

鲁棒 terminal 滑模控制实现一类不确定混沌系统同步*

黄国勇[†] 姜长生 王玉惠

(南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)
(2006 年 8 月 8 日收到, 2007 年 3 月 5 日收到修改稿)

针对一类不确定混沌系统设计了基于快速模糊干扰观测器的鲁棒 terminal 滑模控制方案. 首先通过设计快速模糊干扰观测器, 克服了传统模糊干扰观测器在误差较小时收敛速度慢的缺点. 然后严格证明了在存在未知干扰和不确定情况下, 同步误差及观测器误差均在有限时间内收敛到非常小的区域. 最后对 Duffing-Holmes 混沌系统进行仿真, 结果表明了所设计干扰观测器的优越性和闭环控制方案的有效性.

关键词: 混沌同步, 快速模糊干扰观测器, terminal 滑模, 有限时间内收敛

PACC: 0545

1. 引言

由于混沌信号具有遍历性、对初值的极端敏感性和随机性的特点, 因而在光学、通讯、医学、生物、工程等领域显示出广泛的应用潜力和发展前景, 日益引起国内外学者的关注和兴趣. Pecora 和 Carroll 用电子电路实现了混沌同步^[1], 改变了人们认为混沌不可控的观点, 从此掀起了研究混沌控制与同步的热潮. 随后不少学者提出了各种各样的混沌同步方法, 如自反馈方法^[2]、自适应方法^[3]、神经网络方法^[4]、观测器方法^[5]及滑模控制^[6]等. 随着研究的深入, 人们开始意识到同步速度的重要性, 并将具有有限时间收敛特性的 terminal 滑模成功应用到混沌的同步中^[7,8]. 文献 7]设计了一种带补偿函数的有限时间收敛 terminal 滑模同步方案, 然而文中对不确定的假设过于保守, 而且证明中存在错误. 文献 8]同样设计另一种 terminal 滑模控制, 其主要贡献是对几个混沌系统进行变换后, 获得了统一的表达形式, 但文中的滑模面有可能产生奇异, 另外也没有考虑扰动情况. 因此有必要对 terminal 滑模控制在混沌同步中的应用进行更深入地研究.

模糊干扰观测器(fuzzy disturbance observer, FDO)能在线无限逼近系统中存在的未知干扰和不

确定, 且优于直接或间接自适应模糊方法^[9], 因而成为当前研究的热点. 但传统 FDO 在逼近误差很小时, 学习速度慢, 逼近时间长. 受文献 10]的启发, 本文首先改进了 FDO 的自适应学习律, 设计了快速模糊干扰观测器(fast fuzzy disturbance observer, FFDO), 使其无论在逼近误差大还是小时均具有快速的学习速度, 从而缩短了 FDO 的学习时间, 提高了其逼近能力, 消除了文献 5]中对于未知干扰变化缓慢的限制. 然后, 针对一类不确定混沌系统设计了基于 FFDO 的鲁棒 TSMC, 在存在干扰和不确定情况下, 滑模面仍然能够在有限时间内收敛到各自非常小的区域内, 最后, 对 Duffing-Holmes 混沌系统进行仿真, 结果表明, 所提出方法具有强鲁棒性和快速响应速度.

2. 快速模糊干扰观测器设计

考虑如下非线性系统:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n,$$

$$\dot{x}_n = \alpha(x) + \Delta\alpha(x)$$

$$+ [\beta(x) + \Delta\beta(x)]u + d(t), \quad (1)$$

其中 u 为控制输入, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是系统可

* 国家自然科学基金(批准号 90405011)资助的课题.

[†] E-mail: hgymy@sina.com

测状态. $\alpha(x), \beta(x)$ 为已知的标称函数. $\Delta\alpha(x), \Delta\beta(x), d(t)$ 分别表示系统参数不确定和外部干扰. 控制任务是设计控制量 u 使状态 x 在有限时间内收敛到很小的区域. 为此, 将 $\Delta\alpha(x), \Delta\beta(x), d(t)$ 一起视为干扰, 改写(1)式的最后一项

$$\dot{x}_n = \alpha(x) + \beta(x)u + \Omega(x, u), \quad (2)$$

其中 $\Omega(x, u) = \Delta\alpha(x) + \Delta\beta(x)u + d(t)$ 表示全部扰动, 通常是未知的. 利用模糊逻辑系统的逼近能力, FDO 用来监控未知的扰动 $\Omega(x, u)$, 达到镇定系统的目的. 为了构建 FDO, 考虑下面的动态系统:

$$\dot{\mu} = -\sigma\mu + f(x, u, \hat{\theta}), \quad (3)$$

其中

$$f(x, u, \hat{\theta}) = \sigma x_n + \alpha(x) + \beta(x)u + \hat{\Omega}(x, u | \hat{\theta}),$$

$\sigma > 0, \hat{\Omega}(x, u | \hat{\theta}) = \hat{\theta}^T \xi(x, u)$ 表示 FDO 的输出, 是

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \text{Proj}[\kappa(\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\xi(x, u)] \\ &= \kappa(\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\xi(x, u) - I_{\theta}\kappa \frac{(\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\hat{\theta}^T \xi(x, u)\hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} \hat{\theta}, \\ I_{\theta} &= \begin{cases} 0, & \|\hat{\theta}\|^2 < M_{\theta} \text{ 或 } \|\hat{\theta}\|^2 = M_{\theta} \text{ 和 } (\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\hat{\theta}^T \xi(x, u) \geq 0, \\ 1, & \|\hat{\theta}\|^2 = M_{\theta} \text{ 和 } (\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\hat{\theta}^T \xi(x, u) < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\text{Proj}[\cdot]$ 表示投影算子, 保证 $\hat{\theta}$ 在调节过程中有界, M_{θ} 是参数的可行域, τ, δ 为正奇数, 且 $\tau < \delta$. 当 $\zeta \rightarrow 0$ 时, 因为 $|\zeta^{\tau/\delta}| > |\zeta|$, 所以 $\hat{\theta}$ 按(5)式调节比按(4)式调节速度快. 例如, 当 $\zeta = 0.001, \tau/\delta = 1/3$ 时, 由(4)式知 $\dot{\hat{\theta}} = 0.001\kappa\xi(x, u)$, 而由(5)式得到 $\dot{\hat{\theta}} = 0.101\kappa\xi(x, u)$. 这表明在相同条件下, FFDO 的学习速度是 FDO 的 101 倍.

注 1 不能通过无限增大(4)式中 κ 的值来提高 FDO 的学习速度, 过大的 κ 会产生“过学习”, 从而导致系统抖动和不稳定.

定理 1 重新构造如下动态系统

$$\dot{\mu} = -\sigma\mu + q(x, u, \hat{\theta}), \quad (6)$$

其中 $q(x, u, \hat{\theta}) = \sigma x_n + \lambda(x_n - \mu)^{\tau/\delta} + \alpha(x) + \beta(x)u + \hat{\Omega}(x, u | \hat{\theta}), \sigma, \lambda > 0, \tau, \delta$ 与(5)式中相同. 如果 FFDO 的可调参数由(5)式自适应调节, 那么观测误差 ζ 将最终一致有界.

证明 设 θ^* 为 FFDO 的最优参数向量, 定义为

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in M_{\theta}} [\sup_{x \in M_x} |\Omega(x) - \hat{\Omega}(x | \hat{\theta})|], \quad (7)$$

其中 M_x 表示 x 的某个紧集. $\bar{\theta} = \theta^* - \hat{\theta}$ 为参数向量估计误差. 由(2)(6)式可以得到

一类采用 IF-THEN 规则的模糊逻辑系统, 它运用单点模糊化、乘积推理、重心法去模糊, $\hat{\theta}$ 是可调参数, $\xi(x, u)$ 是模糊基函数, 见文献[9]. 定义 $\zeta = x_n - \mu$ 为观测器误差, 从(2)(3)式可以看出, 当 $\zeta \rightarrow 0$ (即 $x_n \rightarrow \mu$) 时, $\hat{\Omega}(x, u | \hat{\theta}) \rightarrow \Omega(x, u)$, 从而实现了对未知干扰的逼近. 传统 FDO 的参数按如下形式自适应调节^[9]:

$$\dot{\hat{\theta}} = \kappa\zeta\xi(x, u), \quad (4)$$

其中 $\kappa > 0$. 从(4)式可以看出, 由于 κ 是定值, $\xi(x, u)$ 的值在 0—1 间缓慢变化, 因此当 ζ 较小时, $\hat{\theta}$ 的学习速度非常慢, 从而导致 FDO 逼近误差不能快速收敛, 进而影响了跟踪品质. 为此, 首先设计如下的 FFDO 学习律:

$$\dot{\zeta} = -\sigma\zeta - \lambda\zeta^{\tau/\delta} + \bar{\theta}^T \xi(x, u) + \epsilon(x), \quad (8)$$

其中 $\epsilon(x)$ 表示 FFDO 的最佳逼近误差, 且 $|\epsilon(x)| \leq \bar{\epsilon}$. 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{\delta}{(\delta + \tau)}\zeta^{\delta + \tau} + \frac{1}{2\kappa}\bar{\theta}^T \bar{\theta}, \quad (9)$$

两边对时间求导有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \zeta\dot{\zeta} + \zeta^{\tau/\delta}\dot{\zeta} + \frac{1}{\kappa}\bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}} \\ &= (\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\dot{\zeta} - \sigma\zeta - \lambda\zeta^{\tau/\delta} \\ &\quad + \bar{\theta}^T \xi(x, u) + \epsilon(x) + \frac{1}{\kappa}\bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}} \\ &= -\sigma\zeta^2 - (\lambda + \sigma)\zeta^{\delta + \tau} \\ &\quad - \lambda\zeta^{2\tau/\delta} + (\zeta + \zeta^{\tau/\delta}) \\ &\quad \cdot (\bar{\theta}^T \xi(x, u) + \epsilon(x)) + \frac{1}{\kappa}\bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}} \\ &\leq -\sigma\zeta^2 - \lambda\zeta^{2\tau/\delta} + (\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\epsilon(x) \\ &\quad + \bar{\theta}^T ((\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\xi(x, u) + \frac{1}{\kappa}\dot{\bar{\theta}}). \end{aligned} \quad (10)$$

将(5)式代入(10)式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sigma\zeta^2 - \lambda\zeta^{2\tau/\delta} + (\zeta + \zeta^{\tau/\delta})\epsilon(x) \\ &\leq -\sigma\zeta^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\zeta^2 + \frac{1}{2\sigma}\epsilon^2(x)\right) + \zeta\epsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\sigma}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2\sigma} \epsilon^2(\mathbf{x}) \right) + \left(\frac{\lambda}{2} \zeta^{2\tau/\delta} + \frac{1}{2\lambda} \epsilon^2(\mathbf{x}) \right) \\
& - \lambda \zeta^{2\tau/\delta} + \zeta^{\tau/\delta} \epsilon(\mathbf{x}) - \left(\frac{\lambda}{2} \zeta^{2\tau/\delta} + \frac{1}{2\lambda} \epsilon^2(\mathbf{x}) \right) \\
\leq & - \frac{\sigma}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2\sigma} \epsilon^2(\mathbf{x}) - \left(\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \zeta - \sqrt{\frac{1}{2\sigma}} \epsilon(\mathbf{x}) \right)^2 \\
& - \frac{\lambda}{2} \zeta^{2\tau/\delta} + \frac{1}{2\lambda} \epsilon^2(\mathbf{x}) - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \zeta^{2\tau/\delta} - \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \epsilon(\mathbf{x}) \right)^2 \\
\leq & - \frac{\sigma}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2\sigma} \epsilon^2(\mathbf{x}) - \frac{\lambda}{2} \zeta^{2\tau/\delta} + \frac{1}{2\lambda} \epsilon^2(\mathbf{x}), \quad (11)
\end{aligned}$$

因此,当 $|\zeta| > \max(\bar{\epsilon}/\sigma (\bar{\epsilon}/\lambda)^{\delta/\tau})$ 时, \dot{V} 负定,即观测误差 ζ 最终一致有界.

由于 $\bar{\epsilon}$ 可以任意小,因此 $\max(\bar{\epsilon}/\sigma (\bar{\epsilon}/\lambda)^{\delta/\tau})$ 也非常小.这意味着 ζ 将会渐进收敛到一个非常小的区域 $|\zeta| < \max(\bar{\epsilon}/\sigma (\bar{\epsilon}/\lambda)^{\delta/\tau} + \eta)$ 内,其中 η 为任意小正数.从(8)式可以看出,当 ζ 进入收敛区域后, $\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u) + \epsilon(\mathbf{x})$ 也会收敛到另一个小区域.进一步,定理2将证明 ζ 在有限时间内收敛到事先设计的小区域.

引理1^[10] 假设连续函数 $v(t)$ 满足微分不等式

$$\dot{v}(t) \leq -av(t) - bv^{q/p}(t), \forall t \geq t_0, \quad (12)$$

且 $a, b > 0, p, q$ 为正奇数 ($q < p$).则 $v(t)$ 将在有限时间 t_r 内收敛到零.且

$$t_r = t_0 + \frac{p}{a(p-q)} \ln \frac{av(t_0)^{p-q} + b}{b}. \quad (13)$$

定理2 如果观测误差动态系统按(8)式变化,FFDO的可调参数由(5)式自适应调节,那么观测误差 ζ 将在有限时间内收敛到一个小区域.

证明 重新构造如下 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \zeta^2, \quad (14)$$

对 V_1 两边求时间的导数有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \zeta \dot{\zeta} \\
&= \zeta (-\sigma \zeta - \lambda \zeta^{\tau/\delta} + \bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u) + \epsilon(\mathbf{x})) \\
&= -\sigma \zeta^2 - \lambda \zeta^{(\tau+\delta)/\delta} + \zeta (\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u) + \epsilon(\mathbf{x})) \\
&= -\sigma \zeta^2 - \left(\lambda - \frac{\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u) + \epsilon(\mathbf{x})}{\zeta^{\tau/\delta}} \right) \zeta^{(\tau+\delta)/\delta} \\
&\leq -2\sigma V_1 - 2^{\tau+\delta} \lambda^{2\delta} \\
&\quad \times \left(\lambda - \left| \frac{\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u) + \epsilon(\mathbf{x})}{\zeta^{\tau/\delta}} \right| \right) V_1^{(\tau+\delta) \times 2\delta} \quad (15)
\end{aligned}$$

可以通过选择合适的参数使得

$$\lambda - \left| \frac{\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u) + \epsilon(\mathbf{x})}{\zeta^{\tau/\delta}} \right| \geq \lambda_1 > 0, \quad (16)$$

即

$$|\zeta| \geq (|\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u) + \epsilon(\mathbf{x})| / (\lambda - \lambda_1))^{\delta/\tau}, \quad (17)$$

于是,由(15)式得到

$$\dot{V}_1 \leq -2\sigma V_1 - 2^{\tau+\delta} \lambda^{2\delta} \lambda_1 V_1^{(\tau+\delta) \times 2\delta} \leq 0. \quad (18)$$

根据引理1,在(17)式所示的区域内, V_1 将在有限时间内收敛,即意味着 ζ 将在有限时间收敛到

$$\Delta_1 = \{ \zeta \mid |\zeta| < (|\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u) + \epsilon(\mathbf{x})| / (\lambda - \lambda_1))^{\delta/\tau} + \eta \}, \quad (19)$$

且收敛时间为

$$t_{r1} = \frac{\delta}{\alpha(\delta - \tau)} \ln \frac{2\sigma V_1(\zeta_0)^{\delta - \tau} + 2^{\tau+\delta} \lambda^{2\delta} \lambda_1}{2^{\tau+\delta} \lambda^{2\delta} \lambda_1}. \quad (20)$$

注2 由模糊逻辑系统的逼近能力知 $\bar{\epsilon}$ 可以任意小.由定理1的论述知 $\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u)$ 在(5)式所示学习律下,将很快收敛到非常小的区域.进一步,注意到 $\dot{\bar{\theta}} = -\hat{\bar{\theta}}$,比较(4)式和(8)式可知,如果设计 κ 使得 $\kappa \xi(\mathbf{x}, u)$ 的元素大于 $\max(\sigma, \lambda)$ 事实上,仿真中 κ 通常取几百,而 σ, λ 通常取个位数,此条件容易满足.那么 $\bar{\theta}^T \xi(\mathbf{x}, u)$ 的收敛速度将比 ζ 的快,同时注意到 $|\zeta|^{\tau/\delta} > |\zeta|$,所以(16)式很容易成立.这意味着区域 Δ_1 可以非常小.

3. 鲁棒 terminal 滑模控制设计

3.1. 系统描述

考虑以下两个 n 维混沌系统:

驱动系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\
\dot{x}_n &= f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n;
\end{aligned} \quad (21)$$

响应系统

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i &= y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\
\dot{y}_n &= f(y, t) + \Delta(y) + d(t) + u, \quad y \in R^n. \quad (22)
\end{aligned}$$

事实上大多数混沌系统都可以(或经过变换后)表示成(21)式的形式^[8],因此本文研究的系统具有较广泛的代表性.(22)式中 $\Delta(y)$ 表示不确定项, $d(t)$ 则代表外界干扰, u 表示控制输入.系统(21)在选择一定参数的情况下表现为混沌状态.

假定在时间域 $[t_0, +\infty)$ ($t_0 > 0$) 内,对于任意的初始条件 $x_0 = x(t_0)$ 和 $y_0 = y(t_0)$,系统(21)和(22)均存在唯一解^[7].

令 $e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则(22)式减去

(21) 式可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{e}_n &= g(e, t) + \Delta f(y) + d(t) + u, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $g(e, t) = f(e+x, t) - f(x, t)$. 控制任务是设计 terminal 滑模控制器, 使初始条件不同的驱动系统 (21) 和响应系统 (22) 能够在有限时间内同步, 并且同步误差收敛到非常小的区域.

3.2. 基于 FFDO 的 terminal 滑模控制设计

近年来, 一种 terminal 滑模控制引起了学者的兴趣. 通过引入神经网络中最终吸引子 (terminal attractor) 的概念, terminal 滑模控制使系统状态在有限时间内收敛到零, 与普通滑模的渐进收敛性质相比, 可以获得更快的响应速度. 文献 [7] 中设计的滑模面只有在获得外部干扰和 (或) 不确定的足够信息 (如假设干扰小于某个已知函数) 后, 才能消除到达过程. 其定理 3 的证明中认为参数估计值能在有限时间内大于真实参数是不正确的, 因为参数估计的自适应律是渐进稳定的形式, 并不能保证在有限时间内大于真实值. 为了避免文献 [8] 中设计的滑模面的奇异现象, 设计如下 terminal 滑模面:

$$s = \dot{x} + ax + b |x|^{q/p} \text{sign}(x) = 0, \quad (24)$$

其中, $x \in \mathbf{R}$ 是状态变量, $a, b > 0, q, p$ 是正奇数且 $p > q$. 通过解微分方程, 可以得到 (24) 式的解析解, 即状态到达 $x = 0$ 的时间为

$$t_r = \frac{p}{a(p-q)} \ln \frac{a |x(0)|^{(p-q)/p} + b}{b}. \quad (25)$$

为了满足控制目的, 设计如下的递归滑模面:

$$s_0 = e_1,$$

$$s_1 = \dot{s}_0 + \alpha_0 s_0 + \beta_0 |s_0|^{\gamma_0} \text{sign}(s_0),$$

$$s_{n-1} = \dot{s}_{n-2} + \alpha_{n-2} s_{n-2} + \beta_{n-2} |s_{n-2}|^{\gamma_{n-2}} \text{sign}(s_{n-2}), \quad (26)$$

并设计如下控制律:

$$\begin{aligned} u &= - \left[\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i s_i^{(n-i-1)} + \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i \frac{d^{n-i-1}}{dt^{n-i-1}} (|s_i|^{\gamma_i} \text{sign}(s_i)) \right] \\ &\quad - k_1 s_{n-1} - c_1 |s_{n-1}|^\rho \text{sign}(s_{n-1}) \\ &\quad - \hat{\phi} - g(e, t), \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $\hat{\phi} = \hat{\theta}^T \xi(x, u)$ 是 FFDO 的输出.

定理 3 系统 (23) 在控制 (27) 的作用下, 并且 FFDO 的参数按 (5) 式自适应调整, 则 $e_i, i = 1, 2, \dots, n$ 将在有限时间内收敛到各自非常小的区域.

证明 由 (26) 式可知当 s_i 趋向零时 $e_{i+1}, i = 0, 1,$

$\dots, n-1$ 也趋向零, 因此只需证明 s_i 在有限时间内收敛到非常小的区域. 下面将首先证明 s_{n-1} 在有限时间内收敛到 $s_{n-1} = 0$ 的小邻域内. 由

$$\begin{aligned} s_i &= \dot{s}_{i-1} + \alpha_{i-1} s_{i-1} + \beta_{i-1} s_{i-1}^{\gamma_{i-1}}, \\ i &= n-1, \dots, 1, \end{aligned} \quad (28)$$

可得

$$\begin{aligned} s_i^{(k)} &= s_{i-1}^{(k+1)} + \alpha_{i-1} s_{i-1}^{(k)} + \beta_{i-1} \frac{d^k}{dt^k} s_{i-1}^{\gamma_{i-1}}, \\ i &= n-1, \dots, 1, \end{aligned} \quad (29)$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{s}_{n-1} &= s_0^{(n)} + \left[\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i s_i^{(n-i-1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i \frac{d^{n-i-1}}{dt^{n-i-1}} (|s_i|^{\gamma_i} \text{sign}(s_i)) \right] \\ &= g(e, t) + \Delta f(y) + d(t) + u \\ &\quad + \left[\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i s_i^{(n-i-1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i \frac{d^{n-i-1}}{dt^{n-i-1}} (|s_i|^{\gamma_i} \text{sign}(s_i)) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

根据定理 1 中的论述,

$$\Delta f(y) + d(t) = \phi^* + \epsilon(y), \quad (31)$$

其中, $\phi^* = (\theta^*)^T \xi$ 表示最佳逼近, $|\epsilon(y)| \leq \bar{\epsilon}$ 表示最佳逼近误差. 将 (27) 式代入 (30) 式得

$$\begin{aligned} \dot{s}_{n-1} &= -k_1 s_{n-1} - c_1 |s_{n-1}|^\rho \text{sign}(s_{n-1}) \\ &\quad + \hat{\theta}^T \xi + \epsilon(y), \end{aligned} \quad (32)$$

其中, $\tilde{\theta} = \theta^* - \hat{\theta}$ 表示 FFDO 参数估计误差.

定义如下 Lyapunov 函数

$$V_{n-1} = \frac{1}{2} s_{n-1}^2, \quad (33)$$

对 (33) 式两边求时间的微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &= s_{n-1} \dot{s}_{n-1} \\ &= s_{n-1} (-k_1 s_{n-1} - c_1 |s_{n-1}|^\rho \text{sign}(s_{n-1}) \\ &\quad + \hat{\theta}^T \xi + \epsilon(y)) \\ &\leq -k_1 s_{n-1}^2 - c_1 |s_{n-1}|^{\rho+1} + |s_{n-1}| \\ &\quad \cdot |\tilde{\theta}^T \xi + \epsilon(y)| \\ &\leq -k_1 s_{n-1}^2 - \left(c_1 - \frac{|\tilde{\theta}^T \xi| + \bar{\epsilon}}{|s_{n-1}|^\rho} \right) \\ &\quad \times |s_{n-1}|^{\rho+1}. \end{aligned} \quad (34)$$

如果存在正常数 \underline{c}_1 使得

$$c_1 - \frac{|\tilde{\theta}^T \xi| + \bar{\epsilon}}{|s_{n-1}|^\rho} \geq \underline{c}_1 \quad (35)$$

成立, 即

$$|s_{n-1}| \geq \left((|\tilde{\theta}^T \xi| + \bar{\epsilon}) (c_1 - \underline{c}_1) \right)^{1/\rho}, \quad (36)$$

则(34)式可以写成

$$\dot{V}_{n-1} \leq -2k_1 V_{n-1} - \underline{c}_1 V_{n-1}^{\rho+1} \underline{c}_1. \quad (37)$$

由引理 1 可知,在(36)式所示的区域内, V_{n-1} 将在有限时间内收敛,即意味着 s_{n-1} 将在有限时间 t_{n-1} 内收敛到

$$\Delta_{n-1} = \{s_{n-1} \mid |s_{n-1}| < ((|\bar{\theta}^T \xi| + \bar{\epsilon}) (c_1 - \underline{c}_1))^{\frac{1}{\rho}} + \eta\}, \quad (38)$$

且 t_{n-1} 为

$$t_{n-1} = t_{\gamma 1} + \frac{1}{k_1(1-\rho)} \times \ln \frac{2k_1 V(s_{n-1}(t_{r1}))^{1-\rho} \gamma_2 + \underline{c}_1^{\rho+1} \gamma_2}{\underline{c}_1^{\rho+1} \gamma_2}. \quad (39)$$

注 3 由定理 2 可知,经过 t_{r1} 时间后, $|\bar{\theta}^T \xi| + \bar{\epsilon}$ 将收敛到非常小的区域,同时注意到 $|s_{n-1}|^\rho > |s_{n-1}|$ (当 $|s_{n-1}| < 1$ 时),这表明即使 $|s_{n-1}|$ 很小, (35)式也容易满足.例如,当 c_1 取 5, \underline{c}_1 取 3.9, $|\bar{\theta}^T \xi| = 0.01$, $\bar{\epsilon} = 0.001$, $\rho = 1/3$ 时,可以解得 $|s_{n-1}| \geq 1 \times 10^{-6}$,这意味着 Δ_{n-1} 同样是非常小的区域.

采用完全类似的方法可以证明 s_{n-2} 将在有限时间 t_{n-2} 内收敛到非常小的区域 Δ_{n-2} .依次类推,可以证明 s_i 将在有限时间 t_i 内收敛到非常小的区域 Δ_i 内($i = n-3, \dots, 0$).

注 4 从(32)式可知,由于设计了 terminal 滑模形式的有限时间收敛趋近律,因此滑模面可以在有限时间内收敛.同时,由于 $0 < \rho < 1$,则 $|s_{n-1}|^\rho \text{sigr}(s_{n-1})$ 连续,消除了抖振.应当指出,如果 $\rho \rightarrow 0$, (32)式则表示传统的滑模控制;如果 $\rho \rightarrow 1$,则成为线性控制.通过选择合适的 ρ 既消除抖振,又使系统具有鲁棒性.

4. 数值仿真

考虑如下 Duffing-Holmes 系统^[7]:

驱动系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - ax_2 - x_1^3 + b \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (40)$$

响应系统

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -a_1 y_1 - ay_2 - y_1^3 + b \cos(\omega t) \\ &\quad + \Delta f(y) + d(t) + u. \end{aligned} \quad (41)$$

其中 $\Delta f(y) = \cos(y_1 + y_2)$, $d(t) = 5 \text{sin}(3t)$ 都未知.当 $a_1 = -1$, $a = 0.25$, $b = 0.3$, $\omega = 1$ 时,驱动系统

(41)表现出混沌状态.初始状态 $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = 0.2$, $y_1(0) = -0.5$, $y_2(0) = 0.5$.令 $e_1 = y_1 - x_1$, $e_2 = y_2 - x_2$ (41)式减去(40)式可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -a_1 e_1 - ae_2 - y_1^3 + x_1^3 \\ &\quad + \Delta f(y) + d(t) + u. \end{aligned} \quad (42)$$

仿真参数如下: $k = 500$, $\tau/\delta = 3/5$; $\alpha_0 = 3$, $\beta_0 = 5$, $\gamma_0 = 3/5$, $k_1 = c_1 = 3$, $\rho = 3/5$.仿真结果如图 1 图 2 所示.图 1 是不采用 FFDO 时的同步曲线,从图中可以看出,尽管能够实现同步,但是由于干扰和不确定性的存在,出现了较大波动.这是因为 terminal 滑模本身的鲁棒性不足以消除较大干扰和不确定性的影响.图 2 由于采用 FFDO 在线估计干扰和不确定,因此取得了很好的跟踪效果,不仅鲁棒性强(没有对干扰做任何假设),而且同步时间短,不到 1 s,远比文献 [7] 中的 15 s 快.

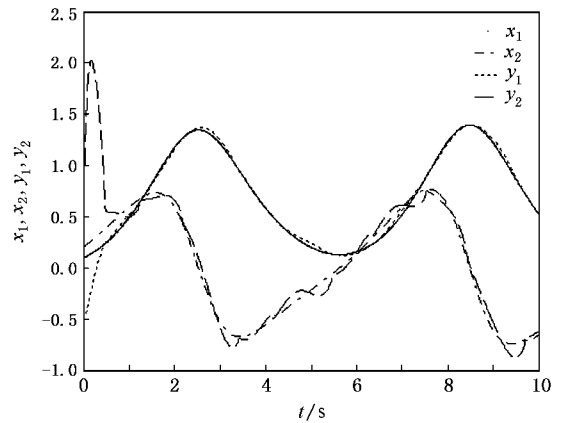


图 1 不采用 FFDO 的同步曲线

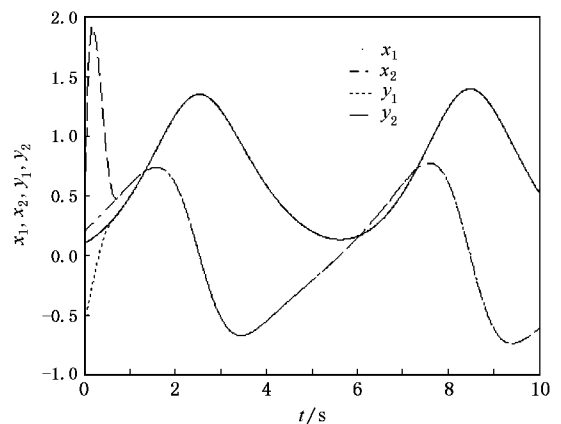


图 2 鲁棒 terminal 滑模控制的同步曲线

5. 结 论

首先针对传统 FDO 在逼近误差非常小时学习缓慢的缺点,设计了 FFDO,严格证明了其逼近误差在有限时间内收敛到一个小区域.然后基于 FFDO

设计了鲁棒 terminal 滑模控制控制方案,消除了系统不确定和外部干扰的影响,并保证逼近误差和系统误差均在有限时间内收敛到一个小区域,从而提高了整个闭环系统的响应速度.最后,对 Duffing-Holmes 混沌系统同步仿真,结果证明了设计方案的优越性.

- [1] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Physical Review Letters* **64** 821
 [2] Tao Ch H , Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 281(in Chinese) [陶朝海、陆君安 2003 物理学报 **52** 281]
 [3] Yue D , Jun Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 292(in Chinese) [岳东、Jun Yoneyama 2003 物理学报 **52** 292]
 [4] Tan W , Wang Y N 2005 *Chinese Physics* **14** 72
 [5] Yao L N , Gao J F , Liao L H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 35(in Chinese) [姚丽娜、高金锋、廖旋焕 2006 物理学报 **55** 35]
 [6] Zhang H , Ma X K , Liu W Z 2004 *Chaos , Solitons and Fractals* **21** 1249
 [7] Wu L G , Wang C H , Zeng Q S 2006 *Control and Decision* **21** 229 (in Chinese) [吴立刚、王常虹、曾庆双 2006 控制与决策 **21** 229]
 [8] Gao T G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2574(in Chinese) [高铁杠 2005 物理学报 **54** 2574]
 [9] Kim E 2002 *IEEE Trans. On Fuzzy Systems* **10** 77
 [10] Yu S H , Yu X H , Man Z H 2004 *Fuzzy Sets and Systems* **148** 469

Synchronization of chaotic systems with uncertainties using robust terminal sliding mode control^{*}

Huang Guo-Yong[†] Jiang Chang-Sheng Wang Yu-Hui

(College of Automation Engineering , Nanjing University of Aeronautics and Astronautics , Nanjing 210016 , China)

(Received 8 August 2006 ; revised manuscript received 5 March 2007)

Abstract

A novel robust terminal sliding mode control based on fast fuzzy disturbance observer is designed for a class of chaotic systems with uncertainties. To deal with the shortcoming of slow learning of traditional fuzzy disturbance observer when the approximation errors are very small, a fast fuzzy disturbance observer is designed which improves the learning speed. It is rigorously proved that the synchronization error and approximation error converge to very small values in finite time. Finally, simulation results of the Duffing-Holmes chaotic system demonstrate the effectiveness of the presented closed-loop control scheme.

Keywords : synchronization of chaotic systems , fast fuzzy disturbance observer , terminal sliding mode , finite time convergence

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90405011).

[†] E-mail : hgy@ sina . com