们后续的工作中进行详细、深入的研究. 可见,考虑了辐射反作用以后,出射波在视界面上的透过率就出现了对黑体辐射谱的偏离,这样就有可能带出形成黑洞的物质的相关信息,有可能解决信息丢失问题.

事实上,用 Damour-Ruffini 方法计算 Reissner-

Nordstrom 黑洞的 Hawking 辐射，在不考虑辐射能量对背景时空度规反作用的情况下能够得到精确的穿透视界面的黑体辐射谱．但是，由于出射波函数方程在视界面和无穷远之间还形成了一个如方程(10)所示的势垒，因此从 Damour-Ruffini 原来的计算中无穷远观者看到的也应该是经过此势垒散射过的黑体辐射谱，是灰体谱．但通常所提到的 Hawking 辐射为黑体谱，只是对视界面外附近的区域来说的．

作者十分感谢与赵峥教授在本文的撰写过程中所进行的有益的讨论．

[1] Hawking S W 1975 *Commun*. *Math*. *Phys*. **43** 199
[2] Bekenstein J D 1973 *Phys*. *Rev*. D **7** 2333
[3] Bardeen J M，Hawking S W 1973 *Math*. *Phys*. **31** 161
[4] Hawking S W，Penrose R 1996 *The Nature of Space and Time* (Princeton：Princeton University Press)
[5] Thorne K 1994 *Black Hole and Time Warps* (New York：Norton Company)
[6] Hawking S W 2005 *Phys*. *Rev*. D **72** 084013
[7] Parikh M K，Wilczek F 2000 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **85** 5042
[8] Hemming S，Keski-Vakkuri E 2001 *Phys*. *Rev*. D **64** 044006
[9] Medved A J M 2002 *Phys*. *Rev*. D **66** 124009
[10] Vagenas E C 2001 *Phys*. *Lett*. B **503** 399
[11] Vagenas E C 2003 *Phys*. *Lett*. B **559** 65
[12] Setare M R，Vagenas E C 2004 *Phys*. *Lett*. B **584** 127
[13] Zhang J Y，Zhao Z 2005 *Phys*. *Lett*. B **618** 14
[14] Zhang J Y，Zhao Z 2006 *Phys*. *Lett*. B **638** 110
[15] Ren J，Zhang J Y，Zhao Z 2006 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **23** 2019
[16] Li H L，Jiang Q Q，Yang S Z 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 539 (in Chinese)［李慧玲、蒋青权、杨树政 2006 物理学报 **55** 539］
[17] Jiang Q Q，Yang S Z，Li H L 2006 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **45** 457
[18] Gao L，Liu W B 2006 *Journal of Beijing Normal University* (Natural Science) **42** 150 (in Chinese)［高 利、刘文彪 2006 北京师范大学学报(自然科学版) **42** 150］
[19] Damour T，Ruffini R 1976 *Phys*. *Rev*. D **14** 332
[20] Zhao S 1988 *Gen*. *Rel*. *Grav*. **20** 239
[21] Zhao Z 1999 *Black Hole Thermodynamics and Singularity of Spacetime* (Beijing：Beijing Normal University Press) (in Chinese)［赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性 (北京 北京师范大学出版社)］
[22] Zhao Z 1981 *Acta Phys*. *Sin*. **30** 1508 (in Chinese)［赵 峥 1981 物理学报 **30** 1508］
[23] Zhao Z，Dai X X 1991 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **8** 548

Damour-Ruffini method and nonthermal Hawking radiation from Reissner-Nordstrom black hole*

Liu Wen-Biao

(*Department of Physics*, *Institute of Theoretical Physics*, *Beijing Normal University*, *Beijing* 100875, *China*)

(Received 8 January 2007; revised manuscript received 6 February 2007)

Abstract

Taking into consideration the self-gravitational interaction and energy conservation, Hawking radiation from Reissner-Nordstrom black hole is re-investigated using the Damour-Ruffini method. It is found that the radiation is not exactly thermal, and the non-thermal Hawking radiation can carry information from the black hole. This can be used to explain the black hole information paradox, and the process satisfies the unitary thoery. A new method to calculate the corrected non-thermal Hawking radiation is given, which is more general. It can be used to study not only both the scalar field and Dirac field, but also massive and massless particle radiations.

Keywords: Hawking radiation, Damour-Ruffini method, unitary theory, self-gravitational interaction

PACC: 9760L, 0420

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2003CB716302) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10475013, 10373003).