

周期混合信号和噪声联合激励下的非对称 双稳系统的随机共振^{*}

周丙常[†] 徐 伟

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2007 年 1 月 29 日收到 2007 年 2 月 8 日收到修改稿)

研究了周期混合信号和关联的乘性和加性噪声联合激励下的非对称双稳系统的随机共振现象. 运用两态理论给出了基频和高阶谐频信噪比的理论结果. 发现对于基频和高阶谐频情形下均出现随机共振, 并且高阶谐频存在抑制现象. 同时研究了非对称系数和噪声强度以及噪声之间关联强度对信噪比的影响.

关键词: 非对称双稳系统, 随机共振, 信噪比, 周期混合信号

PACC: 0540, 0250

1. 引 言

随机共振的概念是由 Benzi 等^[1]和 Nicolis 等^[2]于 20 世纪 80 年代初在研究第四纪全球气象冰川问题时提出的. 此后, 对随机共振现象的研究课题已成为近年来人们关注的重要课题, 并进行了大量的理论和实验研究^[3-8]. 贾亚等将噪声之间的关联强度引入双稳系统的随机共振研究中, 发现噪声之间的关联强度在随机共振的研究中起着重要的作用. Collins 等^[9]在输入非周期信号的双稳系统中发现了“非周期随机共振”, Goychuk 等^[10]研究了“非马尔可夫随机共振”, 由噪声驱动的线性系统也发现了随机共振^[11-14], 曹力等^[15-18]对具有信号调制噪声的单模激光系统进行了深入的研究并得到一些新的结果. 因此, 随机共振已经广泛地应用于很多科学领域, 比如激光物理、生物物理、化学物理等.

上面的研究仅涉及到单个周期信号激励的系统. 对于多个周期信号激励的双稳系统中产生随机共振现象的研究也逐渐引起人们的兴趣. Landa 和 McClintock^[19]在仅有两个周期场驱动过的阻尼双稳系统中发现了振动共振. Gittenman^[20]发展了由两个周期场激励的双稳振子响应的理论结果. Grigorenko 等^[21, 22]研究了具有混频信号的双稳系统的响应, 并

通过一个铁榴石薄膜胶片实验证明了随机共振的存在. 靳艳飞等^[23]研究了非关联的加性和乘性白噪声以及周期信号共同作用的非对称双稳系统, 并给出了高阶谐频下的信噪比. 然而噪声之间的关联在实际中经常存在, 也有很多学者对此做了研究^[24-30], 本文考虑关联的加性和乘性白噪声以及周期混合信号共同作用的非对称双稳系统.

2. 周期混合信号激励下非对称双稳系统的信噪比

考虑关联的加性和乘性白噪声以及周期混合信号共同作用的一维非对称过阻尼双稳系统, 该系统可以由朗之万方程描述:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU_0(x)}{dx} + r + x\xi(t) + \eta(t) + F(t), \quad (1)$$

$$U_0(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4, \quad (2)$$

其中 $U_0(x)$ 表示对称双稳势函数, r 表示双稳系统的偏度, 周期混合信号由下式给出:

$$F(t) = f_1 \cos(\Omega_1 t) + f_2 \cos(\Omega_2 t), \quad (3)$$

$\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别表示乘性和加性高斯白噪声, 其统计性质由其均值和方差给出:

$$\xi(t) = \eta(t) = 0, \quad (4a)$$

$$\xi(t)\xi(s) = 2D\delta(t-s), \quad (4b)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10472091, 10332030)资助的课题.

[†] E-mail: leiyou@nwpu.edu.cn.

$$\eta(t)\eta(s) = 2Q\delta(t-s), \quad (4c)$$

$$\xi(t)\eta(s) = \eta(t)\xi(s) = 2\lambda\sqrt{QD}\delta(t-s), \quad (4d)$$

其中 D 和 Q 分别代表乘性和加性高斯噪声强度, λ 为它们之间的关联系数.

根据方程 (1)–(4) 相应的 FPK 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [ax - bx^3 + r + F(t)] \\ & + Dx + \lambda\sqrt{QD} P(x,t) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [Dx^2 + 2\lambda\sqrt{QD}x + Q] P(x,t), \end{aligned} \quad (5)$$

根据方程 (5) 可以得到准稳态概率密度

$$P_{st}(x) = N [B(x)]^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Phi(x)}{D}\right), \quad (6)$$

其中 N 为归一化常数.

$$B(x) = Dx^2 + 2\lambda\sqrt{QD}x + Q, \quad (7a)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x dx \{ -U'_0(x) + r + F(t) \} D/B(x), \quad (7b)$$

设 $x_{\pm} = \pm\sqrt{a/b}$ 和 $x_0 = 0$ 分别为未扰系统的稳定点和不稳定点, 在绝热近似的条件下, 粒子从稳态 $x_+(x_-)$ 到稳态 $x_-(x_+)$ 的跃迁率为 $W_+(W_-)$, 其表达式为

$$\begin{aligned} W_{\pm} = & \frac{|U''_0(x_0)U''_0(x_{\pm})|^{1/2}}{2\pi} \exp\left[\frac{\Phi(x_{\pm}) - \Phi(x_0)}{D}\right] \\ = & W_{\pm 0} \exp(\mp q_{\pm} F(t)), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $W_{\pm 0}$ 表示 (1) 式在没有周期信号激励时的跃迁率, 表达式为

$$W_{\pm 0} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{D} p_{\pm} \mp r q_{\pm}\right), \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} p_{\pm} = & -\frac{a}{2} \pm 2b\lambda\sqrt{\frac{a}{bR}} - \alpha \ln \left| \frac{aR}{b} \pm 2\lambda\sqrt{\frac{aR}{b}} + 1 \right| \\ & - \beta \left(\arctan \frac{\lambda \pm \sqrt{\frac{aR}{b}}}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \arctan \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$q_{\pm} = \frac{\sqrt{R}}{D\sqrt{1-\lambda^2}} \left(\arctan \frac{\lambda \pm \sqrt{\frac{aR}{b}}}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \arctan \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right), \quad (10b)$$

$$\alpha = \frac{b(4\lambda^2 - 1)}{2R} - \frac{a}{2}, \quad (10c)$$

$$\beta = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(a + \frac{b(3-4\lambda^2)}{R} \right), \quad (10d)$$

$$R = \frac{D}{Q}. \quad (10e)$$

由文献 [5] 知道, 我们可以应用两态理论进行研究. 设 n_{\pm} 代表粒子在稳态 x_{\pm} 的概率密度, 粒子概率密度的主方程可以写为

$$\begin{aligned} \frac{dn_{+}}{dt} = & -\frac{dn_{-}}{dt} = W_{-}(t)n_{-} - W_{+}(t)n_{+} \\ = & W_{-}(t) - [W_{+}(t) + W_{-}(t)]n_{+}. \end{aligned} \quad (11)$$

两态模型的概率密度函数可以写为

$$P(x,t) = n_{+}(t)\delta(x-x_{+}) + n_{-}(t)\delta(x-x_{-}). \quad (12)$$

在绝热近似条件下, 对 (8) 式中的跃迁率 W_{\pm} 分别以小参数 $\epsilon_{\pm} = q_{\pm} F(t)$ 为基进行级数展开:

$$n_{\pm} = n_{\pm 0} + n_{\pm 1} + n_{\pm 2} + \dots, \quad (13a)$$

$$W_{\pm} = W_{\pm 0} + W_{\pm 1} + W_{\pm 2} + \dots, \quad (13b)$$

由 (11) 和 (13) 式可得

$$\frac{dn_{+0}}{dt} = W_{-0} - (W_{+0} + W_{-0})n_{+0}, \quad (14a)$$

$$\frac{dn_{+1}}{dt} = \frac{W_{+0}W_{-1} - W_{+1}W_{-0}}{W_{+0} + W_{-0}} - (W_{+0} + W_{-0})n_{+1}, \quad (14b)$$

$$\frac{dn_{+2}}{dt} = -(W_{-1} + W_{+1})n_{+1} - (W_{+0} + W_{-0})n_{+2}. \quad (14c)$$

其中 $n_{\pm 0}$ 表示调制信号 $F(t) = 0$ 时的值.

通过求解微分方程 (14a)–(14c), 可以得到 $n_{\pm 0}$, $n_{\pm 1}$ 和 $n_{\pm 2}$ 的表达式:

$$n_{+0} = \frac{W_{-0}}{W_{+0} + W_{-0}}, \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} n_{+1} = & \exp[-(W_{+0} + W_{-0})(t-t_0)] \\ & \times (W_{+0} + W_{-0})(t-t_0) \\ & \times \left[n_{+0} + \int_0^t \frac{W_{+0}W_{-1}(t') - W_{-0}W_{+1}(t')}{W_{+0} + W_{-0}} \right. \\ & \left. \times \exp\{-(W_{+0} + W_{-0})(t') - t_0\} dt' \right] \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} n_{+2} = & \exp[-(W_{+0} + W_{-0})(t-t_0)] \\ & \times (W_{+0} + W_{-0})(t-t_0) \\ & \times \left[n_{+0} + \int_0^t -(W_{+0} + W_{-0})n_{+1}(t') \right. \\ & \left. \times \exp\{-(W_{+0} + W_{-0})(t') - t_0\} dt' \right] \end{aligned} \quad (15c)$$

其中 $W_{\pm 0}$ 在(9)式中定义, $W_{\pm 1}(t)$ 的表达式可以由(8)式分别关于小参数 $\varepsilon_{\pm} = q_{\pm} F(t)$ 展开得到.

根据平均自相关函数的定义可知

$$\begin{aligned} x(t+\tau)x(t) &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} [x_+^2 n_+(t+\tau|x_+, t)n_+(t|x_0, t_0) \\ &\quad + x_+ x_- n_+(t+\tau|x_-, t)n_-(t|x_0, t_0) \\ &\quad + x_+ x_- n_-(t+\tau|x_+, t)n_+(t|x_0, t_0) \\ &\quad + x_-^2 n_-(t+\tau|x_-, t)n_-(t|x_0, t_0)] dt. \end{aligned} \quad (16)$$

对平均自相关函数做傅里叶变换可以得到功率谱 $S(\Omega)$, 当 $f_1 \neq 0$ 并且 $f_2 = 0$ 时, 基频情形下对应的功率谱 $S(\Omega)$ 为

$$S(\Omega) = S_1(\Omega_1, \Omega) + S_2(\Omega_1)S(\Omega - \Omega_1), \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} S_1(\Omega_1, \Omega) &= \left[\frac{1}{\cosh^2(rq_{\pm})} - \frac{2\mu^2}{v^2 + \Omega_1^2} \right] \\ &\quad \times \frac{4av}{b(v^2 + \Omega^2)}, \end{aligned}$$

$$S_2(\Omega) = \frac{4\pi a \mu^2}{b(v^2 + \Omega_1^2)} \delta(\Omega - \Omega_1),$$

$$\mu = \frac{af_1 q_{\pm}}{\sqrt{2\pi} \cosh(rq_{\pm})} \exp\left(-\frac{P_{\pm}}{D}\right),$$

$$v = \frac{\sqrt{2}a}{\pi} \exp\left(-\frac{P_{\pm}}{D}\right) \cosh(rq_{\pm}).$$

$S_1(\Omega_1, \Omega)$ 来源于绝热近似条件下的输出噪声, $S_2(\Omega)$ 来源于绝热近似条件下的输出信号. 信噪比定义为输出信号功率谱与此处相应噪声功率谱的比值.

$$SNR = \frac{\pi a f_1^2 q_{\pm}^2}{2\sqrt{2} \cosh(rq_{\pm})} \exp\left(-\frac{P_{\pm}}{D}\right) \left[1 - \frac{2a^2 f_1^2 q_{\pm}^2 \exp\left(-\frac{2P_{\pm}}{D}\right)}{\pi(\Omega^2 + 2a^2 \exp\left(-\frac{2P_{\pm}}{D}\right) \cosh^2(rq_{\pm}) \pi^2)} \right]^{-1}. \quad (18)$$

运用上面相同的计算方法, 可以得到在 $\Omega_1, \Omega_2 \ll W_{+0} + W_{-0}$ 的条件下, 高阶谐频对应的信噪比

$$SNR_1(\Omega = \Omega_1 + \Omega_2) = \frac{\pi a f_1^2 f_2^2 q_{\pm}^6 D^2}{\sqrt{2} \cosh(rq_{\pm})} \exp\left(-\frac{P_{\pm}}{D}\right) \left[1 - \frac{2a^2 f_1^2 q_{\pm}^2 \exp\left(-\frac{2P_{\pm}}{D}\right)}{\pi(\Omega^2 + 2a^2 \exp\left(-\frac{2P_{\pm}}{D}\right) \cosh^2(rq_{\pm}) \pi^2)} \right]^{-1} \tanh^2(rq_{\pm}), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} SNR_2(\Omega = \Omega_1 + 2\Omega_2) &= \frac{\sqrt{2} \pi a f_1^2 f_2^4 q_{\pm}^8 D^2}{\cosh(rq_{\pm})} \exp\left(-\frac{P_{\pm}}{D}\right) \left[1 - \frac{2a^2 f_1^2 q_{\pm}^2 \exp\left(-\frac{2P_{\pm}}{D}\right)}{\pi(\Omega^2 + 2a^2 \exp\left(-\frac{2P_{\pm}}{D}\right) \cosh^2(rq_{\pm}) \pi^2)} \right]^{-1} \\ &\quad \times \tanh^2[1 + 3 \tanh^2(rq_{\pm})]. \end{aligned} \quad (20)$$

3. 结果和讨论

对于基频情形下的随机共振, 由于文献[29]已经讨论过, 本文不再讨论. 下面讨论乘性噪声强度 D , 加性噪声强度 Q , 静态非对称性 r 和噪声关联系数 λ 对高阶谐频信噪比(19)–(20)式的影响.

在图1和图2中, 我们画出了高阶谐频信噪比作为乘性噪声强度 D 的函数随不同的噪声关联系数 λ 变化的曲线. 曲线呈钟形, 即出现了随机共振. 当取相同的参数值时, 图2中 SNR_2 的值要小于图1中 SNR_1 的值, 该结果与文献[31]的双稳系统研究结果一致. 因此, 谐频的阶数越高, 信噪比的值越小, 即高阶谐频对信噪比起抑制作用. 由图1和图2可

以看出,当 D 取值很小时, SNR_1 和 SNR_2 随着 λ 的增大而减少,然后当 D 的值继续增加时, SNR_1 和 SNR_2 随着 λ 的增大而增大.同时,随着 λ 的增大,共振峰的位置向右移动.并且峰值随着 λ 的增大而增大.

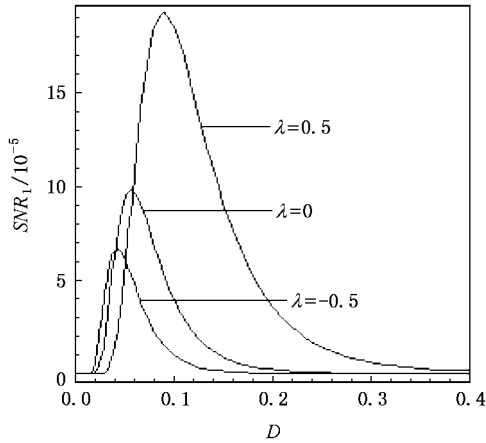


图 1 SNR_1 作为 D 的函数随不同的 λ 的变化曲线 $r = 0.1$, $a = b = 1$, $f_1 = 0.04$, $f_2 = 0.01$, $\Delta\Omega_1 = 0.3$, $\Delta\Omega_2 = 0.1$, $R = 1$, $\alpha(t = 0) = x_0$.

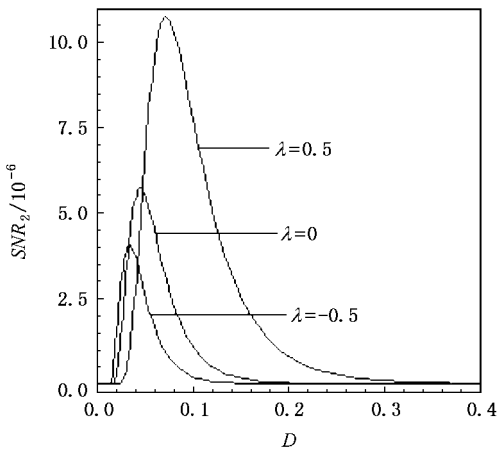


图 2 SNR_2 作为 D 的函数随不同的 λ 的变化曲线 $r = 0.1$, $a = b = 1$, $f_1 = 0.04$, $f_2 = 0.01$, $\Delta\Omega_1 = 0.3$, $\Delta\Omega_2 = 0.1$, $R = 1$, $\alpha(t = 0) = x_0$.

图 3 和图 4 给出了高阶谐波信噪比作为加性噪声强度 Q 的函数随不同的噪声关联系数 λ 变化的曲线. 曲线上出现了峰值,即产生了随机共振. 当取相同的参数值时,图 4 中 SNR_2 的值要小于图 3 中 SNR_1 的值,同样说明了高阶谐波对信噪比起抑制作用. 当 Q 取值较小时, SNR_1 和 SNR_2 随着 λ 的增大

而减少,然后当 Q 的值继续增加时, SNR_1 和 SNR_2 随着 λ 的增大而增大.同时,随着 λ 的增大,共振峰的位置向右移动.并且峰值随着 λ 的增大而减小.

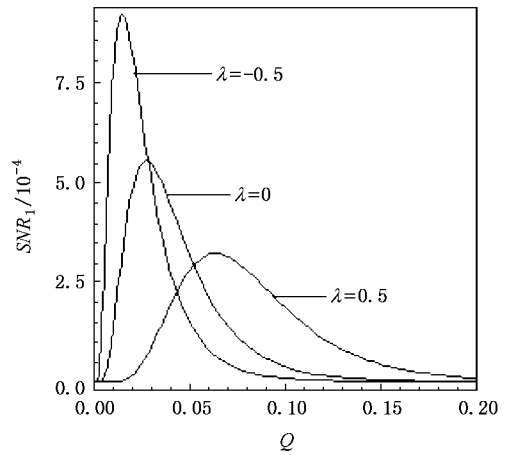


图 3 SNR_1 作为 Q 的函数随不同的 λ 的变化曲线 $r = 0.1$, $a = b = 1$, $f_1 = 0.04$, $f_2 = 0.01$, $\Delta\Omega_1 = 0.3$, $\Delta\Omega_2 = 0.1$, $D = 0.1$, $\alpha(t = 0) = x_0$.

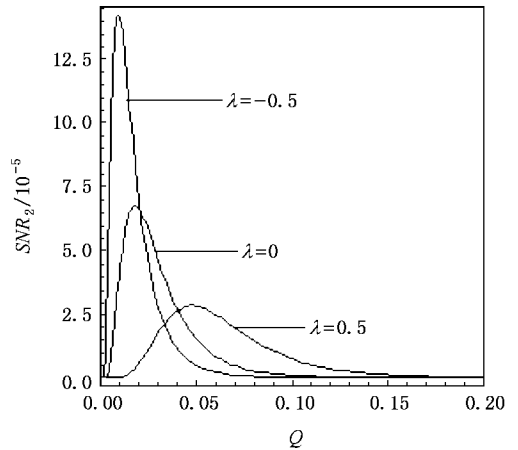


图 4 SNR_2 作为 Q 的函数随不同的 λ 的变化曲线 $r = 0.1$, $a = b = 1$, $f_1 = 0.04$, $f_2 = 0.01$, $\Delta\Omega_1 = 0.3$, $\Delta\Omega_2 = 0.1$, $D = 0.1$, $\alpha(t = 0) = x_0$.

图 5 和图 6 给出了高阶谐波信噪比作为噪声关联系数 λ 的函数随不同 r 的变化的曲线. 在非对称情形下,当 $\lambda > 0$ 时,信噪比曲线有明显的单峰出现,即出现了随机共振现象. 该结果与曹力和吴大进^[32]研究的线性系统随机共振的结果吻合. SNR_1 和 SNR_2 均随着 r 的增大而减小,同时共振峰向左移动.

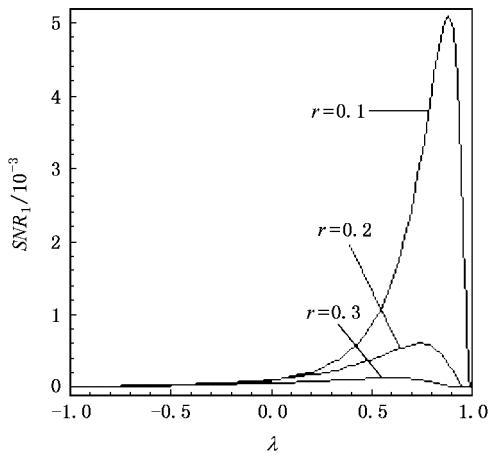


图5 SNR_1 作为 λ 的函数随不同的 r 的变化曲线 $a = b = 1$, $f_1 = 0.04$, $f_2 = 0.01$, $\Omega_1 = 0.3$, $\Omega_2 = 0.1$, $D = 0.1$, $R = 1$, $x(t=0) = x_-$

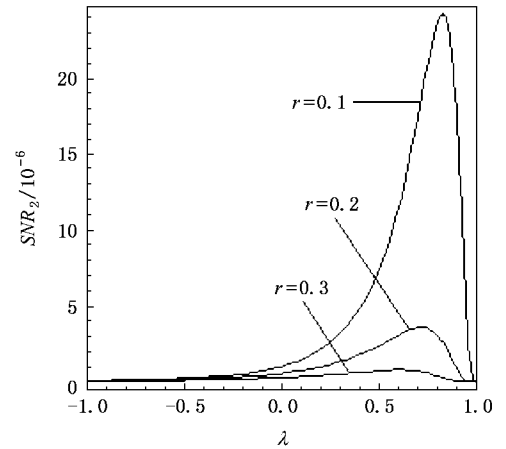


图6 SNR_2 作为 λ 的函数随不同的 r 的变化曲线 $a = b = 1$, $f_1 = 0.04$, $f_2 = 0.01$, $\Omega_1 = 0.3$, $\Omega_2 = 0.1$, $D = 0.1$, $R = 1$, $x(t=0) = x_-$

- [1] Benzi R, Suter A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453
- [2] Nicolis C, Nicolis G 1981 *Tellus*. **33** 225
- [3] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
- [4] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
- [5] McNamara B, Wiesenfeld K. 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
- [6] Dykman M I, Mannella R, McClintock P V E, Stocks N G 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 2606
- [7] Hu G, Nicolis G, Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
- [8] Zhou T, Moss F, Jung P 1990 *Phys. Rev. A* **42** 3161
- [9] Collins J J, Chow C C, Capela A C, Imhoff T T 1996 *Phys. Rev. E* **54** 5575
- [10] Goychuk I, Hanggi P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 070601
- [11] Berdichevsky V, Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161
- [12] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [13] Jin Y F, Xu W, Li W, Xu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 (in Chinese)[靳艳飞、徐伟、李伟、徐猛 2005 物理学报 **54** 2562]
- [14] Xu W, Jin Y F, Xu M, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5027 (in Chinese)[徐伟、靳艳飞、徐猛、李伟 2005 物理学报 **54** 5027]
- [15] Wang J, Cao L, Wu D J 2003 *Chin Phys. Lett.* **20** 1217
- [16] Cheng Q H, Cao L, Wu D J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2556 (in Chinese)[程庆华、曹力、吴大进 2004 物理学报 **53** 2556]
- [17] Han L B, Cao L, Wu D J, Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2127 (in Chinese)[韩立波、曹力、吴大进、王俊 2004 物理学报 **53** 2127]
- [18] Wang J, Cao L, Wu D J 2004 *Chin. Phys.* **13** 1811
- [19] Landa P S, McClintock P V E 2000 *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** L433
- [20] Gitterman M 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 5729
- [21] Grigorenko A N, Nikitin P I, Roschepkin G V 1996 *J. Appl. Phys.* **79** 6113
- [22] Grigorenko A N, Nikitin P I, Roschepkin G V 1997 *JETP* **85** 343
- [23] Jin Y F, Xu W, Xu M 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1061
- [24] Fulinski A, Telejko T 1991 *Phys. Lett. A* **152** 11
- [25] Cao L, Wu D J 1994 *Phys. Lett. A* **185** 59
- [26] Jia Y, Cao L, Wu D J 1995 *Phys. Rev. A* **51** 3169
- [27] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5764
- [28] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5786
- [29] Jia Y, Yu S N, Li J R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
- [30] Madureira A J R, Hanggi P, Wio H S 1996 *Phys. Lett. A* **217** 248
- [31] Jung P, Talkner P 1995 *Phys. Rev. E* **51** 2640
- [32] Cao L, Wu D J 2007 *Phys. A* **376** 191

Stochastic resonance in an asymmetric bistable system driven by mixed periodic force and noises^{*}

Zhou Bing-Chang[†] Xu Wei

(*Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 ,China*)

(Received 29 January 2007 ; revised manuscript received 8 February 2007)

Abstract

The phenomenon of stochastic resonance (SR) in an asymmetric bistable system driven by correlated multiplicative and additive noise and two periodic fields is investigated. Analytic expressions of the signal-to-noise ratio (SNR) for fundamental and higher harmonics are derived using the two-state theory. The SR appears in both fundamental and higher harmonics. Moreover , the suppression exists for higher harmonics. The effects of static asymmetry and the noise intensity and the strength of coupling between noises on the SNR are studied.

Keywords : asymmetric bistable system , stochastic resonance , signal-to-noise ratio , mixing period signals

PACC : 0540 , 0250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091 , 10332030).

[†] E-mail : leiyu@nwpu.edu.cn