第 56 卷 第 11 期 2007 年 11 月
1000-3290/2007/56(11)/6199-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.11,November,2007

几何相位的伽利略变换性质*

郑映鸿† 陈 童 王 平 常 哲

(中国科学院高能物理研究所,北京 100049)

(2007 年 3 月 10 日收到;2007 年 4 月 6 日收到修改稿)

对几何相位的伽利略变换性质结果表明:通常实验中所测量体系的几何相位的确是伽利略不变的.但一般量子体系的几何相位不具有伽利略不变性.还仔细考察了几何相位在伽利略 boost 作用下变化的物理起源.文章最后通过对假想实验的分析,进一步证明几何相位对参考系的依赖并不意味着相应物理可观测量的非伽利略协变性.

关键词:几何相位,伽利略变换

PACC:0365B

1.引 言

相位因子是量子态干涉的起源,在系统的量子行为中扮演着特殊而又基本的角色.Berry 发现[1]:系统在参数空间中绝热演化一个周期以后,波函数的相位中存在一个不可积的几何相因子.Simon[2] 则澄清了此几何相因子的数学结构.几何相位很快被推广到了系统非绝热循环演化过程[3] 及非循环演化过程[4],Aitchison,Wanelik[5] 与 Mukunda,Simon[6] 给出了它的纯运动学定义,将之推广到投影希尔伯特空间的一条任意路径上.文献[7—11]讨论了几何相位对混态的推广.

量子力学中的几何相位[12,13] 被应用到包括光学、原子分子物理、凝聚态物理、量子力学的基本问题以及量子计算等诸多物理研究领域[14,15].

几何相位的数学描述是明确的.虽然有表面上的可迁性[6,13],然而理论上总可以明确分离出几何相因子[13].在实验通常涉及到的量子体系中,几何相位可以被明确观测到.然而,有研究指出几何相位是参考系相关的[16,17].在 boost 作用下,几何相位会改变.但伽利略原理告诉我们,在不同的参考系中观测到的物理结果应该是一样的.本文的主要目的就是澄清这看似矛盾的两个方面.

本文简单地回顾开路几何相位的定义与非相对论量子力学的伽利略变换.一般地推导几何相位在伽利略 boost 作用下的变换公式.我们的方法同时适用于单粒子量子系统、多体体系甚至无穷自由度的场论体系.与文献[16]一致,我们的结果表明:一般的几何相位不具有伽利略不变性.伽利略变换下几何相的改变可分为两个简单部分之和.我们分别讨论了这两项的数学起源.事实上,提供这样一个更普遍的原理框架并澄清其数学起源是该研究工作的原始动机之一.最后一节,通过对假想干涉实验的分析讨论几何相位(以及演化总相位)在 boost 作用下的变化如何与物理的 boost 不变性相协调.

2.几何相位与伽利略变换

考虑一个哈密顿量为 H 的量子力学体系.体系的态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 在希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 中按薛定谔方程 $\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle=H|\psi(t)\rangle$ 从初始时刻 t_i 演化至末尾时刻 t_f.演化过程在 $\mathscr{H}$ 中画出一条路径 $L[t_i,t_f]$.演化的末态 $|\psi(t_f)\rangle$ 相对于初态 $|\psi(t_i)\rangle$ 总的相位改变(演化总相位)为 $\arg\langle\psi(t_i)|\psi(t_f)\rangle$.此相位可分为动力学部分 $\gamma_{\mathrm{d}}[L]$ 和几何部分 $\gamma_{\mathrm{g}}[L]$ 之和

$$\arg\langle\psi(t_i)|\psi(t_f)\rangle=\gamma_{\mathrm{d}}[L]+\gamma_{\mathrm{g}}[L].\qquad(1)$$

动力学部分 $\gamma_{\mathrm{d}}[L]=-\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\psi(t_i)|H|\psi(t_f)\rangle$.几何相 $\gamma_{\mathrm{g}}[L]$ 可以写成一种明显满足重参数不变性以及相位变换 $|\psi(t)\rangle\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}|\psi(t)\rangle$ 不变性的形式[5,6],

* 国家自然科学基金(批准号:10575106)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:yh_zheng@ihep.ac.cn

$$\exp(\mathrm{i}\gamma_g[C]) = \exp\Big(\mathrm{i}\arg\langle\psi(t_i)|\psi(t_f)\rangle - \int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\psi(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle\Big). \quad (2)$$

重参数不变性与相位不变性表明它仅仅依赖于 $L[t_i,t_f]$ 在投影希尔伯特空间 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 中的投影路径 $C[t_i,t_f]$，而不依赖于具体的动力学信息.这也是称其为几何相的缘由.

在开始具体分析 $\gamma_g[C]$ 的伽利略变换性质以前，让我们先简略地回顾一下非相对论量子力学的伽利略不变性.我们采用主动的观点，当沿着速度 $\boldsymbol{v}$ 方向 boost 体系时，boost 操作通过幺正变换 $U=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}}$ 作用在态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 上

$$|\psi(t)\rangle \to |\tilde{\psi}(t)\rangle = U|\psi(t)\rangle. \quad (3)$$

伽利略不变性意味着 boost 作用的生成元 $\boldsymbol{K}$（其分量为 K^i，$i=x,y,z$）是一个守恒量，即

$$0 \equiv \frac{\mathrm{d}\langle\psi(t)|K^i|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle\psi(t)|\frac{\partial K^i}{\partial t}+\mathrm{i}[H,K^i]|\psi(t)\rangle. \quad (4)$$

此外，boost 在体系上的作用由下面两组代数关系生成[18].第一组代数关系是

$$[K^i,H] = -\mathrm{i}P^i. \quad (5)$$

式中 P^i 为体系总动量算子 $\boldsymbol{P}$ 的分量.若记体系的总质量为 M，则另外一组代数关系为

$$[K^i,P^j] = -\mathrm{i}\delta_{ij}M. \quad (6)$$

比较(4)和(5)式可得

$$\frac{\partial K^i}{\partial t} = P^i. \quad (7)$$

积分这个式子就可得到 K^i 对时间 t 的显含形式 $\boldsymbol{K}^i(t)$，即

$$\boldsymbol{K}(t_f) = \boldsymbol{K}(t_i) + (t_f - t_i)\boldsymbol{P}. \quad (8)$$

对一个连续的场论体系，$\boldsymbol{K}(t)$ 的形式可以从相对论构造中[18]通过取非相对论极限而得到

$$\boldsymbol{K}(t) = t\boldsymbol{P} - \int \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3x, \quad (9)$$

式中 $\rho(\boldsymbol{x})=T^{00}(\boldsymbol{x})$ 为体系的能量密度，在非相对论极限下它即是体系的质量密度分布.点粒子体系以及多体系统相应的 boost 作用生成元都可以通过取适当的质量密度分布得到.

3. 几何相位的伽利略变换性质

现在我们分析几何相位在伽利略 boost 作用下的变换性质.沿 $\boldsymbol{v}$ 方向 boost 体系以后，量子态 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 按薛定谔方程 $\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde{\psi}(t)\rangle=\tilde{H}|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 演化.这里

$$\tilde{H} = H' + \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial t}U^{-1},$$
$$H' = UHU^{-1}. \quad (10)$$

由几何相的定义(2)，我们知道 boost 作用以后几何相位变换为 $\tilde{\gamma}_g$，

$$\tilde{\gamma}_g = \arg\langle\tilde{\psi}(t_i)|\tilde{\psi}(t_f)\rangle + \mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\tilde{\psi}(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (11)$$

即从系统被伽利略 boost 作用后得到的演化总相位 $\arg\langle\tilde{\psi}(t_i)|\tilde{\psi}(t_f)\rangle$ 中减去动力学相位 $-\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\tilde{\psi}(t)|\tilde{H}|\tilde{\psi}(t)\rangle$.当我们将之写成(11)式的形式时，重参数不变性以及相位不变性表明它仅依赖于 boost 作用以后体系在 $\mathscr{H}$ 中的演化路径在 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 上的投影.我们将这条新的投影路径记为 $\tilde{C}$.为了表明 $\tilde{\gamma}_g$ 对 $\tilde{C}$ 的依赖关系，一般将它记为 $\tilde{\gamma}_g[\tilde{C}]$.

我们先来计算 boost 作用前后演化总相位的改变 $\arg\langle\psi(t_i)|\psi(t_f)\rangle\to\arg\langle\tilde{\psi}(t_i)|\tilde{\psi}(t_f)\rangle$，

$$\arg\langle\tilde{\psi}(t_i)|\tilde{\psi}(t_f)\rangle = \arg\langle\psi(t_i)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}(t_i)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}(t_f)}|\psi(t_f)\rangle. \quad (12)$$

注意到(8)式并应用算符恒等式 $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^{A+B}\mathrm{e}^{1/2[A,B]}$ 易得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}(t_f)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}(t_i)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}(t_f-t_i)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}M\boldsymbol{v}^2(t_f-t_i)}. \quad (13)$$

将之代入(12)式有

$$\arg\langle\tilde{\psi}(t_i)|\tilde{\psi}(t_f)\rangle = \arg(\langle\psi(t_i)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}(t_f-t_i)}|\psi(t_f)\rangle) - \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2(t_f-t_i). \quad (14)$$

因此变换前后演化总相位的改变量 $\Delta\Phi$ 为

$$\Delta\Phi \equiv \arg\langle\tilde{\psi}(t_i)|\tilde{\psi}(t_f)\rangle - \arg\langle\psi(t_i)|\psi(t_f)\rangle = \arg\Big(\frac{\langle\psi(t_i)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}(t_f-t_i)}|\psi(t_f)\rangle}{\langle\psi(t_i)|\psi(t_f)\rangle}\Big) - \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2(t_f-t_i). \quad (15)$$

从(15)式可以明显看出 $\Delta\Phi$ 有两个来源.一部分来源于 boost 作用以后体系能量的增加，在(15)式中这主要体现在 $-\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2(t_f-t_i)$ 这一项上.$\Delta\Phi$ 的另一个起因是演化路径在 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 中投影端点的改变.为了说明这一点，我们不妨考虑 boost 作用前 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 的一条闭合路径.此种情形下，$|\psi(t_f)\rangle$ 与

$|\psi(t_i)\rangle$仅相差一个相角. 然而 boost 作用后$\langle\tilde{\psi}(t_i)|\tilde{\psi}(t_f)\rangle$已经不完全是一个相角了,因此 boost 作用以后 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$中路径的端点改动了,原来闭合的路径不再闭合. 路径闭合性质依赖于参考系的这种性质对几何相位的伽利略不变性的影响正是文献[16]中所讨论的. 这个影响就体现在(15)式右边的第一项上.

为了计算几何相位在 boost 作用下的变换性质,我们还需要计算(11)式右边的第二项. 注意到(7)式并利用代数关系(5),(6)可以得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\tilde{\psi}(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde{\psi}(t)\rangle\\
&=\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\psi(t)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{K}}|\psi(t)\rangle\\
&=\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\psi(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle\\
&\quad+\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\psi(t)|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}|\psi(t)\rangle\\
&\quad+\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2(t_f-t_i).
\end{aligned}\tag{16}
$$

综合(16)式和(15)式,可以得到 boost 作用后的几何相位相对 boost 作用前几何相位的改变量 $\Delta\gamma_{\mathrm{g}}(\equiv\tilde{\gamma}_{\mathrm{g}}-\gamma_{\mathrm{g}})$为

$$
\begin{aligned}
\Delta\gamma_{\mathrm{g}}&=\arg\left(\frac{\langle\psi(t_i)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}(t_f-t_i)}|\psi(t_f)\rangle}{\langle\psi(t_i)|\psi(t_f)\rangle}\right)\\
&\quad+\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\langle\psi(t)|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}|\psi(t)\rangle.
\end{aligned}\tag{17}
$$

一般而言,几何相位不是伽利略不变的. 从(17)式可知 boost 作用下几何相位的变化 $\Delta\gamma_{\mathrm{g}}$ 由两项构成. 第一项主要来自 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$中投影路径 $\tilde{C}$ 的端点相对于原路径 C 端点的改动. 这一项既体现在几何相的改变中,同时也表现在总相差的改变中. 而其第二项则主要是几何相位依赖于 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$中路径的体现,这一项由体系总动量平均值的时间积分在 boost 作用方向的投影给出. 它同时也正比于 boost 速度的大小. 一般而言体系被 boost 得越快,则 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$中路径 $\tilde{C}$ 相对于 C 的形变就越大,几何相位的改变也就越大.

(17)式的第一项与第二项中还有一个相消去的部分. 为了说明这一点,我们考虑一类具有平移不变性的体系. 取演化态$|\psi(t)\rangle$为动量本征态

$$
\boldsymbol{P}|\psi(t)\rangle=\boldsymbol{p}|\psi(t)\rangle.\tag{18}
$$

很容易看出此时(17)式右边第一项的贡献为 $-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}(t_f-t_i)$,它正好被第二项消去. 因此在这种情形中,几何相位是伽利略不变的. 事实上,大多数测量几何相位的实验所涉及的体系都属于这种情形[19]. 以相互作用仅涉及自旋耦合以及自旋与空间均匀外场耦合的那些情况为例,此时动量算子与哈密顿量对易(在非相对论极限下,动量与自旋对易),可以仅考虑体系的自旋态而将体系的动量本征值取为零. 在这种例子中所测量到的几何相位是与参考系无关的.

对于点粒子量子体系,我们的结果包含文献[16]的结论. 更进一步,对这样的体系,其非相对论极限下的能量密度约为体系的质量密度分布,$\rho(\boldsymbol{x})\simeq\sum_i M_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Q}_i)$. 式中 $\boldsymbol{Q}_i$ 为第 i 个粒子的位置,代入一般的式子(9)就得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}&=t\boldsymbol{P}-\sum_i M_i\boldsymbol{Q}_i\\
&=t\boldsymbol{P}-M\boldsymbol{Q},
\end{aligned}\tag{19}
$$

式中 M 为体系的总质量,$\boldsymbol{Q}$ 为体系的质心位置. 此时,位置算符加上动量算符与自旋算子构成系统可观测量的完备集合. 位置算符与动量算符之间的对易关系也生成了伽利略 boost 作用的代数关系. 这里关于几何相的所有讨论就可以在这个框架下重新讨论[16].

4. 物理可观测量的伽利略协变性

在一类测量几何相位的实验中,人们安排两个能量平均值相等的循环演化态相干涉. 在引起干涉的相差中,动力学部分为零. 从而可以通过对干涉结果的测量而得到这两个态的几何相之差. 另外,大多数对几何相位的观测实验都属于前面所提到的具有平移不变性的那一类. 对这一大类体系,几何相位是在 boost 作用下不变的. 理所当然,当 boost 体系时,干涉结果是 boost 协变的.

但是,对于更一般的情形(17)式表明,boost 作用会改变体系几何相位. 这多少有些超乎我们的意料. 一方面我们的理论推导是完全植根于伽利略不变性的. 另一方面,作为物理可观测量,两态干涉的结果显然不应该有破坏伽利略 boost 协变性的行为. 这两者之间表面上的矛盾表明,在最一般的情形,我们需要一个更加小心仔细地分析.

先从对演化总相位的分析开始. boost 作用以后,演化总相位由(14)式给出,为了进一步看清楚它的物理含义,我们不妨以点粒子量子力学情形为例,写出它在坐标表象中的相应表达式

$$\arg(\langle\psi(t_i)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P}(t_f-t_i)}|\psi(t_f)\rangle)$$
$$-\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2(t_f-t_i)$$
$$=\arg\left(\int\mathrm{d}^3x\psi^*(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t_i)\psi(t_f,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t_f)\right)$$
$$-\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2(t_f-t_i).\tag{20}$$

另外,在点粒子量子力学中,我们知道在伽利略 boost 作用下波函数 $\psi(t,x)$ 变换为 $\tilde{\psi}(t,x)$,其中[1)]

$$\tilde{\psi}(t,\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2+\mathrm{i}M\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}}\psi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t).\tag{21}$$

从此式可以很直观地看出(20)式是伽利略 boost 后末态波函数 $\tilde{\psi}(t_f,x)$ 与初态波函数 $\tilde{\psi}(t_i,x)$ 内积的辐角.当然,这就是演化总相位的定义.

仿照文献[16],我们考虑一个想像中的干涉实验.同一体系的两个不同循环演化态的波函数为 $\psi_1(x,t)$ 和 $\psi_2(x,t)$.我们以 $\varphi_1(x,t)$ 与 $\varphi_2(x,t)$ 分别表示这两个波函数的相角.当这两个态从零时刻开始演化一个周期 T 以后,我们来测量它们之间的干涉.这可以通过测量叠加态波函数 $\psi(x,T)=\psi_1(x,T)+\psi_2(x,T)$ 的概率密度分布来做到.此概率密度 $|\psi(x,T)|^2$ 的干涉项正比于两态 T 时刻的相位差的余弦.因为我们考虑的是两个态都是循环演化态,因而此相位差当然也等于初始相差加上两态的演化总相位之差

$$\cos[\varphi_2(x,T)-\varphi_1(x,T)]$$
$$=\cos[\varphi_2(x,0)-\varphi_1(x,0)+\Phi_2-\Phi_1],\tag{22}$$

式中,Φ_2 与 Φ_1 分别表示演化一个周期后这两个态的演化总相位.

在 boost 这个体系以后,两态的演化总相位分别变为 $\tilde{\Phi}_1$ 与 $\tilde{\Phi}_2$.一般而言 $\tilde{\Phi}_2-\tilde{\Phi}_1\neq\Phi_2-\Phi_1$,但这并不意味着两态的干涉结果破坏了 boost 协变性,事实上,由(21)式可以知道,boost 以后叠加态波函数的概率密度为 $|\tilde{\psi}(x,T)|^2=|\psi(x-vT,T)|^2$,它的干涉项正比于

$$\cos[\varphi_2(x-vT,T)-\varphi_1(x-vT,T)].\tag{23}$$

比较(23)式与(22)式可知,干涉结果其实是完全满足伽利略协变性的.至于演化总相位对观察者的依赖则既是形式上将初始相位分离出来的结果,同时也是人为的数学定义的结果,在点粒子量子力学情形中,这可以通过它的坐标表象表达式(20)得到直观的理解.

类似地,我们可以分析知道几何相在 boost 作用下的改变也不意味着会出现物理上可观测到的非协变效应.事实上由(17)式可知,上文中对演化总相位的分析也同样适用于说明(17)式右边的第一项不会带来任何可观测到的非伽利略协变的干涉结果.至于(17)式右边第二项的出现,则纯属将总的演化相位分为几何以及动力学两部分之和的结果.

这里的情况类似于一般的含时幺正变换下几何相位的迁移性问题[6,13].以周期演化为例,绕着 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 上一闭合路径走一圈,几何相由 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 上 $U(1)$ 主丛的异和乐给出.在 $U(1)$ 规范变换下,相应的不可积相因子是不变的,然而一般情况下对量子态的含时幺正变换却可能在两方面改变几何相因子.一方面它可能改变 $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ 上投影回路的形状,另一方面它沿回路诱导的一般不是一个 $U(1)$ 规范变换.这就是几何相位的可迁性.正如文献[13]所仔细分析过的,几何相位这种数学描述上的含糊性并不会导致测量上的含糊,这种含糊只是形式上分离几何与动力学相位的结果.几何相的改变只是它与动力学相间相互迁移的结果.

在考虑伽利略 boost 变换时,由于 boost 作用生成元显含时间(7)式,因此也有类似的现象.分析表明这种类似的现象正好说明了(17)的第二项.

为了说明这一点,依然考虑前面讨论过的两个循环演化态的干涉.现在我们让这两个态的能量平均值相等,因此有相同的动力学相位.干涉条纹测量了两态几何相位之差.当 boost 体系以后,(17)式表明这两几何相位之差一般会改变.然而,boost 作用以后,两态的动力学相位差一般将不再是零,而是随之改变,并正好消去几何相差在 boost 作用下的改变,使得干涉结果满足伽利略协变性.因此,几何相位的 boost 作用改变只是人为分开几何相位及动力学相位的结果.

下面,我们通过具体计算体系态的动力学相位在 boost 作用下的变化来证实这一点.由(10)式得

$$-\int\mathrm{d}t\langle\tilde{\Psi}(t)|\tilde{H}|\tilde{\psi}(t)\rangle$$
$$=-\int\mathrm{d}t\langle\Psi(t)|H|\Psi(t)\rangle$$
$$-\mathrm{i}\int\mathrm{d}t\langle\Psi(t)|U^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}|\Psi(t)\rangle.\tag{24}$$

运用(7)及(5),(6)式容易得到动力学相位的改变量 $\Delta\gamma_{\mathrm{d}}(\equiv\tilde{\gamma}_{\mathrm{d}}-\gamma_{\mathrm{d}})$ 是

1)(21)式可通过对(3)式取坐标表象并代入 $K(t)$ 的点粒子量子力学表达式(19)得到.

$$\Delta\gamma_{\mathrm{d}} = -\int \mathrm{d}t \langle \Psi(t) | \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P} | \Psi(t) \rangle - \frac{1}{2} M \boldsymbol{v}^2 T. \tag{25}$$

我们注意到,boost 作用以后,由这个变化带来的两态动力学相位的差正好消去由(17)式的第二项带来的两态几何相位差的增量,从而保持了两态间的干涉图案.因此,与演化总相位一样,几何相位在 boost 作用下的改变并不会带来任何物理上可观测到的非伽利略协变的效应.

[1] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. London* A **392** 45

[2] Simon B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 2167

[3] Aharonov Y, Anandan J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1593

[4] Samuel J, Bhandari R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2399

[5] Aitchison I J R, Wanelik K 1992 *Proc. R. Soc.* A **439** 25

[6] Mukunda N, Simon R 1993 *Ann. Phys.* (NY) **228** 205

[7] Uhlmann A 1986 *Rep. Math. Phys.* **24** 229
Uhlmann A 1991 *Lett. Math. Phys.* **21** 229

[8] Sjöqvist E, Pati A, Ekert A *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2845

[9] Singh K, Tong D M, Basu K *et al* 2003 *Phys. Rev.* A **67** 032106

[10] Du J F, Zho P, Shi M J *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 100403

[11] Tong D M, Sjöqvist E, Kwek L C, Oh C H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 080405

[12] Shapere A, Wilczek F 1989 *Geometric Phases in Physics* (Singapore: World Scientific)

[13] Li H Z 1998 *Global Properties Simple Physical Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publication) (in Chinese) [李华钟 1998 简单物理系统的整体性(上海:上海科学技术出版社)]

[14] Thouless D J 1998 *Topological Quantum Numbers in Nonrelativistic Physics* (Singapore, London: World Scientific).

[15] Bohm A, Mostafazadeh A, Koizumi H, Niu Q, Zwanziger J 2003 *The Geometric Phase in Quantum Systems* (New York: Springer).

[16] Sjöqvist E, Brown H R, Carlsen H 1997 *Phys. Lett.* A **229** 273

[17] Polavieja G G 1997 *Phys. Lett.* A **232** 1

[18] Weinberg S 1995 *The Quantum Theory of Fields volume* I (New York: Cambridge University)

[19] Anandan J, Christian J, Wanelik K 1997 *Am. J. Phys.* **65** 180

Properties of geometric phase under Galilean transformation*

Zheng Ying-Hong†, Chen Tong, Wang Ping, Chang Zhe

(*Institute of High Energy Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100049, *China*)

(Received 10 March 2007; revised manuscript received 6 April 2007)

Abstract

Properties of geometric phase under Galilean transformation are investigated within a general framework. We found that the geometric phase in the system commonly met with in the laboratory is Galilean invariant. However, this is not always true for general non-relativistic quantum systems. The physical origins of the frame dependence of geometric phase is discussed in detail. We emphasize that the change of geometric phase caused by Galilean boosts does not destroy the results of measurement for two-state interference. It is consistent with the general constraint of Galilean invariance on a non-relativistic quantum system.

Keywords: geometric phase, Galilean transformation

PACC: 0365B

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10575106).

† Corresponding author. E-mail: yh_zheng@ihep.ac.cn