

参数未知的不同阶数混沌系统广义同步及参数估计*

贾飞蕾† 徐伟都 林

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)
(2007 年 1 月 20 日收到 2007 年 2 月 2 日收到修改稿)

采用扩阶方法(使响应系统和驱动系统的维数相同),把不同阶数混沌系统的广义同步问题转化为相同阶数混沌系统之间的广义同步,基于 Lyapunov 稳定性定理和自适应控制方法(用于相同阶数混沌系统的同步),给出了自适应控制器和参数自适应律,进而实现了不同阶数混沌系统的广义同步.将该方法应用于参数未知的超 Lü, Lorenz, 广义 Lorenz 和 Liu 等系统之间的广义混沌同步,理论证明了该方法可以使这些系统达到渐近广义同步,并且可以辨识驱动系统和响应系统的所有参数,数值模拟进一步证明了该方法的有效性.

关键词:扩阶,不同阶数,广义混沌同步,参数估计

PACC: 0545

1. 引言

由于混沌同步和控制物理、通信、信息科学、医学、生物工程等领域的巨大应用潜力和发展前途,混沌已成为非线性科学中的一个热点并引起了人们广泛的关注.自从 Pecora 和 Carroll^[1]于 1990 年首次提出混沌同步的原理,并在电路中得以实现以来,人们先后提出混沌同步化概念^[2-5]和同步方法^[6-10],但已有文献大多考虑两个完全相同混沌系统的完全同步,而关于混沌系统的广义同步研究得很少.由于在实际的物理、化学、生物等复杂系统中存在着大量的广义同步化现象,广义同步化可能更容易应用于保密通讯,也可能与系统科学中图案的突现(涌现)现象有关,所以研究混沌系统的广义同步是有实际意义的.

考虑到混沌系统对初始值的极端敏感性,初始条件微小变化的两个系统,最终的动态行为会存在巨大差异,而且不同阶系统的分岔特性和在相空间中的吸引域不相同,再加上驱动系统和响应系统之间还存着一定的函数关系,发现要实现不同阶混沌系统广义同步是比较困难的.文献[11]用约阶方法,完成了驱动系统和响应系统的广义同步(驱动系统的投影和响应系统完全同步),但不能使驱动系统的

所有参数得到估计,而在实际中,我们往往想要得到所有未知参数的估计值,那么能否找到一种方法能够实现不同阶数混沌系统的广义同步并且能使驱动系统和响应系统的所有参数得到估计,是一个值得研究的问题.

针对上述问题,本文采用扩阶方法,把不同阶数混沌系统的广义同步问题转化为相同阶数混沌系统之间的广义同步,基于 Lyapunov 稳定性定理和自适应控制方法(用于相同阶数混沌系统的同步),给出了自适应控制器和参数自适应律,进而实现参数未知的不同阶数混沌系统广义同步,且使得驱动系统和响应系统的所有参数得到了估计.数值仿真实证了该方法的有效性.

2. 问题描述

考虑由下面数学模型描述的混沌系统

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\hat{\theta}_1, \quad (1)$$

这里 $x \in R^n$, $f \in R^n$, 分别是系统(1)的状态向量及非线性向量场, $F \in R^{n \times l}$, $\hat{\theta}_1 \in R^l$ 是系统(1)的参数向量.将系统(1)看作驱动系统,受控的响应系统为

$$\dot{y} = g(y) + G(y)\hat{\theta}_2 + u, \quad (2)$$

这里 $y \in R^m$, $g \in R^m$, 分别是系统(2)的状态向量及

* 国家自然科学基金(批准号:10472091, 10332030, 10502042)和西北工业大学研究生创新种子基金(批准号:Z200655)资助的课题.

† E-mail: feileijia@mail.nwpu.edu.cn

非线性向量场. $G \in \mathbf{R}^{m \times k}$, $\hat{\theta}_2 \in \mathbf{R}^k$ 是系统 (2) 的参数向量, $u \in \mathbf{R}^m$ 为控制器.

在这篇文章中, 我们考虑当维数 $n > m$ ($f \neq g$, $F \neq G$) 时的驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 的广义同步. 针对这类问题, 采用扩阶的方法, 使响应系统的维数等于驱动系统的维数, 进而实现系统 (1) 和系统 (2) 广义同步. 因此, 响应系统增加 r 个方程如下所示:

$$\dot{y}_r = 0 + u_r, \quad (3)$$

这里 $y_r \in \mathbf{R}^r$, $u_r \in \mathbf{R}^r$.

将方程 (2) 和方程 (3) 联立可得

$$\dot{y}_p = g_p(y) + G_p(y)\hat{\theta}_2 + u_p, \quad (4)$$

这里 $y_p \in \mathbf{R}^n$, $g_p \in \mathbf{R}^n$, $G_p \in \mathbf{R}^{n \times k}$, $\hat{\theta}_2 \in \mathbf{R}^k$, $u_p \in \mathbf{R}^n$, 且维数 r 和 n 满足如下关系:

$$n - r = m \quad (m + r = n),$$

备注 1 当 $u = 0$, $u_r = 0$, 系统 (2) 和系统 (4) 具有相同的动力学特征, 即增加的 r 个方程并不影响系统 (2) 的动力学行为.

定义广义同步误差为

$$e = y_p - \Phi(x), \quad (5)$$

这里 Φ 是连续并且可微的广义同步函数.

对 (5) 式求导数, 并将 (1) 式和 (4) 式代入 (5) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{y}_p - \dot{\Phi}(x) = g_p(y) + G_p(y)\hat{\theta}_2 \\ &\quad - D\Phi(x)\dot{x} + u_p(x, y, \theta_1, \theta_2) \\ &= g_p(y) - D\Phi(x)f(x) + G_p(y)\hat{\theta}_2 \\ &\quad - D\Phi(x)F(x)\hat{\theta}_1 + u_p(x, y, \theta_1, \theta_2), \quad (6) \end{aligned}$$

这里 $D\Phi(x)$ 是关于函数 $\Phi(x)$ 的雅克比矩阵. 参数 θ_1, θ_2 分别是对“未知”参数 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 的估计.

我们的目标是选择任意连续并且可微的广义同

步函数 Φ , 合适的控制器 $u_p \in \mathbf{R}^n$ 及参数自适应律 $\theta_1 \in \mathbf{R}^l$ 和 $\theta_2 \in \mathbf{R}^k$, 使 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_p(t) - \Phi(x(t))\| = 0$, 即实现驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 广义同步. 根据自适应控制和参数估计方法 [15], 可以选择控制器和参数自适应律分别为

$$\begin{aligned} u &= -g_p(y) + D\Phi(x)f(x) - G_p(y)\theta_2 \\ &\quad + D\Phi(x)F(x)\theta_1 - ke, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_1 = -(D\Phi(x)F(x))^T e,$$

$$\dot{\theta}_2 = (G_p(y))^T e, \quad (8)$$

这里 $k > 0$ 为常数.

备注 2 广义同步函数 $\Phi(x)$ 的线性性与非线性并不影响混沌系统的广义同步.

下面采用该方法, 分别取广义同步函数为线性函数和非线性函数, 来实现参数未知的超混沌 Lü 系统与 Lorenz 系统和参数未知的广义 Lorenz 系统与 Liu 系统广义同步及参数估计.

3. 参数未知的超混沌 Lü 系统^[12]和 Lorenz 系统广义混沌同步

驱动系统为超 Lü 系统 (6), 受控的响应系统为 Lorenz 系统 (7)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \hat{a}_1(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 + \hat{c}_1x_1 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \hat{b}_1x_3, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= x_3 - \hat{d}_1x_4, \\ \dot{y}_1 &= \hat{a}_2(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 &= \hat{c}_2y_1 - y_1y_3 - y_2 + u_2, \quad (10) \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - \hat{b}_2y_3 + u_3. \end{aligned}$$

可以把 (9) 式写成 (1) 式的形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 + x_4 \\ x_1x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{d}_1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

这里 $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1$ 是“未知”的参数.

对系统 (10) 进行扩阶, 即在 Lorenz 系统中增加一维, 但不改变 Lorenz 系统的混沌动力学行为, 此时

的受控的响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \hat{a}_2(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 &= \hat{c}_2y_1 - y_1y_3 - y_2 + u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - \hat{b}_2 y_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 &= 0 + u_4, \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式可以写为(4)式形式

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 - y_2 \\ y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \\ 0 & -y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{c}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

这里 u_1, u_2, u_3, u_4 是控制器, $\hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2$ 是“未知”的参数. 定义广义同步误差 $e_i = y_i - \Phi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ($i=1, 2, 3, 4$), 选择连续可微的线性函数 $\Phi(x) = (x_1 x_2 + x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_3, x_2 + x_3 + x_4)^T$, 广义函数 $\Phi(x)$ 关于 x 的雅克比矩阵为

$$D\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

对广义同步误差求导, 并且将方程(11)(13)(14)代入误差系统(6), 可以得到

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(-x_1 x_3 + x_4) - x_1 x_2 - x_2(x_2 - x_1)\hat{a}_1 - x_3\hat{b}_1 - x_1 x_2\hat{c}_1 + (y_2 - y_1)\hat{a}_2 + u_1 \\ -y_1 y_3 - y_2 + x_1 x_3 - x_4 - x_3 - x_2\hat{c}_1 + x_4\hat{d}_1 + y_1\hat{c}_2 + u_2 \\ y_1 y_2 - x_1 x_2 - (x_2 - x_1)\hat{a}_1 - x_3\hat{b}_1 + y_3\hat{b}_2 + u_3 \\ x_1 x_3 - x_4 - x_3 - x_1 x_2 - x_3\hat{b}_1 - x_2\hat{c}_1 + x_4\hat{d}_1 + u_4 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

根据(7)式和(8)式, 选择控制器为

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1(-x_1 x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_2(x_2 - x_1)a_1 \\ &\quad + x_3 b_1 + x_1 x_2 c_1 - (y_2 - y_1)a_2 - k e_1, \\ u_2 &= y_1 y_3 + y_2 - x_1 x_3 + x_4 + x_3 + x_2 c_1 \\ &\quad - x_4 d_1 - y_1 c_2 - k e_2, \\ u_3 &= -y_1 y_2 + x_1 x_2 + (x_2 - x_1)a_1 + x_3 b_1 \\ &\quad + y_3 b_2 - k e_3, \\ u_4 &= -x_1 x_3 + x_4 + x_3 + x_1 x_2 + x_3 b_1 \\ &\quad + x_2 c_1 - x_4 d_1 - k e_4, \end{aligned} \quad (16)$$

参数自适应律为

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -x_2(x_2 - x_1)e_1 - (x_2 - x_1)e_3, \\ \dot{b}_1 &= -x_3 e_2 - x_3 e_3 - x_3 e_4, \\ \dot{c}_1 &= -x_1 x_2 e_1 - x_2 e_2 - x_2 e_4, \\ \dot{d}_1 &= x_4 e_2 + x_4 e_4, \end{aligned} \quad (17)$$

和

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= (y_2 - y_1)e_1, \\ \dot{b}_2 &= -y_3 e_3, \\ \dot{c}_2 &= y_1 e_2, \end{aligned} \quad (18)$$

这里 k 为大于零的常数, $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2$ 是对“未知”参数 $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2$ 的估计.

定理 1 若选择控制器(16)式, 参数自适应律(17)式和(18)式, 则驱动系统(9)和响应系统(10)渐近广义同步.

证明 选择 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e^T e + \tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 + \tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2 + \tilde{a}_2^2 + \tilde{b}_2^2 + \tilde{c}_2^2), \quad (19)$$

这里 $\tilde{a}_1 = a_1 - \hat{a}_1, \tilde{b}_1 = b_1 - \hat{b}_1, \tilde{c}_1 = c_1 - \hat{c}_1, \tilde{d}_1 = d_1 - \hat{d}_1, \tilde{a}_2 = a_2 - \hat{a}_2, \tilde{b}_2 = b_2 - \hat{b}_2, \tilde{c}_2 = c_2 - \hat{c}_2$. 沿着系统(15)对 V 求导数, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 \\ &\quad + \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 + \tilde{c}_1 \dot{\tilde{c}}_1 + \tilde{d}_1 \dot{\tilde{d}}_1 \\ &\quad + \tilde{a}_2 \dot{\tilde{a}}_2 + \tilde{b}_2 \dot{\tilde{b}}_2 + \tilde{c}_2 \dot{\tilde{c}}_2, \end{aligned} \quad (20)$$

将(15)–(18)式代入(20)式可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \tilde{a}_1(x_2(x_2 - x_1)e_1 + (x_2 - x_1)e_3) \\ &\quad + \tilde{b}_1(x_3 e_2 + x_3 e_3 + x_3 e_4) \\ &\quad + \tilde{c}_1(x_1 x_2 e_1 + x_2 e_2 + x_2 e_4) \\ &\quad - \tilde{d}_1(x_4 e_2 + x_4 e_4) - \tilde{a}_2(y_2 - y_1)e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{b}_2 y_3 e_3 - \tilde{c}_2 y_1 e_2 + \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 + \tilde{c}_1 \dot{\tilde{c}}_1 \\
 & + \tilde{d}_1 \dot{\tilde{d}}_1 + \tilde{a}_2 \dot{\tilde{a}}_2 + \tilde{b}_2 \dot{\tilde{b}}_2 + \tilde{c}_2 \dot{\tilde{c}}_2 \\
 & - ke_1^2 - ke_2^2 - ke_3^2 - ke_4^2 \\
 & = -ke_1^2 - ke_2^2 - ke_3^2 - ke_4^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

由于 V 是正定函数, \dot{V} 是负定函数, 根据 Lyapunov 稳定性定理, 可以得到广义同步误差状态 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$. 即驱动系统(9)和响应系统(10)渐近广义同步. 证毕.

数值模拟中采用步长为 0.001 的四阶-龙格库塔方法, 选取“未知”参数 $\hat{a}_1 = 15, \hat{b}_1 = 5, \hat{c}_1 = 10, \hat{d}_1 = 1, \hat{a}_2 = 10, \hat{b}_2 = \frac{8}{3}, \hat{c}_2 = 28$. 初始值 $x_1(0) = 3.0, x_2(0) = -4.0, x_3(0) = 2.0, x_4(0) = 2.0, y_1(0) = -3.0, y_2(0) = 4.0, y_3(0) = -2.0, y_4(0) = 0.0$. 自适应参数的初始值为 $a_1(0) = 0.1, b_1(0) = 1.0, c_1(0) = 0.2, d_1(0) = -0.2, a_2(0) = 1.7, b_2(0) = 1.0, c_2(0) = 0.5$. 常数 $k = 5$. 图 1 和图 2 分别给了超混沌 Lü 系统和 Lorenz 混沌系统的混沌吸引子.

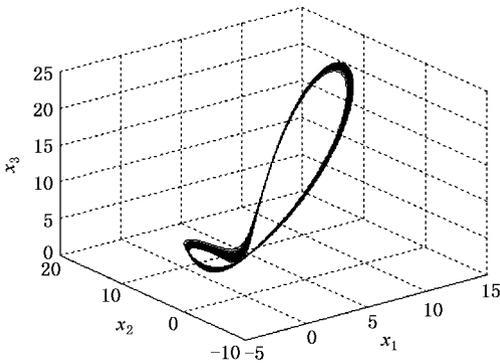


图 1 超混沌 Lü 系统混沌吸引子三维空间的投影

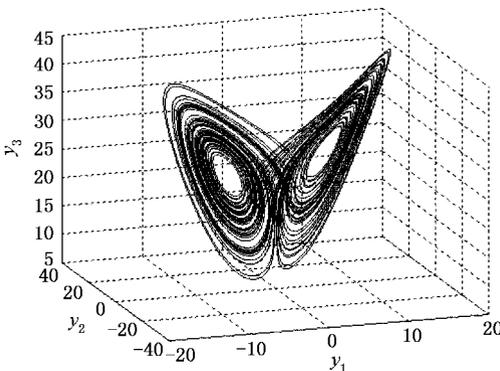


图 2 Lorenz 系统的混沌吸引子

图 3 和图 4 分别给出了超混沌 Lü 的参数估计结果和 Lorenz 系统的参数估计结果, 从图 3、图 4 中可以看到随着时间的增加, 参数估计值 $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2$ 迅速趋于它们的真实值 $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2,$

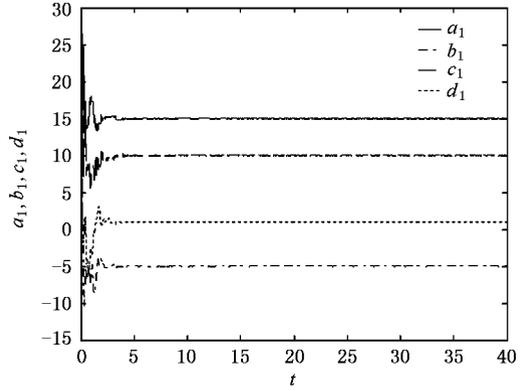


图 3 参数估计值 a_1, b_1, c_1, d_1 随时间的演化曲线

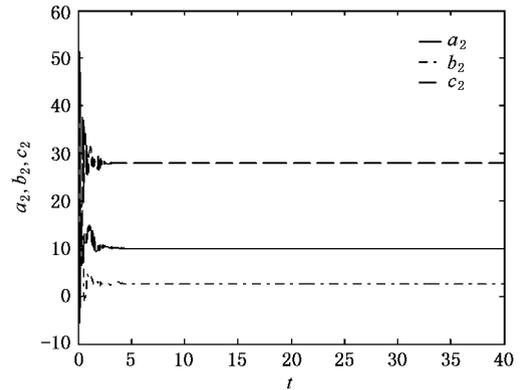


图 4 参数估计值 a_2, b_2, c_2 随时间的演化曲线

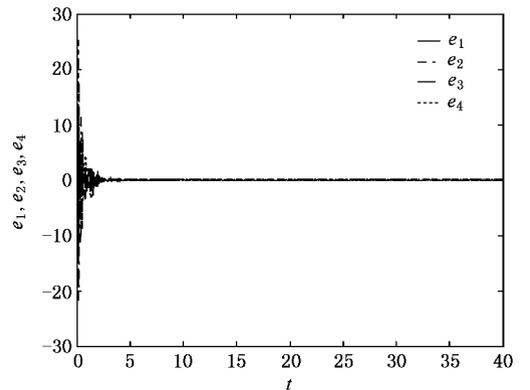


图 5 广义误差图随时间的演化曲线 $e_1 = y_1 - x_1 x_2 - x_3, e_2 = y_2 - x_2 - x_4, e_3 = y_3 - x_1 - x_3, e_4 = y_4 - x_2 - x_3 - x_4$

\hat{c}_2 . 图 5 给出了广义同步误差随时间的演化曲线. 由图 5 可知随着时间的增加, 广义同步误差迅速趋于零, 即超混沌 Liu 系统和 Lorenz 混沌系统广义同步. 这些都说明了该方法的有效性.

4. 参数未知广义 Lorenz 系统^[11]和 Liu 系统^[13]广义混沌同步

驱动系统为广义 Lorenz 系统(21), 受控的响应系统为系统 Liu(22)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \hat{a}_1(x_2 - x_1) + \hat{c}_1 x_4, \\ \dot{x}_2 &= \hat{r}_1 x_1 - x_1 x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \hat{b}_1 x_3, \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - \hat{a}_1 x_4, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \hat{a}_2(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 &= \hat{b}_2 y_1 - \hat{k}_2 y_1 y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 &= -\hat{c}_2 y_3 + \hat{h}_2 y_1^2 + u_3, \end{aligned} \tag{22}$$

把(21)式写为(1)式的形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ x_1 x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{r}_1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

这里 $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{r}_1$ 是“未知”参数.

对系统(22)进行扩阶, 即在 Liu 系统中增加一维, 但不改变 Liu 系统的混沌动力学行为, 此时的受控的响应系统(23)可写为(4)式的形式

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & -y_1 y_3 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & 0 & y_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{k}_2 \\ \hat{h}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

这里 u_1, u_2, u_3, u_4 是控制器, $\hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2, \hat{h}_2, \hat{k}_2$ 是“未知”的参数.

定义 广义同步误差 $e_i = y_i - \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 选择连续可微的非线性函数 $\Phi(x) = (\sin^2 x_1 + \cos x_2, x_3 + \sin x_2, \cos x_3 + \sin x_4, x_1 + x_2 + x_4)^T$, 关于广义函数 $\Phi(x)$ 的雅克比矩阵为

$$D\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sin 2x_1 & -\sin x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x_3 & \cos x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

对广义同步误差求导, 并且将方程(23)-(25)代入(6)式, 可以得到

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_1 x_3 + x_2) \sin x_2 + (y_2 - y_1) \hat{a}_2 - \hat{a}_1(x_2 - x_1) \sin 2x_1 - \hat{c}_1 x_4 \sin 2x_1 + x_1 \hat{r}_1 \sin x_2 + u_1 \\ -(-x_1 x_3 - x_2) \cos x_2 - x_1 x_2 + y_1 \hat{b}_2 - y_1 y_3 \hat{k}_2 + x_3 \hat{b}_1 - x_1 \hat{r}_1 \cos x_2 + u_2 \\ x_1 x_2 \sin x_3 + x_1 \cos x_4 - y_3 \hat{c}_2 + y_1^2 \hat{h}_2 + x_4 \hat{a}_1 \cos x_4 - \hat{b}_1 x_3 \sin x_3 + u_3 \\ x_1 x_3 + x_1 - \hat{a}_1(x_2 - x_1 - x_4) - \hat{c}_1 x_4 - x_1 \hat{r}_1 + u_4 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

根据(7)式和(8)式, 选择控制器为

$$\begin{aligned} u_1 &= (x_1 x_3 + x_2) \sin x_2 - (y_2 - y_1) \hat{a}_2 \\ &+ \hat{a}_1(x_2 - x_1) \sin 2x_1 + \hat{c}_1 x_4 \sin 2x_1 \\ &- x_1 \hat{r}_1 \sin x_2 - k e_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= (-x_1 x_3 - x_2) \cos x_2 + x_1 x_2 - y_1 \hat{b}_2 \\ &+ y_1 y_3 \hat{k}_2 - x_3 \hat{b}_1 + x_1 \hat{r}_1 \cos x_2 - k e_2, \\ u_3 &= -x_1 x_2 \sin x_3 - x_1 \cos x_4 + y_3 \hat{c}_2 - y_1^2 \hat{h}_2 \\ &- x_4 \hat{a}_1 \cos x_4 + \hat{b}_1 x_3 \sin x_3 - k e_3, \end{aligned}$$

$$u_4 = -x_1 x_3 - x_1 + a_1(x_2 - x_1 - x_4) + c_1 x_4 + x_1 r_1 - k e_4, \quad (27)$$

参数自适应律为

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -e_1(x_2 - x_1)\sin 2x + e_3 x_4 \cos x_4 - (x_2 - x_1 - x_4)e_4, \\ \dot{b}_1 &= x_3 e_2 - e_3 x_3 \sin x_3, \\ \dot{c}_1 &= -e_1 x_4 \sin 2x_1 - x_4 e_4, \\ \dot{d}_1 &= e_1 x_1 \sin x_2 - e_2 x_1 \cos x_2 - e_4 x_1, \end{aligned} \quad (28)$$

和

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= (y_2 - y_1)e_1, \\ \dot{b}_2 &= y_1 e_2, \\ \dot{c}_2 &= -y_3 e_3, \\ \dot{k}_2 &= -y_1 y_3 e_2, \\ \dot{h}_2 &= y_1^2 e_3, \end{aligned} \quad (29)$$

这里 k 为大于零的常数, $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2$ 是对“未知”参数 $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2$ 的估计.

定理 2 若选择控制器(27)式, 参数自适应律(28)式和(29)式, 则驱动系统(21)和响应系统(22)渐近广义同步.

证明 选择 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e^T e + \tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 + \tilde{c}_1^2 + \tilde{r}_1^2 + \tilde{a}_2^2 + \tilde{b}_2^2 + \tilde{c}_2^2 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{h}_2^2), \quad (30)$$

这里 $\tilde{a}_1 = a_1 - \hat{a}_1, \tilde{b}_1 = b_1 - \hat{b}_1, \tilde{c}_1 = c_1 - \hat{c}_1, \tilde{r}_1 = r_1 - \hat{r}_1, \tilde{a}_2 = a_2 - \hat{a}_2, \tilde{b}_2 = b_2 - \hat{b}_2, \tilde{c}_2 = c_2 - \hat{c}_2, \tilde{k}_2 = k_2 - \hat{k}_2, \tilde{h}_2 = h_2 - \hat{h}_2$.

沿着系统(26)对 V 求导数, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 \\ &+ \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 + \tilde{c}_1 \dot{\tilde{c}}_1 + \tilde{r}_1 \dot{\tilde{r}}_1 + \\ &+ \tilde{a}_2 \dot{\tilde{a}}_2 + \tilde{b}_2 \dot{\tilde{b}}_2 + \tilde{c}_2 \dot{\tilde{c}}_2 + \tilde{k}_2 \dot{\tilde{k}}_2 + \tilde{h}_2 \dot{\tilde{h}}_2, \end{aligned} \quad (31)$$

将(26)–(29)式代入(31)式可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \tilde{a}_1(e_1(x_2 - x_1)\sin 2x - e_3 x_4 \cos x_4 \\ &+ (x_2 - x_1 - x_4)e_4) + \tilde{b}_1(-x_3 e_2 + e_3 x_3 \sin x_3) \\ &+ \tilde{c}_1(e_1 x_4 \sin 2x_1 + x_4 e_4) + \tilde{d}_1(-e_1 x_1 \sin x_2 \\ &+ e_2 x_1 \cos x_2 + e_4 x_1) - \tilde{a}_2(y_2 - y_1)e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \tilde{b}_2 y_1 e_2 + \tilde{c}_2 y_3 e_3 + \tilde{k}_2 y_1 y_3 e_2 \\ &- \tilde{h}_2 y_1^2 e_3 + \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 + \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 + \tilde{c}_1 \dot{\tilde{c}}_1 \\ &+ \tilde{d}_1 \dot{\tilde{d}}_1 + \tilde{a}_2 \dot{\tilde{a}}_2 + \tilde{b}_2 \dot{\tilde{b}}_2 \\ &+ \tilde{c}_2 \dot{\tilde{c}}_2 + \tilde{k}_2 \dot{\tilde{k}}_2 + \tilde{h}_2 \dot{\tilde{h}}_2 \\ &- k e_1^2 - k e_2^2 - k e_3^2 - k e_4^2 \\ &= -k e_1^2 - k e_2^2 - k e_3^2 - k e_4^2 \leq 0. \end{aligned}$$

由于 V 是正定函数, \dot{V} 是负定函数, 根据 Lyapunov 稳定性定理, 可以得到广义同步误差状态 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$. 即驱动系统(21)和响应系统(22)渐近广义同步. 证毕.

数值模拟中采用步长为 0.001 的四阶-龙格库塔方法, 选取“未知”参数 $\hat{a}_1 = 1.0, \hat{b}_1 = 0.7, \hat{c}_1 = 1.5, \hat{r}_1 = 26.0, \hat{a}_2 = 10, \hat{b}_2 = 40, \hat{c}_2 = 2.5, \hat{k}_2 = 1, \hat{h}_2 = 4$ 初始值 $x_1(0) = 0.3, x_2(0) = -4.1, x_3(0) = 2.0, x_4(0) = -2.3, y_1(0) = 4.0, y_2(0) = 1.0, y_3(0) = -1.2, y_4(0) = 0.1$, 自适应参数的初始值为 $a_1(0) = 1.2, b_1(0) = 0.1, c_1(0) = 2.1, r_1(0) = 1.0, a_2(0) = -4.5, b_2(0) = 1.5, c_2(0) = 3.0, k_1(0) = 0.2, h_2(0) = -2.3$, 常数 $k = 5$. 图 6 和图 7 分别给了广义 Lorenz 系统和 Liu 混沌系统的混沌吸引子. 图 8 和图 9 分别给出了广义 Lorenz 系统的参数估计结果和 Liu 混沌系统的参数估计结果, 从图 8、图 9 中可以看到随着时间的增加, 参数估计值 $a_1, b_1, c_1, r_1, a_2, b_2, c_2, k_2, h_2$ 迅速趋于它们的真实值 $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{r}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2, \hat{k}_2, \hat{h}_2$. 图 10 给出了广义同步误差随时间的演化曲线. 由图 10 可知随着时间的增加, 广义同步误差迅速趋于零, 即广义 Lorenz 系统和 Liu 混沌系统广义同步. 这些都说明了该方法的有效性.

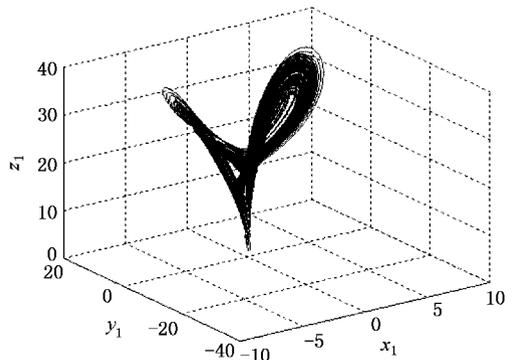


图 6 广义 Lorenz 系统混沌吸引子三维空间的投影

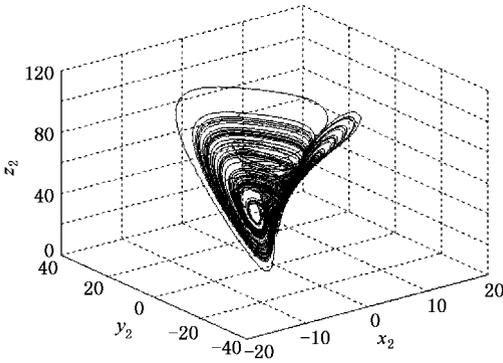


图 7 Liu 系统的混沌吸引子

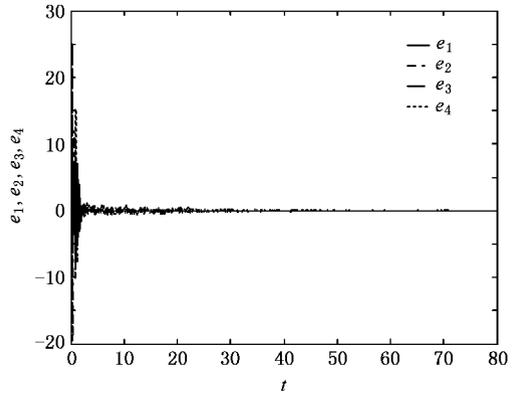


图 10 广义误差图随时间的演化曲线 $e_1 = y_1 - \sin^2 x_1 - \cos x_2$, $e_2 = y_2 - x_3 - \sin x_2$, $e_3 = y_3 - \cos x_3 - \sin x_4$, $e_4 = y_4 - x_1 - x_2 - x_4$

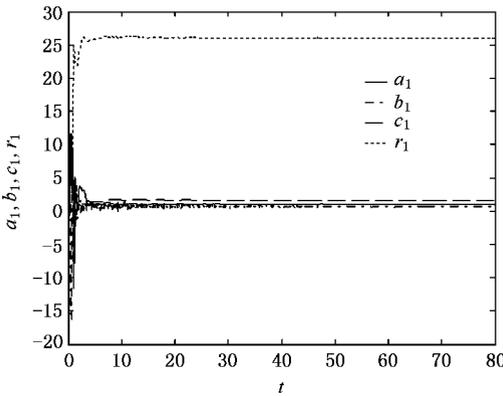


图 8 参数估计值 a_1, b_1, c_1, r_1 随时间的演化曲线

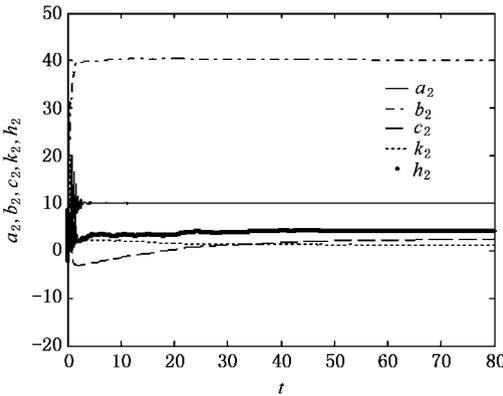


图 9 参数估计值 a_2, b_2, c_2, k_2, h_2 随时间的演化曲线

5. 结 论

由于初值不同,而且系统的阶数也不相同,再加上驱动系统和响应系统之间还存着一定的函数关系,因此实现不同阶数混沌系统的广义同步具有较多的困难.本文通过扩阶的方法(使响应系统的维数与驱动系统的维数相同,但不改变响应系统的动力学特征),把不同阶数混沌系统广义同步问题转化为相同阶数混沌系统之间的广义同步.基于 Lyapunov 稳定性定理和自适应控制方法(用于相同阶数混沌系统的同步),给出了自适应控制器和参数自适应律,进而解决了上述所说的困难.将该方法应用于参数未知的超 Lü, Lorenz, 广义 Lorenz, Liu 等系统之间的广义混沌同步,理论证明了该方法可以使这些系统达到渐近广义同步,并且可以辨识驱动系统和响应系统的所有参数,数值模拟进一步证明了该方法的有效性.如何将该方法推广于其他同步类型,这将是作者进一步的工作.

[1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [2] Yue L J, Shen K 2005 *Chin. Phys.* **14** 1760
 [3] Li F, Gu A H, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 590 (in Chinese)
 [李 芳、故爱花、徐振源 2006 物理学报 **55** 590]

[4] Hao J H, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) [郝键红、李 伟 2005 物理学报 **54** 3491]
 [5] Chen Y, Chen X X, Gu S S 2006 *Nonlinear Anal.* **15** 2143
 [6] Kocarev L, Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5208

- [7] Chen Z S , Sun K H , Zhang T S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2580 (in Chinese) [陈志盛、孙克辉、张泰山 2005 物理学报 **54** 2580]
- [8] Cheng J F , Zhang R Y , Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1589 (in Chinese) [陈菊芳、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 1598]
- [9] Wang X Y , Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]
- [10] Chen J , Zhang T P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3928 (in Chinese) [陈 晶、张天平 2006 物理学报 **55** 3928]
- [11] Ho M C , Hung Y C , Liu Z Y , Jiang I M 2006 *Phys. Lett. A* **348** 251
- [12] Elabbasy E M , Agiza H N , El-Dessoky M M 2006 *Chaos , Solitons & Fractals* **30** 1133
- [13] Liu C X , Liu T , Liu L 2004 *Chaos , Solitons&Fractals* **22** 1031
- [14] Chen S H , Lü J H 2002 *Phys. Lett. A* **299** 353

Generalized synchronization of different orders of chaotic systems with unknown parameters and parameter identification *

Jia Fei-Lei[†] Xu Wei Du Lin

(Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 , China)

(Received 20 January 2007 ; revised manuscript received 2 February 2007)

Abstract

Using add-order method to translate the problem of generalized synchronization of different orders of chaotic systems into the synchronization of systems of identical order. Based on Lyapunov stability theory and adaptive control method , we give the expression of adaptive controller and the updating rule of parameters , then achieve generalized synchronization of different order of chaotic systems with unknown parameters and enable the estimation of the parameters of the drive and the response systems. This method has been applied to solve the generalized synchronization problem of hyperchaotic Lü system , Lorenz system , generalized Lorenz system , and Liu system with unknown parameters. It is proved theoretically that this method is feasible. Numerical simulations show the effectiveness of the adaptive control technique.

Keywords : add-order , different order , generalized synchronization , parameters identification

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091 , 10332030 , 10502042) , and the Graduate Starting Seed Found of Northwestern Polytechnical University , China (Grant No. Z200655) .

[†] E-mail : feileijia@mail.nwpu.edu.cn