

# 基于振动共振的随机共振控制<sup>\*</sup>

林 敏<sup>†</sup> 黄咏梅

(中国计量学院计量技术工程学院 杭州 310018)  
(2006 年 12 月 25 日收到 2007 年 3 月 3 日收到修改稿)

分析了非线性双稳系统在高、低两种不同频率信号作用下的动力学特性,给出了高频信号参数与双稳系统输出信号的信噪比和功率谱放大率关系的解析表达式,提出了基于振动共振的随机共振控制方法.理论分析和数值仿真结果表明,通过调节高频信号的幅值或频率大小,能有效地控制双稳系统输出信号的信噪比和功率谱放大率.

关键词:振动共振,随机共振,控制

PACC: 0250, 0540, 0545

## 1. 引 言

随机共振是非线性双稳系统在周期信号和噪声作用下产生的非线性现象,通过对系统施加适量强度的噪声,可以增强系统对输入周期信号的响应,使双稳系统输出信号的信噪比达到极大值<sup>[1,2]</sup>.随机共振涉及的系统有单稳系统、多稳系统以及可兴奋系统等神经元模型,而作用到系统的噪声可以是白噪声,也可以是有色噪声,甚至是混沌信号<sup>[3,4]</sup>.振动共振是双稳系统在高、低两种不同频率信号作用下,以高频信号为调制信号,通过调节高频信号的幅值或频率来改变双稳系统的动力学特性,使系统对低频输入信号响应的幅值达到极值<sup>[5,6]</sup>.振动共振中高频信号所起的作用类似于随机共振中的噪声.

近年来,人们对随机共振进行了大量的理论和实验研究<sup>[7-9]</sup>,但这些研究大多只涉及噪声强度对共振的影响.在许多情况下,作用到双稳系统的噪声强度并不是任意可控的,即使能调节噪声的强度,其调节的范围也是极其有限的,而对随机共振效应的控制更是无能为力.为了增强或抑制双稳系统输出信号的功率谱,人们提出了谐波混频、外加反馈等方法<sup>[10-13]</sup>,采用调节相位差改变双稳系统的势垒高度等来控制随机共振,使双稳系统输出信号的功率谱大小或信噪比能被有效地控制.

本文分析了非线性双稳系统在高、低两种不同

频率信号作用下的动力学特性,采用信噪比和功率谱放大率来定量地描述随机共振效应,通过引入信噪比比率和功率谱放大率比率,解析和数值地分析了高频信号的频率和幅值对双稳系统输出信号的信噪比和功率谱放大率的影响,提出了基于振动共振的随机共振控制方法.

## 2. 振动共振原理

### 2.1. 双频信号作用下的双稳系统

考虑受两种不同频率信号作用的过阻尼双稳系统,可用如下方程来描述:

$$\dot{x} = ax - bx^3 + A \cos(\omega t) + B \cos\Omega t, \quad (1)$$

式中  $a, b$  均大于零,是双稳系统参数,  $A \cos(\omega t)$  是幅值为  $A$ 、频率为  $\omega$  的低频信号,  $B \cos\Omega t$  是幅值为  $B$ 、频率为  $\Omega$  的高频信号,并假设  $\Omega \gg \omega$ . 由于受到两种不同频率信号的作用,方程(1)具有两种不同的时间尺度  $T_L = \frac{2\pi}{\omega}$  和  $T_H = \frac{2\pi}{\Omega}$ , 且  $T_L \gg T_H$ . 设有如下形式的近似解<sup>[14]</sup>:

$$x(t) = X(t) + \frac{B}{\Omega} \sin\Omega t. \quad (2)$$

式中右边第一项  $X(t)$  是与时间尺度  $T_L$  相应的系统输出响应的低频缓变成分,而第二项是快速变化成分.将(2)式代入(1)式,并对式中的各项在  $T_H$  的较短时间求平均,假设  $X(t)$  不受短时求均值的影

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60671052, 50675214)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: linm@cjl. edu. cn

响,即

$$\frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} X(t) dt \approx \frac{1}{T_H} \cdot X(t) \cdot T_H = X(t),$$

$$(T_H \rightarrow 0),$$

则  $X(t)$  满足如下方程:

$$\dot{X} - aX + bX^3 + \frac{3}{2}b \frac{B^2}{\Omega^2} X = A \cos(\omega t), \quad (3)$$

(3) 式又可表示为

$$\dot{X} - \hat{a}(B, \Omega)X + bX^3 = A \cos(\omega t), \quad (4)$$

式中  $\hat{a}(B, \Omega) = a - \frac{3}{2}b \frac{B^2}{\Omega^2}$ . (4) 式表明高频信号参数  $B, \Omega$  的存在改变了系统参数  $\hat{a}$ , 使得  $\hat{a} < a$ . 通过调节  $B$  或  $\Omega$ , 可使  $\frac{B}{\Omega} = \sqrt{\frac{2a}{3b}}$ , 即  $\hat{a}(B, \Omega) = 0$ . 高频信号的作用相当于随机共振中的噪声使系统产生分岔, 随着  $B$  或  $\Omega$  的变化, 系统的稳态从两个变为一个.

## 2.2. 振动共振特性

当  $B < \sqrt{\frac{2a}{3b}}\Omega$ , 系统有两个稳定的平衡点  $X_{1,2}$

$= \pm \sqrt{\frac{\hat{a}(B, \Omega)}{b}}$ , 令  $Y = X - X_{1,2}$ , 则由 (4) 式, 可得

$$\dot{Y} + 2\hat{a}(B, \Omega)Y + 3bX_{1,2}Y^2 + bY^3 = A \cos(\omega t), \quad (5)$$

在输入低频信号的幅值满足  $A \ll 1$  条件下, 可假设  $Y \ll 1$ , 则 (5) 式经线性化处理后有

$$\dot{Y} + 2\hat{a}(B, \Omega)Y = A \cos(\omega t). \quad (6)$$

定义参数  $Q$  为系统对低频信号响应的幅值与输入低频信号的幅值之比, 则由 (6) 式可得  $Q$  随高频信号参数  $B$  或  $\Omega$  变化的关系为

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(2\hat{a})^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4\left(a - \frac{3bB^2}{2\Omega^2}\right)^2}}. \quad (7)$$

类似地, 如果  $B \geq \sqrt{\frac{2a}{3b}}\Omega$ , 系统只有一个稳定的平衡点  $X_0 = 0$ , 则经线性化处理  $Y$  满足如下方程:

$$\dot{Y} - \hat{a}(B, \Omega)Y = A \cos(\omega t), \quad (8)$$

相应的  $Q$  值随高频信号参数  $B$  或  $\Omega$  的变化关系为

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \left(a - \frac{3bB^2}{2\Omega^2}\right)^2}}. \quad (9)$$

因此, 对于给定的双稳系统 ( $a$  和  $b$  为常数),  $Q$  值随高频输入信号参数  $B$  或  $\Omega$  的变化并非单调, 而是存在着极大值, 表明系统对低频输入信号响应的幅

值达到峰值, 这一现象称之为振动共振<sup>5,6,1</sup>.

## 3. 控制随机共振

在方程 (1) 的右边添加噪声项  $\xi(t)$ , 可得如下形式的方程:

$$\dot{x} = ax - bx^3 + A \cos(\omega t) + B \cos \Omega t + \xi(t), \quad (10)$$

式中  $\xi(t)$  是高斯白噪声且  $\xi(t)\xi(t') = 2D\delta(t-t')$ ,  $\xi(t) = 0$ ,  $D$  是噪声强度. 对 (10) 式中的各项在  $T_H$  的时间内求平均, 并假设在  $T_H \rightarrow 0$  条件下求平均不改变噪声的统计特性, 则根据 (3) 式可得出如下方程:

$$\dot{X} - aX + bX^3 + \frac{3}{2}b \frac{B^2}{\Omega^2} X = A \cos(\omega t) + \xi(t), \quad (11)$$

(11) 式又可表示为

$$\dot{X} - \hat{a}(B, \Omega)X + bX^3 = A \cos(\omega t) + \xi(t), \quad (12)$$

式中  $\hat{a}(B, \Omega) = a - \frac{3}{2}b \frac{B^2}{\Omega^2}$ . (12) 式是研究随机共振现象的经典模型, 在附加的高频信号作用下, 决定该系统动力学特性的方程参数  $\hat{a}$  是高频信号参数 ( $B, \Omega$ ) 的函数. 因此, 随着高频信号参数的变化, 双稳系统的动力学特性将随之而变, 从而必将影响系统所产生的随机共振效应.

由于随机共振存在着噪声能量向信号能量转移的机理, 而这一能量转移的大小反映了随机共振效应的强烈程度. 控制随机共振就是要提高系统的随机共振效应, 使得有更多的噪声能量转移到信号上. 在随机共振中, 信噪比和功率谱放大率能定量地表征噪声与信号之间的能量关系<sup>[2]</sup>, 因此采用信噪比和功率谱放大率这两个特征量能反映随机共振的控制能力.

### 3.1. 信噪比比率

在绝热近似下, 双稳系统输出的信噪比 (SNR)<sup>[2,4,5]</sup> 为

$$\text{SNR} = \pi \frac{A^2}{4bD^2} \hat{a} r_k$$

$$= \frac{A^2}{2\sqrt{2}bD^2} \hat{a}^2 \exp(-\hat{a}^2/4bD), \quad (13)$$

式中  $r_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \hat{a} \exp\left(-\frac{\hat{a}^2}{4bD}\right)$  为 Kramers 逃逸率. 将

$\hat{a}(B, \Omega) = a - \frac{3}{2}b \frac{B^2}{\Omega^2}$  代入(13)式, 可得 SNR 随  $B$  或  $\Omega$  变化的关系式

$$\text{SNR} = \frac{A^2}{2\sqrt{2}bD^2} \left( a - \frac{3}{2}b \frac{B^2}{\Omega^2} \right)^2 \times \exp \left( - \frac{\left( a - \frac{3}{2}b \frac{B^2}{\Omega^2} \right)^2}{4bD} \right). \quad (14)$$

(14)式表明 SNR 只与  $B/\Omega$  有关. 令  $q = B/\Omega$ , 则(14)式又可表示为

$$\text{SNR} = \frac{A^2}{2\sqrt{2}bD^2} \left( a - \frac{3}{2}bq^2 \right)^2 \exp \left( - \frac{\left( a - \frac{3}{2}bq^2 \right)^2}{4bD} \right). \quad (15)$$

SNR 随  $\hat{a}$  的变化并非单调, 而是存在着极大值点  $\hat{a}_M = 2\sqrt{bD}$ , 即在  $\hat{a} < \hat{a}_M$  一侧 SNR 随  $\hat{a}$  是单调上升的, 而在  $\hat{a} > \hat{a}_M$  一侧则是单调下降的, 如图1所示

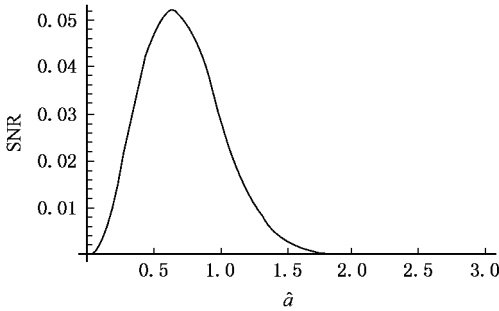


图1 信噪比 SNR 随  $\hat{a}$  变化 ( $A=0.1, D=0.1, b=1$ )

示. 由于高频信号的作用总是使得  $\hat{a} < a$ , 因此, 只有在双稳系统参数  $a > \hat{a}_M$  时, 才能通过调节高频信号参数来提高 SNR. 对于给定的双稳系统和噪声强度以及输入低频信号, 参数  $a, b, D$  和  $A$  均为常数, 则 SNR 仅取决  $q$ . 当  $q=0$  时(15)式就退化为经典随机共振的 SNR, 记为  $\text{SNR}_0$ . 为了定量地反映振动共振对随机共振 SNR 的影响, 引入信噪比率  $R_{\text{SNR}}$  定义为

$$R_{\text{SNR}} = \frac{\text{SNR}(q)}{\text{SNR}_0} = \frac{\left( a - \frac{3}{2}bq^2 \right)^2}{a^2} \exp \frac{a^2 - \left( a - \frac{3}{2}bq^2 \right)^2}{4bD}. \quad (16)$$

由于  $\hat{a} < 0$  将失去双稳特性(16)式中  $q$  的变化范围限于  $0 \sim \sqrt{\frac{2a}{3b}}$ , 对于  $a > \hat{a}_M$  的双稳系统, 随着作用到双稳系统的高频信号参数  $q$  的变化, 双稳系统

对低频输入信号响应的信噪比率变化曲线如图2所示, 从图可见总能使  $R_{\text{SNR}} > 1$ , 从而可实现对双稳系统随机共振的控制.

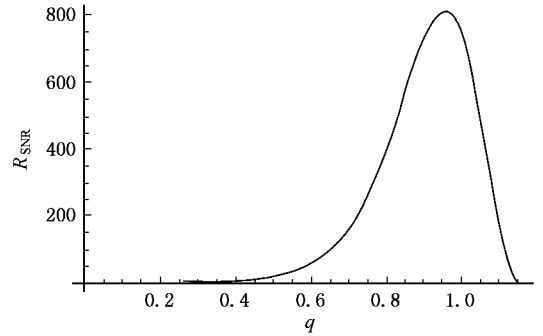


图2  $R_{\text{SNR}}$  随高频参数  $q$  变化曲线 ( $a=2, b=1, D=0.1$ )

### 3.2. 功率谱放大率比率

双稳系统输出信号的功率谱与输入信号的功率谱之比称为系统的功率谱放大率. 在绝热近似下, 双稳系统的功率谱放大率 (SPA)<sup>[2,15]</sup> 为

$$\text{SPA} = \frac{\hat{a}^2}{D^2 b^2} \frac{r_k^2}{r_k^2 + \omega^2} = \frac{\hat{a}^2}{D^2 b^2} \frac{\left( \frac{\sqrt{2}}{\pi} \hat{a} \exp \left( - \frac{\hat{a}^2}{4bD} \right) \right)^2}{\left( \frac{\sqrt{2}}{\pi} \hat{a} \exp \left( - \frac{\hat{a}^2}{4bD} \right) \right)^2 + \omega^2}. \quad (17)$$

(17)式与(15)式具有相似的性质, SPA 随  $\hat{a}$  的变化也非单调, 而是存在着极大值点  $\hat{a}_{\text{SPA}}$ , 即在  $\hat{a} < \hat{a}_{\text{SPA}}$  一侧 SPA 随  $\hat{a}$  是单调上升的, 而在  $\hat{a} > \hat{a}_{\text{SPA}}$  一侧则是单调下降的, 如图3所示. 由于高频信号的作用

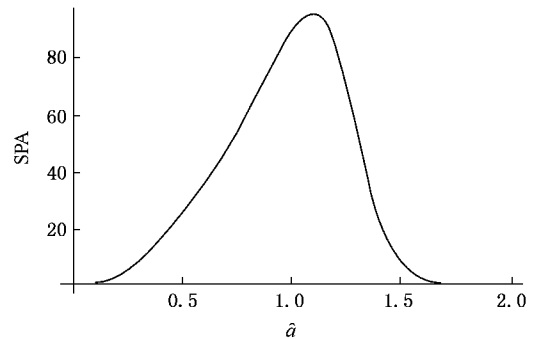


图3 功率谱放大率 SPA 随  $\hat{a}$  变化 ( $b=1, D=0.1, \omega=2\pi \cdot 0.002$ )

总是使得  $\hat{a} < a$ , 因此, 只有在双稳系统参数  $a > \hat{a}_{\text{SPA}}$  时, 才能通过调节高频信号参数来增大 SPA. 为了定量地反映振动共振对随机共振 SPA 的影响, 引入功率谱放大率比率  $R_{\text{SPA}}$  定义为

$$\begin{aligned}
R_{SPA} &= \frac{SPA(\hat{a})}{SPA(a)} \\
&= \frac{\left(a - \frac{3}{2}bq^2\right)^4}{a^4} \\
&\quad \times \exp \frac{a^2 - \left(a - \frac{3}{2}bq^2\right)^2}{2bD} \\
&\quad \times \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}a \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right)\right)^2 + \omega^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(a - \frac{3}{2}bq^2\right) \exp\left(-\frac{\left(a - \frac{3}{2}bq^2\right)^2}{4bD}\right)\right)^2 + \omega^2} \quad (18)
\end{aligned}$$

式中  $q$  的变化范围也限于  $0 - \sqrt{\frac{2a}{3b}}$  ,对于  $a > \hat{a}_{SPA}$  的双稳系统 ,随着作用到双稳系统的高频信号参数  $q$  的变化 ,双稳系统对低频输入信号响应的功率谱放大率比率变化如图 4 所示 ,从图可见总能使  $R_{SPA} > 1$  ,从而可实现对双稳系统随机共振的控制.

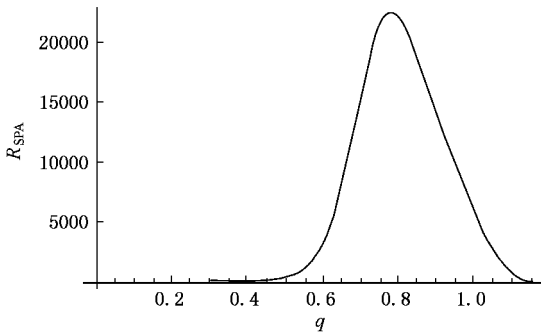


图 4  $R_{SPA}$  随高频参数  $q$  变化曲线 ( $a = 2, b = 1, D = 0.1, \omega = 2\pi \cdot 0.002$ )

### 4. 数值仿真结果与分析

对于由(5)式确定的非线性双稳系统 ,式中的各参数分别取  $a = 2, b = 1, \omega = 2\pi \cdot 0.002, \Omega = 10$  ,数值仿真的采样频率为  $f_s = 100$  Hz. 在保持高频信号频率  $\Omega$  不变的条件下 ,通过调节高频信号幅值  $B$  ,当  $B$  从 0 变化到 14 时 , $q$  值在 0—1.4 范围内变动 ,双稳系统对低频信号响应的信噪比也随之而变 ,如图 5 6 所示. 图 5 是  $A = 0.01, D = 0.02$  ,图 6 是  $A = 0.005, D = 0.005$  时 ,SNR 随高频参数  $B$  的变化曲线. 数值仿真结果与理论分析结论基本一致.

图 7 是  $A = 0.01, D = 0.02$  图 8 是  $A = 0.005, D$

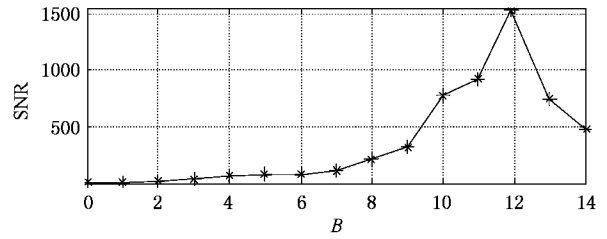


图 5 SNR 随高频参数  $B$  变化 ( $A = 0.01, D = 0.02$ )

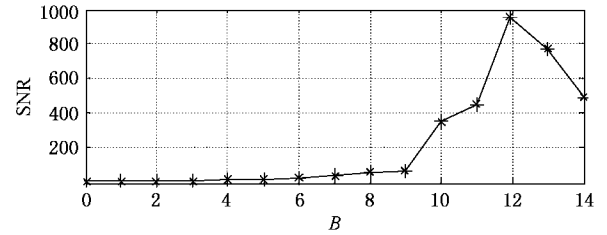


图 6 SNR 随高频参数  $B$  变化 ( $A = 0.005, D = 0.005$ )

$= 0.005$  时 ,在保持高频信号频率  $\Omega$  不变的条件下 ,通过调节高频信号幅值  $B$  ,当  $B$  从 0 变化到 15 时 , $q$  值在 0—1.5 范围内变动 ,SPA 随高频参数  $B$  的变化曲线. 数值仿真结果与理论分析结论基本一致.

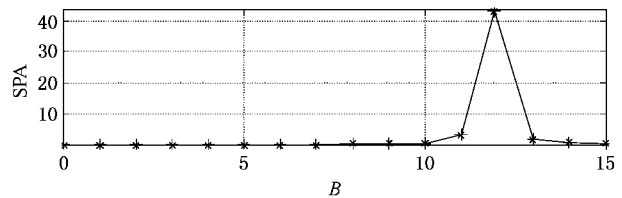


图 7 SPA 随高频参数  $B$  变化 ( $A = 0.01, D = 0.02$ )

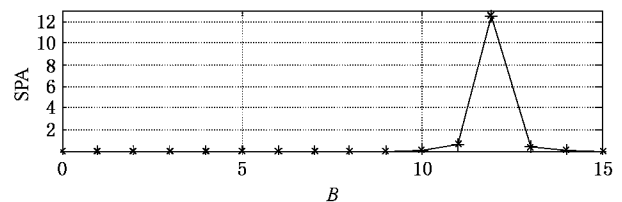


图 8 SPA 随高频参数  $B$  变化 ( $A = 0.005, D = 0.005$ )

### 5. 结 论

本文将非线性双稳系统的振动共振和随机共振有机结合 ,提出了基于振动共振的随机共振控制方法 ,通过调节作用到双稳系统的高频信号参数 ,能有

效地控制双稳系统输出信号的信噪比和功率谱放大率,从而实现对随机共振的控制.

用振动共振来控制随机共振,可使幅值更小的低频信号也能产生随机共振,拓宽了随机共振的应

用范围,特别是对深埋于噪声中的微弱信号检测.

共振现象的研究不仅对于物理学的发展起了重要的作用,而且对于工程实际应用也有特殊的价值.

- [ 1 ] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *Phys. A* **14** 1453
- [ 2 ] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [ 3 ] Babinec P 1997 *Phys. Lett. A* **225** 179
- [ 4 ] Nozaki D, Mar D J, Grigg P, Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
- [ 5 ] Landa P S, McClintock P V E 2000 *Phys. A: Math. Gen.* **33** L433
- [ 6 ] Baltanas J P, Lopez L, Blechman I I, Landa P S, Zaikin A, Kurths J, Sanjuan M A F 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066119
- [ 7 ] Qin G R, Gong D C, Hu G, Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [ 8 ] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 物理学报 2003 **52** 2404]
- [ 9 ] Leng Y G, Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2432 (in Chinese) [冷永刚、王太勇 2003 物理学报 **52** 2432]
- [ 10 ] Gammaitoni L, Löcher M, Bulsara A R, Hänggi P, Neff J, Wiesenfeld K, Ditto W L, Inghiosa M E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4574
- [ 11 ] Löcher M, Inghiosa M. E, Neff J, Bulsara A. R, Wiesenfeld K, Gammaitoni L, Hänggi P, Ditto W L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 317
- [ 12 ] Lindner J F, Mason J, Neff J, Breen B J, Ditto W L, Bulsara A R 2001 *Phys. Rev. E* **63** 041107
- [ 13 ] Lin M, Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]
- [ 14 ] Blechman I I 2000 *Vibrational Mechanics* (World Scientific, Singapore)
- [ 15 ] Hu G 1994 *Stochastic Forces and nonlinear systems* (Shanghai: Shanghai Science & Technology Education Press) p222 (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海教育出版社) 1994]

## Stochastic resonance control based on vibration resonance<sup>\*</sup>

Lin Min<sup>†</sup> Huang Yong-Mei

(College of Metrology Technology and Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

(Received 25 December 2006; revised manuscript received 3 March 2007)

### Abstract

The dynamic characteristics of the non-linear bistable system subject to the action of high and low frequency signals were analyzed. The analytic formulation of the relationship between the parameters of high frequency signals and the SNR, spectral power amplification (SPA) of the bistable system output was presented. The stochastic resonance control method based on vibration resonance was proposed. The theoretical analysis and numerical simulation showed that the SNR and SPA of output signal of the bistable system can be controlled effectively by adjusting the amplitude and frequency of the high frequency signal.

**Keywords:** vibration resonance, stochastic resonance, control

**PACC:** 0250, 0540, 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60671052, 50675214).

<sup>†</sup> E-mail: linn@cjl.u.edu.cn