第 56 卷 第 11 期 2007 年 11 月
1000-3290/2007/56(11)/6204-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.11, November, 2007

Hulthén 势散射态的解析解*

陈昌远† 陆法林 孙东升

(盐城师范学院物理系,盐城 224002)

(2007 年 2 月 1 日收到,2007 年 2 月 26 日收到修改稿)

在任意 l 波的离心项 $1/r^2$ 用 $\lambda^2 e^{-\lambda r}/(1-e^{-\lambda r})^2$ 近似表达的条件下,对 Hulthén 势的径向 Schrödinger 方程作自变量指数变换,使此转化为超几何微分方程,获得了 Hulthén 势 s 波散射态的精确解和非 s 波散射态的近似解析解. 给出了相移的解析表达式和按"$k/2\pi$ 标度"归一化的用超几何函数表示的径向波函数. 讨论了解析解的意义.

关键词:Hulthén 势,散射态,解析解,相移

PACC:0365N,0365G

1. 引 言

Hulthén 势[1]是物理学中一个重要的短程势,其表达形式为

$$V(r) = -Ze^2\lambda\frac{e^{-\lambda r}}{1-e^{-\lambda r}}, \tag{1}$$

式中 Z 是一个常数,λ 称为屏蔽参数. 这个势可广泛地应用于粒子物理和核物理[2]、原子物理[3,4]、分子物理[5—7]以及化学物理[8]等众多领域. 如果把 Hulthén 势应用于原子物理,则 Z 就是核电荷数. 然而不幸的是 Hulthén 势的只有 s 波(0 角动量)能够精确求解[1,9],非 s 波由于离心势的存在至今还不能精确求解. 在非相对论情况下,对于束缚态,除了数值计算方法[10,11]外,人们提出了不同的方法来近似求解 Hulthén 势非 s 波的能谱,例如变分法[10,12]、微扰法[13]、移动 $1/N$ 方法[14,15]、NU 方法[16,17](Nikiforov-Uvarov)、超对称量子力学方法[18—21]和渐近迭代方法[22]等. 文献[23—26]还研究了 Hulthén 势 s 波的相对论特性.

事实上,用 NU 方法[16,17]、超对称量子力学方法[18—21]和渐近迭代方法[22]等研究 Hulthén 势的非 s 波束缚态时,对于离心势 $V_1(r)=\frac{l(l+1)\hbar^2}{2Mr^2}$ 基本上都采用这样的处理办法. 考虑到屏蔽参数 λ 比较小时,Hulthén 势退化为库仑势,当 r 比较小时,Hulthén 势也退化为库仑势. 换句话说,当 λ 或者 r 比较小时,或者二者都比较小时,Hulthén 势都退化为库仑势

$$V(r) = -Ze^2\lambda\frac{e^{-\lambda r}}{1-e^{-\lambda r}} \xrightarrow[\lambda\to 0,\, r\to 0]{} -\frac{Ze^2}{r}, \tag{2}$$

因此对于离心势,人们[16—22]就采用如下的用指数函数表示的等效表达形式

$$V_l(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2Mr^2} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2M}\cdot\frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{(1-e^{-\lambda r})^2}. \tag{3}$$

来讨论束缚态非 s 波能谱的近似解的.

由于 Hulthén 势在物理学中有着广泛的应用,所以其散射态特性如何也是一个令人感兴趣的问题. 为此本文研究了 Hulthén 势的散射态,应用(3)式这种等效离心势来代替离心项,获得了散射态的解析解,给出相移的解析表达式和按"$k/2\pi$ 标度"归一化的用超几何函数表示的散射态的径向波函数. 特别是给出了 s 波散射态的精确解. 研究了当 λ 比较小时,相移和波函数的退化情况,文献中有关库仑势散射态的结果作为特例包含在本文的结论之中. 本文给出的结果可望在将 Hulthén 势应用于原子与分子物理以及核物理等散射问题中获得广泛的应用.

2. 散射态的近似解析解

Hulthén 势的径向 Schrödinger 方程为

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2}\Big(E + Ze^2\lambda\frac{e^{-\lambda r}}{1-e^{-\lambda r}}$$

* 江苏省高校自然科学基础研究项目(批准号:06KJB140123)资助的课题.

† E-mail:yctcccy@163.net

$$-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2Mr^2}\Big)u(r)=0. \tag{4}$$

用(3)式来代替上式中的离心势，则(4)式可改写成

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{2M}{\hbar^2}\Big(E+Ze^2\lambda\frac{e^{-\lambda r}}{1-e^{-\lambda r}}-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2M}\cdot\frac{\lambda^2e^{-\lambda r}}{(1-e^{-\lambda r})^2}\Big)u(r)=0. \tag{5}$$

对于散射态 $E>0$，边界条件为

$$r\to 0, u(r)\to r^{l+1};$$
$$r\to\infty, u(r)\to 2\sin(kr-\pi l/2+\delta_l), \tag{6}$$

式中 $k=\sqrt{2ME/\hbar^2}$，满足上式边界条件的散射态波函数是按' $k/2\pi$ 标度 '归一化的[27,28]. 对(5)式做如下变换：

$$\beta^2=\frac{2MZe^2}{\hbar^2\lambda}, \lambda r=x, \tag{7}$$

则(5)式可化为无量纲方程

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}+\Big(\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{\beta^2e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{l(l+1)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\Big)u(x)=0. \tag{8}$$

对自变量做指数变换，即引入新变量 $z=1-e^{-x}$，则 $r\in[0,\infty)$，$z\in[0,1]$，于是上式化为

$$\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{1}{1-z}\frac{du}{dz}+\Big(\frac{k^2}{\lambda^2(1-z)^2}+\frac{\beta^2}{z(1-z)}-\frac{l(l+1)}{z^2(1-z)}\Big)u=0. \tag{9}$$

考虑到散射态的边界条件，做函数代换

$$u(z)=z^{l+1}(1-z)^{-ik/\lambda}f(z), \tag{10}$$

则(9)式可化为

$$z(1-z)\frac{d^2f(z)}{dz^2}+\Big[2(l+1)-\Big(2l+3-\frac{2ik}{\lambda}\Big)z\Big]\frac{df(z)}{dz}+\Big[\beta^2-(l+1)^2+\frac{2ik}{\lambda}(l+1)\Big]f(z)=0. \tag{11}$$

这是参数

$$a=l+1+\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}-ik/\lambda,$$
$$b=l+1-\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}-ik/\lambda,$$
$$c=2l+2 \tag{12}$$

的超几何微分方程，因而解为超几何函数

$$f(z)={}_2F_1(a,b;c;z). \tag{13}$$

这里超几何函数 ${}_2F_1(a,b;c;z)$ 是广义超几何函数[29,30]

$${}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k\cdots(\alpha_p)_k}{k!(\beta_1)_k(\beta_2)_k\cdots(\beta_q)_k}z^k \tag{14}$$

的特例，式中 $(x)_k=x(x+1)\cdots(x+k-1)=\Gamma(x+k)/\Gamma(x)$. 于是散射态波函数

$$u(r)=N_{kl}(1-e^{-\lambda r})^{l+1}e^{ikr}{}_2F_1(a,b;c;1-e^{-\lambda r}). \tag{15}$$

下面研究当 $r\to\infty$ 时，散射态波函数(15)式的渐进行为以确定相移和归一化常数 N_{kl}. 由(12)式可知

$$c-a-b=2ik/\lambda=(a+b-c)^*, \tag{16a}$$
$$c-a=l+1-\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}+ik/\lambda=b^*, \tag{16b}$$
$$c-b=l+1+\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}+ik/\lambda=a^*, \tag{16c}$$

利用超几何函数的变换公式[29,30]

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a,b;c;z)&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\times{}_2F_1(a,b;a+b-c+1;1-z)\\&+(1-z)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times{}_2F_1(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z),\end{aligned} \tag{17}$$

并注意到 ${}_2F_1(a,b;c;0)=1$，则由(16)式可得

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a,b;c;1-e^{-\lambda r})&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\times{}_2F_1(a,b;a+b-c+1;e^{-\lambda r})\\&+(e^{-\lambda r})^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times{}_2F_1(c-a,c-b;c-a-b+1;e^{-\lambda r})\\&\xrightarrow[r\to\infty]{}\Gamma(c)\Big[\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}+e^{-2ikr}\Big(\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\Big)^*\Big],\end{aligned} \tag{18}$$

令

$$\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}=\Big|\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\Big|e^{i\delta}, \tag{19a}$$

则

$$\Big(\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\Big)^*=\Big|\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\Big|e^{-i\delta}, \tag{19b}$$

式中 δ 为实数，于是(18)式化为

$${}_2F_1(a,b;c;1-e^{-\lambda r})\xrightarrow[r\to\infty]{}\Gamma(c)\Big|\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\Big|$$

$$\times e^{-ikr}\left[e^{i(kr+\delta)}+e^{-i(kr+\delta)}\right], \tag{20}$$

由此可得散射态波函数(15)式在 $r\to\infty$ 时的渐进行为为

$$u(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}2N_{kl}\Gamma(c)\left|\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\right|\cos(kr+\delta)$$

$$\xrightarrow[r\to\infty]{}2N_{kl}\Gamma(c)\left|\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\right|\times\sin\left[kr-\pi l/2+\pi(l+1)/2+\delta)\right], \tag{21}$$

和(6)式相比,得 Hulthén 势任意 l 波相移的近似表达式为

$$\begin{aligned}\delta_l&=\pi(l+1)/2+\arg\Gamma(c-a-b)\\&\quad-\arg\Gamma(c-a)-\arg\Gamma(c-b)\\&=\pi(l+1)/2+\arg\Gamma(2ik/\lambda)\\&\quad-\arg\Gamma(l+1+ik/\lambda-\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2})\\&\quad-\arg\Gamma(l+1+ik/\lambda+\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}),\end{aligned} \tag{22}$$

以及按‘$k/2\pi$ 标度’归一化的常数

$$\begin{aligned}N_{kl}&=\frac{1}{\Gamma(c)}\left|\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a-b)}\right|\\&=\frac{1}{(2l+1)!}\left|\frac{\Gamma(l+1+ik/\lambda-\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2})\Gamma(l+1+ik/\lambda+\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2})}{\Gamma(2ik/\lambda)}\right|.\end{aligned} \tag{23}$$

需要指出的是,对 s 波($l=0$),离心项和等效离心势均等于是 0,因此在(22)式和(15)式中取 $l=0$ 得到 Hulthén 势 s 波的精确的相移表达式和按‘$k/2\pi$ 标度’归一化的波函数分别为

$$\delta_0=\pi/2+\arg\Gamma(2ik/\lambda)-\arg\Gamma(1+ik/\lambda-\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2})-\arg\Gamma(1+ik/\lambda+\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}), \tag{24}$$

$$\begin{aligned}u_{k0}(r)&=\left|\frac{\Gamma(1+ik/\lambda-\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2})\Gamma(1+ik/\lambda+\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2})}{\Gamma(2ik/\lambda)}\right|(1-e^{-\lambda r})e^{ikr}\\&\quad\times{}_2F_1(1+\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}-ik/\lambda,1-\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}-ik/\lambda;2;1-e^{-\lambda r}).\end{aligned} \tag{25}$$

3. 讨 论

当屏蔽参数 $\lambda\to0$ 时,Hulthén 势退化为库仑势,因此我们在上一节得到的 Hulthén 势散射态波函数(15)式和相移表达式(22)式应退化为求解库仑势散射态所得到的结果.下面我们就来讨论这一情况.由于 $\lim\limits_{\lambda\to0}a=l+1-iZ/ka_0$,$\lim\limits_{\lambda\to0}b=-2ik/\lambda\to\infty$,式中 $a_0=\hbar^2/Me^2$ 是玻尔半径,因此由超几何函数和合流超几何函数的关系[29,30]

$$\lim_{b\to\infty}{}_2F_1(a,b;c;z/b)={}_1F_1(a;c;z), \tag{26}$$

(15)式可改写为

$$u(r)=A_{kl}(kr)^{l+1}e^{ikr}{}_1F_1(l+1-iZ/ka_0;2l+2;-2ikr), \tag{27}$$

这与直接求解库仑势所给出的散射态的波函数是相同的[27,28].式中归一化常数

$$A_{kl}=\frac{2^{l+1}|\Gamma(l+1-iZ/a_0k)|e^{\pi Z/2a_0k}}{(2l+1)!}. \tag{28}$$

再看相移的退化,由于

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to0}\arg(c-a)\\&=\lim_{\lambda\to0}\arg(l+1-\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}+ik/\lambda)\\&=\arg(l+1+iZ/ka_0),\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to0}[\arg\Gamma(c-a-b)-\arg\Gamma(c-b)]\\&=\lim_{\lambda\to0}[\arg\Gamma(2ik/\lambda)\\&\quad-\arg\Gamma(l+1+\sqrt{\beta^2-k^2/\lambda^2}+ik/\lambda)]\\&=\lim_{\lambda\to0}[\arg\Gamma(2ik/\lambda)\\&\quad-\arg\Gamma(l+1+2ik/\lambda)]\\&=\lim_{\lambda\to0}[\arg\Gamma(2ik/\lambda)\\&\quad-\arg[(l+2ik/\lambda)(l-1+2ik/\lambda)\\&\quad\cdots(2ik/\lambda)\Gamma(2ik/\lambda)]]\\&=-\pi(l+1)/2,\end{aligned} \tag{30}$$

所以(22)式退化为

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to0}\delta_l&=\pi(l+1)/2+\arg\Gamma(c-a-b)\\&\quad-\arg\Gamma(c-a)-\arg\Gamma(c-b)\\&=-\arg\Gamma(l+1+iZ/ka_0)\\&=\arg\Gamma(l+1-iZ/ka_0).\end{aligned} \tag{31}$$

这与直接求解库仑势所得散射态的相移表达式是完全相同的[27,28].

4. 结　论

对于 Hulthén 势任意 l 波的离心势，本文采用文献中给出的指数函数形式的近似表达式，然后对 Hulthén 势任意 l 波的径向 Schrödinger 方程作自变量指数变换，得到了散射态的解析解，给出了解析的相移表达式和用超几何函数表示的按“$k/2\pi$ 标度”归一化的散射态的径向波函数．特别是我们给出了 s 波精确的相移表达式和相应的波函数．当屏蔽参数 $\lambda\to0$ 时，Hulthén 势退化为库仑势，本文获得的有关 Hulthén 势散射态的结果均退化为直接求解库仑势的散射态所给出的结论．也就是说，文献中有关库仑势散射态的结果均作为特例包含在本文的结论之中．本文给出的结果可望在将 Hulthén 势应用于原子与分子物理以及核物理等散射问题中获得广泛的应用．

[1] Hulthén L 1942 *Ark. Mat. Astron. Fys.* A **28** 5

[2] Durand B, Durand L 1981 *Phys. Rev.* D **23** 1092

[3] Dutt R, Chowdhury K, Varshni Y P 1985 *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** 1379

[4] Xu T, Cao Z Q, Ou Y C, Shen Q S, Zhu G L 2006 *Chin. Phys.* **15** 1172

[5] Bitensky I S, Ferleger V K, Wojciechowski I A 1997 *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.* B **125** 201

[6] Jia C S, Wang J Y, He S, Sun L T 2000 *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 6993

[7] Sun J X and Zhang L Y 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1953 (in Chinese) [孙久勋、章立源 1996 物理学报 **45** 1953]

[8] Olson J A, Micha D A 1978 *J. Chem. Phys.* **68** 4252

[9] Flügge S 1994 *Practical Quantum Mechanics* vol **1** (Berlin: Springer)

[10] Varshni Y P 1990 *Phys. Rev.* A **41** 4682

[11] Nunez M A 1993 *Phys. Rev.* A **47** 3620

[12] Patil S H 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 3153

[13] Matthys P, De Meyer H 1988 *Phys. Rev.* A **38** 1168

[14] Tang A Z, Chan F T 1987 *Phys. Rev.* A **35** 911

[15] Roy B, Roychoudhury R 1987 *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** 3051

[16] Ikhdair S M, Sever R 2005 arxiv: quant-ph/0508009

[17] Aktas M, Sever R 2004 arxiv: hep-th/0409139

[18] Filho E D, Ricotta R M 1995 *Mod. Phys. Lett.* A **10** 1613

[19] Gönül B, Özer O, Cancelik Y, Kocak M 2000 *Phys. Lett.* A **275** 238

[20] Qian S W, Huang B W, Gu Z Y 2002 *New J. Phys.* **4** 13

[21] Gönül B 2003 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1685

[22] Bayrak O, Kocak G, Boztosun 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 11521

[23] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[24] Hu S Z, Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[25] Guo J Y, Meng J, Xu F X 2003 *Chen. Phys. Lett.* **20** 602

[26] Simsek M, Egrifes H 2004 *J. Phys.* A **37** 4379

[27] Landau L D and Lifshitz E M 1979 *Quantum Mechanics* (non-relativistic theory) (3rd ed) (New York: Pregamon Press) ch5

[28] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics* vol. Ⅱ (3rd ed.) (Beijing: Science Press) ch. 10 (in Chinese) [曾谨言 2000 量子力学 卷Ⅱ (第 3 版) (北京: 科学出版社) 第 10 章]

[29] Wang Z X, Guo D R 1979 *An Introduction to Special Function* (Beijing: Science Press) Chapter 4 (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 1979 特殊函数概论 (北京: 科学出版社) 第 4 章]

[30] Liu S S, Liu S D 1988 *Special Function* (Beijing: Meteorological Press) Chapter8 (in Chinese) [刘式适、刘式达 1988 特殊函数 (北京: 气象出版社) 第 8 章]

Analytical solution of scattering states for Hulthén potentials*

Chen Chang-Yuan† Lu Fa-Lin Sun Dong-Sheng

(*Department of Physics*, *Yancheng Teachers College*, *Yancheng* 224002, *China*)

(Received 1 February 2007; revised manuscript received 26 February 2007)

Abstract

In this paper, using the exponential function transformation, the radial Schrödinger equation with the Hulthén potential is transformed into a hypergeometric differential equation under the condition that an effective approximation as $1/r^2 \approx \lambda^2 e^{-\lambda r}/(1-e^{-\lambda r})^2$ is used for the centrifugal term in the case of any l-states. The exact solution of s-wave scattering state and the approximate analytical solution of non-s-wave scattering states for the Schrödinger equation with the Hulthén potential are presented. The normalized wave functions expressed in terms of hypergeometric functions of scattering states on the "$k/2\pi$ scale" and the calculation formula of phase shifts are given. The physical meaning of the approximate analytical solution is discussed.

Keywords: Hulthén potential, scattering states, analytical solution, phase shifts

PACC: 0365N, 0365G

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Jiangsu Higher Education Institutions of China (Grant No. 06KJB140123).

† E-mail: yctcccy@163.net