第 56 卷 第 10 期 2007 年 10 月
1000-3290/2007/56(10)/5618-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.10, October, 2007

含关联噪声与时滞项的非对称双稳系统的随机共振

董小娟†

(西北工业大学理学院数学系,西安 710072)

(2007 年 1 月 2 日收到;2007 年 2 月 1 日收到修改稿)

研究了基于关联噪声的带时滞项的非对称双稳系统的随机共振,在小时滞量及绝热近似理论下得到了信噪比的精确解析表达式,表明由于时滞量的存在系统出现了随机共振.讨论了系统的时滞量、噪声相关系数及系统的非对称性对系统的信噪比的影响.

关键词:时滞反馈,信噪比,非对称双稳系统,关联噪声

PACC:0540

1. 引 言

在动力系统中,时延现象广泛存在,即系统的演化趋势不仅依赖于系统当前的状态,也依赖于系统过去某一时刻或若干时刻的状态,这类动力系统称为时滞动力系统.近年来,时滞动力系统已成为许多研究领域的重要研究对象[1—4]等.文献[4]从时滞动力系统的特点、研究方法、动力学热点问题出发,对非线性时滞动力系统的研究进展做了综述.

随着随机动力系统理论研究的进一步深化,人们发现许多随机动力系统是由多个噪声驱动的并且各噪声之间具有某种形式的关联性,且噪声之间的关联性还可以诱导非平衡相变,导致序的形成等等,因此有必要研究关联噪声对系统的影响.

现有的关于随机共振的文献大多研究的是不带时滞量的双稳或多稳系统[5—13],涉及到有关带时滞项的随机共振的文献还不多见.本文研究了基于关联噪声的带时滞项的非对称双稳系统的随机共振.

一般的时滞随机动力系统可以写成如下的微分方程[14,15],即

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=h(x(t),x(t-\tau))-r+g_1(x(t))\xi(t)+g_2(x(t))\eta(t)+F(t),\tag{1}$$

其中 τ 为该系统的时滞量,常数 r 刻画双稳系统的非对称性.$\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为相关的白噪声,它们的均值和方差为

$$\begin{aligned}\langle\xi(t)\rangle&=\langle\eta(t)\rangle=0,\\ \langle\xi(t)\xi(t')\rangle&=2D\delta(t-t'),\\ \langle\eta(t)\eta(t')\rangle&=2\alpha\delta(t-t'),\\ \langle\xi(t)\eta(t')\rangle&=\langle\eta(t)\xi(t')\rangle\\ &=2\lambda\sqrt{\alpha D}\delta(t-t'),\end{aligned}\tag{2}$$

其中 α 和 D 分别为加性和乘性噪声强度,(2)式中 $\delta(t-t')$ 中的 t' 表示的不是时滞量,$\delta(t-t')$ 是用来定义噪声的方差及协方差的.λ 是噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的关联系数.

由文献[5]作如下的变换,令

$$\eta_1(t)=\eta(t)-\lambda\sqrt{\alpha/D}\xi(t),\tag{3}$$

则

$$\langle\eta_1(t)\rangle=0,\langle\eta_1(t)\eta_1(t')\rangle=2\alpha(1-\lambda)^2\delta(t-t'),$$

且 $\xi(t)$ 和 $\eta_1(t)$ 为不相关的白噪声.即

$$\langle\xi(t)\ \eta_1(t')\rangle=\langle\eta_1(t)\xi(t')\rangle=0.$$

本文为了讨论起来方便,研究如下的模型:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)-x^3(t-\tau)-r+x(t)\xi(t)+\eta(t)+F(t),\tag{4}$$

显然,(4)式中的确定性部分 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)-x^3(t-\tau)-r$ 当 $\tau=0$ 的时候是一个非对称的双稳系统,已有文献对此类系统进行了研究.

将方式(1)中的周期信号 $F(t)$ 取为周期为 T 的矩形信号 $QG(t)$,Q 为常数,$G(t)$ 可表示为

† E-mail:xiaojuand@163.com

$$G(t+T)=G(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant T/2\\ -1, & T/2<t\leqslant T\end{cases}\tag{5}$$

下面通过计算信噪比来研究系统(4)的信噪比随系统参数的变化情况.

2. 方程(4)在(5)式激励下的信噪比

为方便 $x(t)$ 记作 x, $x(t-\tau)$ 记作 x_τ. 根据(1)—(5)式,由文献[14—19]可得系统(1)的概率密度函数 $\rho(x,t)$满足下面的 FP 方程：

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\Big[h_a(x)+G_a(x)\frac{\mathrm{d}G_a(x)}{\mathrm{d}x}\Big]\rho(x,t)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}[G_a^2(x)]\rho(x,t),\tag{6}$$

其中 $h_a(x)=[x-x_\tau^3+r+F(t)](1+3\tau x^2)$,

$$G_a(x)=[D(x+\lambda\sqrt{\alpha/D})^2+\alpha(1-\lambda^2)](1+3\tau x^2),$$

由(6)式可得准稳态概率密度为 $\rho_{st}(x)=N[G_a(x)]^{-1/2}\exp\Big[-\frac{\widetilde{U}(x)}{D}\Big]$,其中 N 为归一化常数,$G_a(x)=[D(x+\lambda\sqrt{\alpha/D})^2+\alpha(1-\lambda^2)](1-3\tau x^2)$,广义势函数为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(x)={}&-D\ln[D(x+m)^2+n]-D\ln(1+3\tau x^2)\\&+\frac{E}{2[D(x+m)^2+n]}\\&-\frac{C-m}{2n}\sqrt{D}\Big[\frac{\sqrt{D}(x+m)}{D(x+m)^2+n}\\&+\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\sqrt{\frac{D}{n}}(x+m)\Big]\\&-\frac{AD}{6\tau}\ln(1+3\tau x^2)-\frac{B}{\sqrt{3\tau}}\arctan\sqrt{3\tau}x,\end{aligned}$$

其中 $m=\lambda\sqrt{\alpha/D}$, $n=\alpha(1-\lambda^2)$, $A=\frac{1}{2\mu_1}(-3\tau R-n_2B)$, $E=\frac{-1}{3\tau}(1+AD)$, $n_1=u_2-\frac{D}{3\tau}$, $B=\frac{1}{4\mu_1^2}\Big[\frac{2(3\tau+1)\mu_1}{3\tau}+3\tau Rn_1\Big]$, $C=R-\mu_2B$, $\mu_1=Dm$, $\mu_2=Dm^2+n$.

显然 $x_\pm=\pm1$ 和 $x_0=0$ 分别为未扰系统的稳定和不稳定点. 在绝热近似条件和时间尺度 $T\gg\omega_0^{-1}$ 时(其中 ω_0 代表方程(1)仅受加性和乘性白噪声的特征转换率),粒子由 x_+ 所在的势阱跃迁到 x_- 所在的势阱的跃迁率以及相应的逆跃迁率为

$$W_\pm=\frac{|U_0''(x_0)U(x_\pm)|^{1/2}}{2\pi}\exp\Big[\frac{\widetilde{U}(x_\pm)-\widetilde{U}(x_0)}{D}\Big],$$

且可计算得

$$\begin{aligned}W_+={}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{\frac{1}{D}\Big\{-D\ln[D(1+m)^2+n]\\&-D\ln(1+3\tau)+\frac{E}{2[D(1+m)^2+n]}\\&-\frac{C-m}{2n}\sqrt{D}\Big[\frac{\sqrt{D}(1+m)}{D(1+m)^2+n}\\&+\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\sqrt{\frac{D}{n}}(1+m)\Big]-\frac{AD}{6\tau}\ln(1+3\tau)\\&-\frac{B}{\sqrt{3\tau}}\arctan\sqrt{3\tau}\Big\}-\Big\{-D\ln[Dm^2+n]\\&+\frac{E}{2[Dm^2+n]}-\frac{C-m}{2n}\sqrt{D}\\&\times\Big[\frac{\sqrt{D}m}{Dm^2+n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\sqrt{\frac{D}{n}}m\Big]\Big\}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_-={}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{\frac{1}{D}\Big\{-D\ln[D(-1+m)^2+n]\\&-D\ln(1+3\tau)+\frac{E}{2[D(-1+m)^2+n]}\\&-\frac{C-m}{2n}\sqrt{D}\Big[\frac{\sqrt{D}(1+m)}{D(-1+m)^2+n}\\&+\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\sqrt{\frac{D}{n}}(-1+m)\Big]-\frac{AD}{6\tau}\ln(1+3\tau)\\&+\frac{B}{\sqrt{3\tau}}\arctan\sqrt{3\tau}\Big\}-\Big\{-D\ln[Dm^2+n]\\&+\frac{E}{2[Dm^2+n]}-\frac{C-m}{2n}\sqrt{D}\\&\times\Big[\frac{\sqrt{D}m}{Dm^2+n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\sqrt{\frac{D}{n}}m\Big]\Big\}\Big\}.\end{aligned}$$

由文献[6]知,双稳模型可以看作是一个两态模型,$n_\pm$ 分别表示在稳态 $x_\pm$ 的概率. 则 $n_\pm$ 满足概率交换的主方程

$$\dot{n}_+=-\dot{n}_-=W_-(t)n_--W_+(t)n_+.\tag{7}$$

在绝热近似条件下,由于双稳模型的局部平衡的确立要比跃迁概率之间的交换快的多. 则(7)式的初始分布为

$$n_+(t)=\frac{W_-(t)}{W_-(t)+W_+(t)},$$

$$n_-(t)=\frac{W_+(t)}{W_-(t)+W_+(t)},\tag{8}$$

对于任意函数 f,下面的公式成立：

$$f[r+AG(t)]=\frac{1}{2}[f(r+A)+f(r-A)$$

$$+ G(t)\left(f(r+A) - f(r-A)\right)\Big]. \tag{9}$$

记 $n(-, t+\tau I+, t)$（或 $n(+, t+\tau I-, t)$）为 t 时刻处于 x_+（或 x_-）而 $t+\tau$ 时刻跃迁到 x_-（或 x_+）的概率，由(8)式有

$$n(-, t+\tau I+, t) = n_+(t) - \frac{W_- W_+}{(W_+ + W_-)^2 n_-(t)} \times \exp\{-(W_+ + W_-)\tau\}, \tag{10}$$

$$n(+, t+\tau I-, t) = n_+(t) - \frac{W_- W_+}{(W_+ + W_-)^2 n_+(t)} \times \exp\{-(W_+ + W_-)\tau\}, \tag{11}$$

利用性质(9)式，由(10)，(11)式及文献[10]中的方法，可以解得相关函数的表达式：

$$K(t) = B_2\langle G(t)G(0)\rangle + C\delta(t), \tag{12}$$

其中

$$\langle G(t)G(0)\rangle = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^2\exp[-\mathrm{i}(2k+1)\Omega t],$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$B_2 = \frac{a}{4b}\{y_+ + y_-\}, \quad y_\pm = \frac{W_\pm - W_\mp}{W_\pm + W_\pm},$$

$$C = \frac{a}{2b}\{C_+ + C_-\}, \quad C_\pm = \frac{8W_\pm W_\mp}{(W_\pm + W_\pm)^3}.$$

根据(12)式功率谱密度函数 $S(\omega)$ 定义为相关函数的傅里叶变化，可写为

$$S(\omega) = S_1(0) + S_2(\omega),$$

其中

$$S_1(\omega) = C,$$

$$S_2(\omega) = B_2\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^2\delta(\omega - (2k+1)\Omega],$$

$S_1(0)$为噪声背景下零频处相应的谱密度，$S_2(\omega)$为与输出信号相应的谱密度．则信噪比 SNR 可表示为

$$\mathrm{SNR} = \frac{8}{\pi}\frac{B_2}{C}. \tag{13}$$

3．时滞量、噪声相关性及系统的非对称性对信噪比的影响

利用(13)式，我们将讨论系统的时滞量 τ、噪声关联系数 λ 和静态非对称性 r 对信噪比的影响．为方便讨论，在以下仅讨论了 $r>0$ 的情况．

在图1中，给出了信噪比作为加性噪声强度 α 的函数随着时滞量 τ 变化的曲线．图中曲线下方数字表示不同的时滞量 τ 的取值．由图可见，由于时滞量的存在，SNR-α 曲线上出现了单峰，即系统出现了随机共振现象．该现象在系统没有时滞的时侯是没有的．且随着时滞量 τ 的增大，峰的位置降低，也就是说，在实际的时滞系统当中，通过减小时滞量可以增大信噪比．

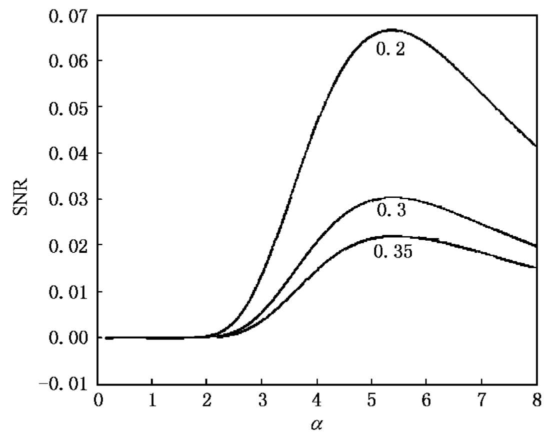

图1 信噪比作为 α 的函数随着 τ 变化的曲线($r=3$, $Q=1$, $D=4$, $\lambda=0.8$)

图2给出了信噪比作为 α 的函数随着噪声的相关系数 λ 变化的曲线．图中曲线下方数字表示不同的相关系数 λ 的取值，该组曲线上单峰的出现意味着系统出现了随机共振，且随着相关系数 λ 的增大，信噪比的数值减小，且峰的位置偏向 λ 减小的方向．

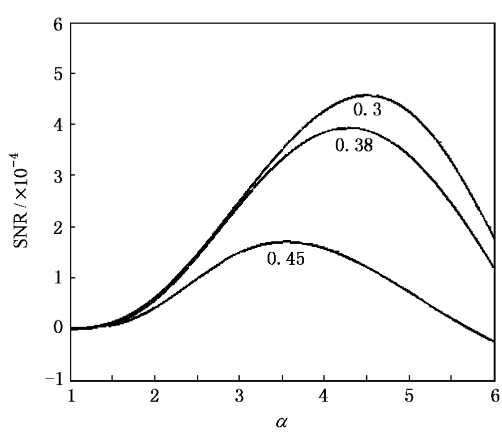

图2 信噪比作为 α 的函数随着 λ 变化的曲线($\tau=0.2$, $D=4$, $Q=1$, $r=3$)

图3中，给出了信噪比作为 r 的函数随着 λ 变化的曲线．图中曲线下方的数字表示不同的相关系数 λ 的取值．SNR-r 曲线是递增的，说明系统没有随机共振出现．且随着系统的非对称性 r 的增大，系统

的信噪比是增大的，但噪声的相关系数对信噪比的影响是没有规律的，有可能系统的信噪比随着 λ 的增大而增大，有可能信噪比随着 λ 的增大而减小，这就说明，在实际的系统中，通过增加系统的非对称性来增大系统的信噪比比改变系统的噪声的相关系数来增大系统的信噪比更容易实现．

图 4 给出了信噪比作为 α 的函数随着非对称 r 变化的曲线．图中曲线下方的数字表示不同的非对称 r 的取值．由曲线可见，系统出现了随机共振现象．且随着系统非对称性 r 的增大，系统的信噪比减小，且峰的位置随着 r 的增大而偏向 α 增大的方向．

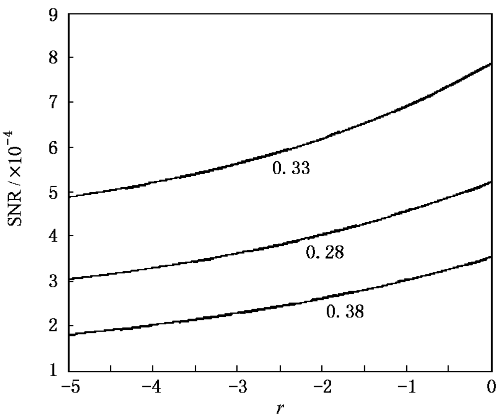

图 3　信噪比作为 r 的函数随着 λ 变化的曲线（$\tau=0.35$，$Q=1$，$D=4$，$r=5$）

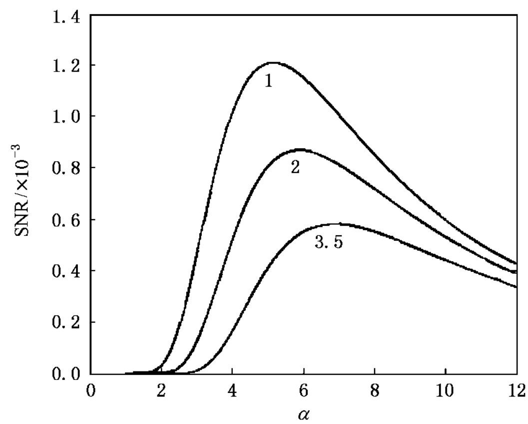

图 4　信噪比作为 α 的函数随着非对称 r 变化的曲线（$a=b=1$，$A=0.1$，$D=4$，$\lambda=0.3$）

4．结论和讨论

时滞广泛存在于自然界中[20]，例如，网络传输、生物系统和高新技术，特别是受控系统中．随着对分析精度、控制速度和控制性能要求的不断提高，时滞已经成了广大学者和工程技术人员必须面对的难题．由于时滞的存在，系统解空间的维数由有限变成了无限，这给受控系统的动力学分析带来了巨大的困难．到目前为止，对这类时滞微分方程的分析，绝大多数集中在确定性情形，而对于随机激励下的所谓随机泛函微分方程的分析还处于萌芽阶段．作者在本文尝试了基于关联噪声的带时滞项的非对称双稳系统的随机共振，在小时滞量及绝热近似理论下得到了信噪比的精确解析表达式，表明由于时滞量的存在系统出现了随机共振．并具体讨论了系统的时滞量、噪声相关系数及系统的非对称性对系统的信噪比的影响．

[1] Qian C Z, Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]

[2] Ren H P, Liu D, Han C S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2694 (in Chinese) [任海鹏、刘　丁、韩崇昭 2006 物理学报 **55** 2694]

[3] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3329 (in Chinese) [莫嘉琪、王　辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 3329]

[4] Hu H Y, Wang Z H 1999 *Adv. Mech.* **29** 501 (in Chinese) [胡海岩、王在华 1999 力学进展 **29** 501]

[5] Jin Y F, Xu W, Shen J W 2005 *Journal of Dynamics and Control* **3** 32 (in Chinese) [靳艳飞、徐　伟、申建伟 2005 动力学与控制学报 **3** 32]

[6] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev.* A **39** 4854

[7] Budini A A, Caceres M O 2004 *Phys. Rev.* E **70** 46104

[8] Hasegawa H 2004 *Phys. Rev.* E **70** 21911

[9] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30 (in Chinese) [冷永刚、王太永、郭　焱、吴振勇 2007 物理学报 **56** 30]

[10] Xu W, Jin Y F, Li W, Ma S J 2005 *Chin. Phys. Soc.* **14** 1077

[11] Jin Y F, Xu W, Li W, Xu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 (in Chinese) [靳艳飞、徐　伟、李　伟、徐　猛 2005 物理学报 **54** 2562]

[12] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢　勇 2003 物理学报 **52** 2712]

[13] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese) [靳艳飞、徐　伟、马少娟、李　伟 2005 物理学报 **54** 3480]

[14] Frank T D 2005 *Phys*. *Rev*. E **71** 031106

[15] Wu D，Zhu S Q 2007 *Phys*. *Lett*. A(In Press)

[16] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai：Shanghai Science and Technological Education Publishing House)(in Chinese)[胡 岗 1994 随机力与非线性系统,(上海:上海科技教育出版社)]

[17] Guillouzic S，Heureux I L，Longtin A 1999 *Phys*. *Rev*. E **59** 3970

[18] Guillouzic S，Heureux I L，Longtin A 2000 *Phys*. *Rev*. E **61** 4906

[19] Frank T D 2004 *Phys*. *Rev*. E **69** 061104

[20] Sun Z K，Xu W，Yang X L 2006 *Journal of Vibration Engineering* **19** 57 (in Chinese)[孙中奎、徐 伟、杨晓丽 2006 振动工程学报 **19** 57]

Stochastic resonance in an asymmetric bistable system with time-delayed feedback and correlated noises

Dong Xiao-Juan†

(*Department of Applied Mathematics*，*Northwestern Polytechnical University*，*Xi'an* 710072，*China*)

(Received 2 January 2007；revised manuscript received 1 February 2007)

Abstract

In this paper，the phenomenon of stochastic resonance in an asymmetric bistable system with time-delayed feedback and correlated noises is investigated . The explicit expression for signal-to-noise ratio is obtained under the condition of small time delay approximation and adiabatic approximation. The effects of the delay time，the noises correlation and the static asymmetry to the signal-to-noise ratio are discussed.

Keywords：time-delayed feedback，signal-to-noise ratio，asymmetrication bistable system，correlated noises

PACC：0540

† E-maill：xiaojuand@163.com