

# 本征约瑟夫森结阵列的 PSpice 模型 及混沌行为研究\*

周铁戈<sup>†</sup> 宋凤斌 左 涛 顾 静 夏侯海 胡雅婷 赵新杰 方 兰 阎少林

(南开大学信息技术科学学院, 天津 300071)

(2007 年 1 月 29 日收到, 2007 年 3 月 23 日收到修改稿)

建立了电容耦合本征约瑟夫森结阵列在电路仿真软件 PSpice 中的模型, 利用这个模型对恒定电流驱动下的本征约瑟夫森结阵列进行了仿真研究. 通过与不存在电容耦合的本征约瑟夫森结的时域波形、频谱、分维和相图等结果的对比, 发现了本征约瑟夫森结阵列中的混沌行为. 这一发现对于本征约瑟夫森结的理论和应用研究有重要的意义.

关键词: 本征约瑟夫森结阵列, 混沌行为, PSpice

PACC: 0545, 7450, 6120J

## 1. 引 言

作为一种高度非线性器件, 约瑟夫森结及其相关电路中存在复杂的混沌行为. 由于混沌在保密、通信、电子和电路等领域都具有重要的研究和应用价值<sup>[1-5]</sup>, 再加上约瑟夫森结型器件具有低噪声、低功耗、高工作频率等独特的优点, 约瑟夫森结及相关电路中的混沌行为受到了广泛的关注<sup>[6-9]</sup>. 2001 年, 王震宇等<sup>[10]</sup>利用数值方法研究了一种直流偏置的与 RLC 谐振器耦合的约瑟夫森结动力学行为, 他们发现了周期三与混沌共存的动力学现象, 并给出了相应的混沌吸引子和吸引域的几何结构. 2003 年, 杜浩晨等<sup>[11]</sup>研究了存在外加磁场情况下一维平行约瑟夫森结阵列的磁通动力行为, 在约瑟夫森结处于欠阻尼的情况下, 观察到了分岔和混沌现象, 并利用一种延迟反馈机理实现了混沌的控制. 2004 年, Uchida 等<sup>[12]</sup>报道了一种由五个约瑟夫森弱连接结构构成的四端超导器件(约瑟夫森四极管), 通过分岔图、三维吸引子和庞加莱截面确认了它可以产生混沌信号, 可用于数百 GHz 的随机信号的产生. 目前对于约瑟夫森结混沌行为及其应用的研究还不够深

入和系统, 而且多采用编写程序进行数值分析的方法. 编写程序进行混沌研究时, 首先需要写出系统的微分方程或方程组并对参数进行归一化处理, 然后按照一定的算法(比如 Simpson-Runger-Kuta 法)编写程序求解. 显然这种研究方法效率很低, 因为, 第一, 对于不同的电路系统都要重新编写或者修改程序; 第二, 对于复杂的电路系统, 微分方程或者方程组的形式会十分复杂, 人工处理十分繁复; 第三, 不能给出形象直观的计算结果. 众所周知, PSpice 是分析和模拟各种线性和非线性电路的有力工具<sup>[13, 14]</sup>, 可以采用图形输入方式, 操作界面方便直观, 修改参数或者改变电路结构十分方便; 分析功能强, 可以方便地求出电路各种变量的动态特性; 具有丰富的曲线显示功能, 可以把各种分析的结果和数据用曲线直观地显示出来, 而且自身带有各种常用的分析工具, 比如快速傅里叶变换、参数扫描和自动优化等. 如果能够利用这个软件对约瑟夫森结及相关电路进行仿真研究, 就可以大大提高工作效率. 我们利用这个软件对本征约瑟夫森结阵列中的混沌行为进行了研究.

本征约瑟夫森结是利用高温超导体的天然层状结构制备出来的, 由于本征约瑟夫森结的超导电极很薄(约 0.3 nm), 所以相邻的两个本征约瑟夫森结

\* 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号: 2006CB601006)、国家高技术研究发展计划(863)新材料领域(批准号: 2006AA03Z213)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20050055028)和天津市电子薄膜器件与技术重点实验室资助的课题.

<sup>†</sup> 通信联系人, E-mail: nktgzhou@yahoo.com.cn

之间存在电容耦合<sup>[15-17]</sup>. 在存在电容耦合的情况下, 一个约瑟夫森结两侧超导电子的相位差不再单纯地受其两端电压的影响, 而是同时受到相邻约瑟夫森结电压的影响, 这可能导致新的现象出现, 对此进行研究在理论上和应用上都有重要的意义. 我们在电路仿真软件 PSpice 中建立了电容耦合的本征约瑟夫森结阵列的电路模型, 并进行了仿真研究, 发现了在恒定电流驱动下本征约瑟夫森结阵列会出现时空混沌行为.

## 2. 电路模型

当存在电容耦合时, 本征约瑟夫森结阵列中的一个约瑟夫森结的超导电子相位差由

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_l = V_l + \alpha(2V_l - V_{l-1} - V_{l+1}) \quad (1)$$

描述<sup>[17]</sup>, 式中  $\varphi_l$  代表阵列中第  $l$  个约瑟夫森结的超导电子相位差,  $V_l$  代表其两端的电压,  $\alpha$  为耦合系数,  $V_{l+1}$  和  $V_{l-1}$  分别为相邻两个约瑟夫森结的电压. 由方程 (1) 可以明显看出, 阵列中的约瑟夫森结阵列会受到相邻约瑟夫森结电压的影响. 在考虑到约瑟夫森结的正常态电阻和寄生电容之后, 恒定电流驱动下的本征约瑟夫森结阵列中的一个约瑟夫森结的方程可以写为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_l = \frac{I}{I_c} - \beta_c \frac{\partial}{\partial t} \varphi_l - \sin \varphi_l + \alpha(\sin \varphi_{l+1} + \sin \varphi_{l-1} - 2\sin \varphi_l), \quad (2)$$

式中  $I$  和  $I_c$  分别为外加的恒定电流和约瑟夫森结的临界电流,  $\beta_c$  为约瑟夫森结的 McCumber 参数. 由方程 (2) 可知, 对于一个存在 10 个结的本征约瑟夫森结阵列就需要 10 个这样的方程来描述, 人工编程求解困难, 效率低下.

我们知道, 对于单一的一个约瑟夫森结而言, 其电流与电压关系可以表示为

$$I = I_c \sin\left(\frac{4\pi e}{h} \int V dt + \varphi_0\right). \quad (3)$$

根据方程 (3), 我们已经建立了理想约瑟夫森结在的电路仿真软件 PSpice 中的模型并证明了它的正确性和实用性<sup>[18]</sup>, 在这个模型的基础上, 根据 (1) 式, 我们构建出了存在电容耦合的本征约瑟夫森结阵列的电路模型, 如图 1 所示. 图 1 包含 5 个 RCSJ 模型的约瑟夫森结, 分别由  $\text{INTEG}_i$ ,  $\text{SIN}_i$ ,  $\text{GAIN}_i$ ,  $\text{GPOLY}_i$ ,  $C_i$ ,  $R_i$ ,  $\text{EPOLY}_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) 构成, 它们串联在一起形成本征约瑟夫森结阵列.  $\text{ABM}_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) 用于实现约瑟夫森结之间的耦合, 其输出表达式为

$$(-\alpha \times V(\% \text{IN}_1) + (1 + 2 \times \alpha) \times V(\% \text{IN}_2) - \alpha \times V(\% \text{IN}_3)) / 1.0, \quad (4)$$

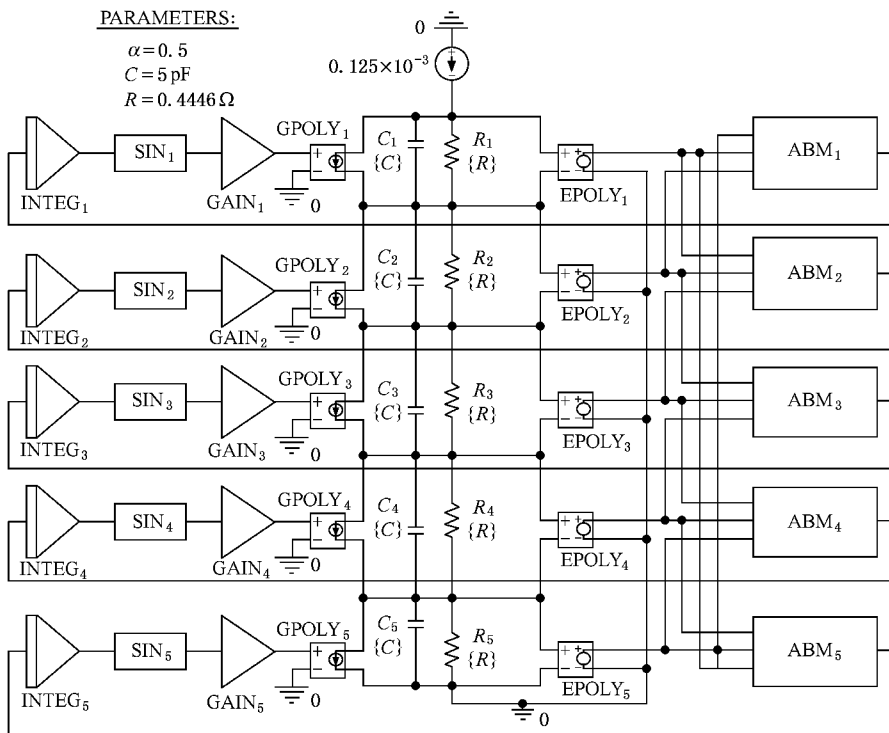


图 1 电容耦合的本征约瑟夫森结阵列的 PSpice 电路模型

式中,  $\alpha$  为电容耦合系数,  $V(\%IN_2)$  代表约瑟夫森结自身的电压, 而  $V(\%IN_1)$  和  $V(\%IN_3)$  代表相邻两个约瑟夫森结的电压. 可以看出这个表达式和方程 (1) 右侧的表达式一致, 可以实现约瑟夫森结之间的耦合.

模型建立过程中, 使用了周期性边界条件, 即第 1 个约瑟夫森结和第 5 个约瑟夫森结之间存在耦合. 5 个约瑟夫森结的特性完全一致, 临界电流为 0.1 mA, 正常态电阻 0.4446  $\Omega$ , 寄生电容 5 pF, 对应的 McCumber 参数  $\beta_c$  为 0.3, 对于本征约瑟夫森结而言, 一般有  $\beta_c \gg 1$ , 在实际应用和分析计算中经常通过并联适当的电阻来减小  $\beta_c$  [19], 耦合系数  $\alpha = 0.5$ . 仿真时使用理想的电流源 ( $I_1$ ) 来驱动约瑟夫森结阵列, 采用瞬态分析的方法观察每个约瑟夫森结两端的电压以及总电压.

### 3. 仿真结果及讨论

图 2 给出的是阵列在恒定电流驱动下得到的  $I$ - $V$  特性曲线, 其中电压值是对 5 个约瑟夫森结电压值求和, 然后对时间取平均得到的. 可以看出曲线不是十分光滑, 存在畸变, 然而这并不是仿真精度不高或仿真时间太短造成的. 事实上, 我们曾尽量提高仿真精度和延长仿真时间, 但是都不能得到光滑的  $I$ - $V$  特性曲线, 这在一定程度上预示了混沌的存在. 为了进行对比, 图 3 中给出了其他参数不变, 而耦合系数  $\alpha = 0$  时的  $I$ - $V$  特性曲线. 可以看出, 不存在耦合时得到的  $I$ - $V$  特性曲线与存在耦合时的情况不同, 曲线十分光滑.

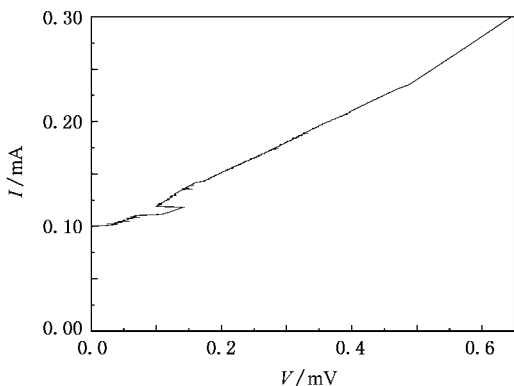


图 2  $R = 0.4446 \Omega$ ,  $C = 5 \text{ pF}$ ,  $\beta_c = 0.3$ ,  $\alpha = 0.5$  时得到的  $I$ - $V$  特性曲线

由图 2 可看出当直流驱动电流在 0.125 mA 左右时,  $I$ - $V$  特性存在很大的畸变, 于是我们在这个电

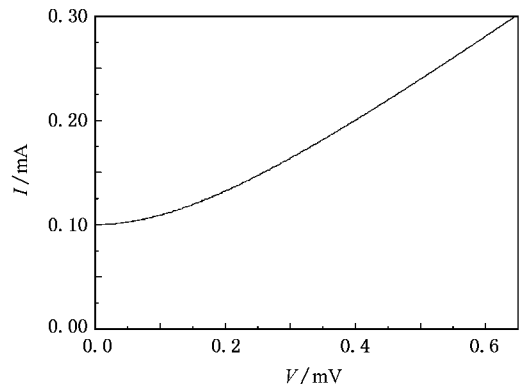


图 3  $R = 0.4446 \Omega$ ,  $C = 5 \text{ pF}$ ,  $\beta_c = 0.3$ ,  $\alpha = 0$  时得到的  $I$ - $V$  特性曲线

流值下对阵列的行为进行了深入的研究. 图 4 给出的是  $I_1 = 0.125 \text{ mA}$  时阵列的总电压 (0) 和每个约瑟夫森结两端电压 (1—5) 随时间变化的曲线, 为了方便对比, 在图 5 给出了没有耦合时的情况.

通过对比可以看出, 存在耦合的约瑟夫森结阵列的总电压波形呈现随机特性, 每个约瑟夫森结两端的电压也是非周期的, 虽然约瑟夫森结的特性完全一致, 但是其两端电压波形并不相同, 这是由于约瑟夫森结之间存在耦合造成的, 而且波形具有长期不可预测性. 而不存在耦合的约瑟夫森结阵列的总电压和每个约瑟夫森结两端的电压都是严格周期的, 而且每个约瑟夫森结的电压波形完全一致, 总电压为单个约瑟夫森结电压的 5 倍. 图 6 和图 7 给出的是对两种情况下的总电压做傅里叶变换得到的结果, 可以明显看出存在耦合时总电压的频谱是连续的, 符合了混沌行为的基本特征. 而不存在耦合时频谱是分立的, 符合周期解的特征.

为了进一步证实混沌行为的存在, 我们又利用 Matlab 计算了两种情况下总电压时域波形的分维, 图 8 和图 9 给出了计算的结果. 可以看出在存在耦合的情况下, 得到的曲线在一定范围内具有较好的线性关系, 满足标度不变性, 而在不存在耦合的情况下, 得到结果曲线不具有好的线性关系, 存在很大的周期波动. 当然图 8 所示的曲线 (规定范围内) 也并不是严格线性, 也存在一定的波动 (很小), 这是由于信号频谱的主峰特性造成的, 即它也存在一定的周期性.

图 10 和图 11 给出了两种情况下利用第五个约瑟夫森结两端电压和流过  $C_5$  的电流绘制的相图, 可以看出存在耦合时, 轨迹在相平面内永不重复的

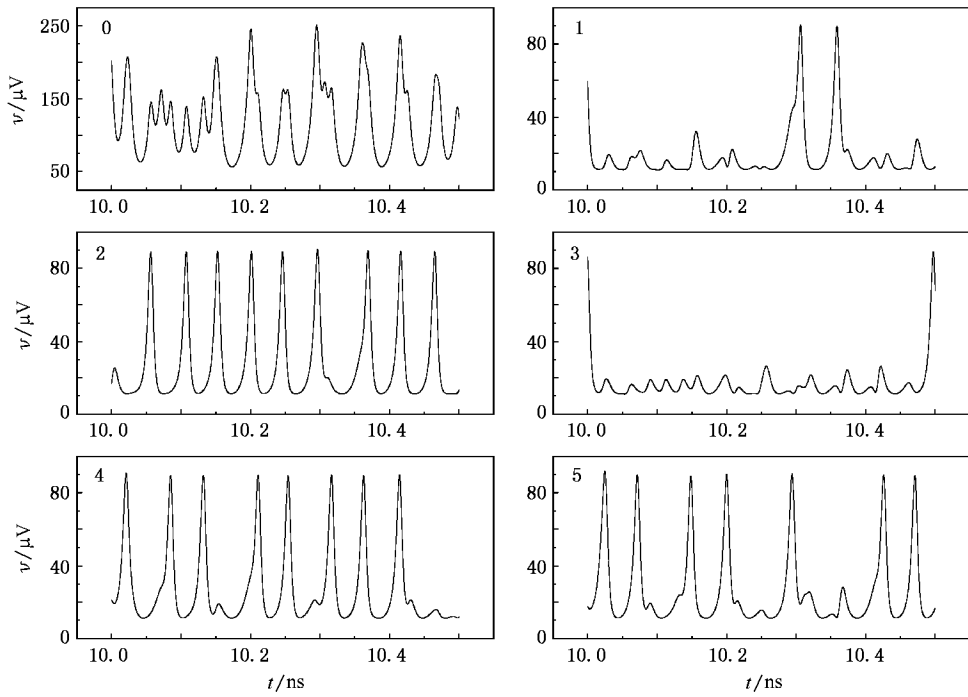


图 4 存在耦合、 $I_1 = 0.125 \text{ mA}$  时, 各个约瑟夫森结电压以及总电压随时间的变化曲线

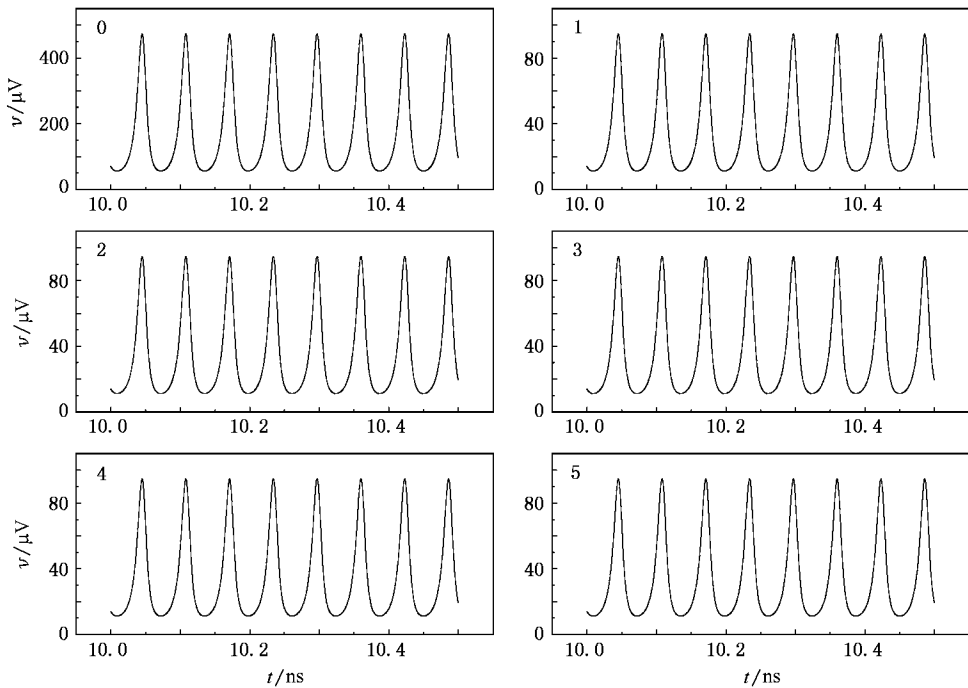


图 5 不存在耦合、 $I_1 = 0.125 \text{ mA}$  时, 各个约瑟夫森结电压以及总电压随时间的变化曲线

运动, 符合混沌行为的特征. 还可以看出相图存在一大一小两个漩涡, 分别对应了约瑟夫森结处于的两种状态, 旋转态和振动态<sup>[15]</sup>, 约瑟夫森结在这两种状态随机转换便形成了图 10 所示的相图. 而图 11

中的相轨迹形成一个闭环, 反应了周期解的特性, 不存在混沌行为.

通过以上的对比我们可以得出, 当存在电容耦合时本征约瑟夫森结阵列中确实会出现时域上的混

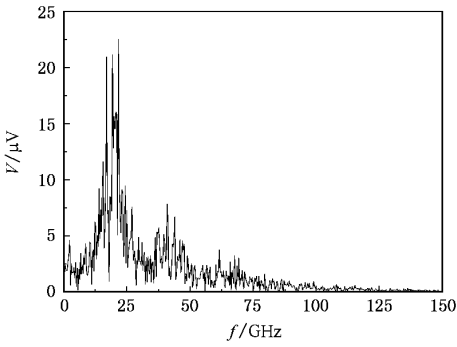


图 6 对图 4 中总电压(存在耦合)做傅里叶变换得到的频谱图

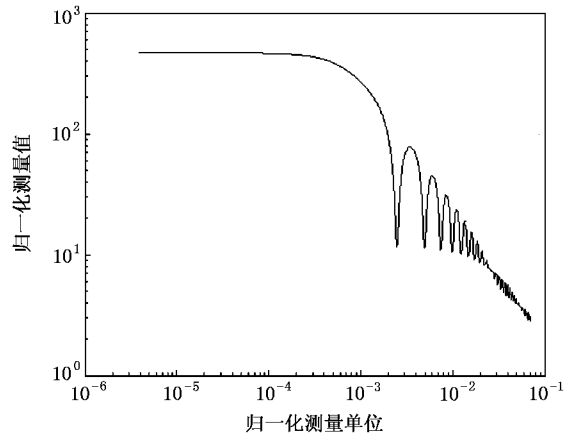


图 9 对图 5 中总电压的时域波形做分维计算得到的结果

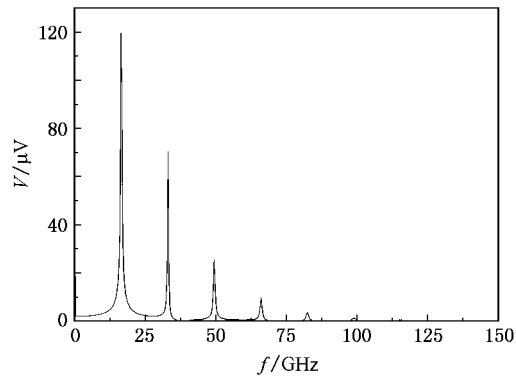


图 7 对图 5 中总电压(不存在耦合)做傅里叶变换得到的频谱图

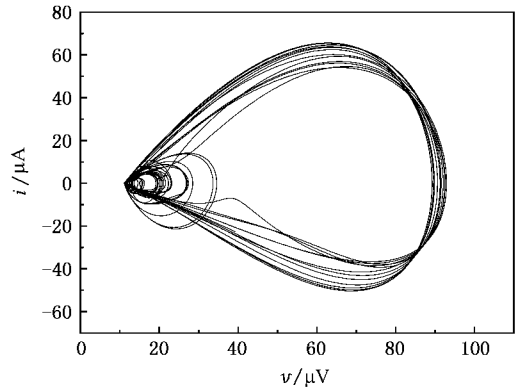


图 10 存在耦合时利用第五个约瑟夫森结绘制的相图(横轴表示约瑟夫森结两端电压,纵轴表示流过电容的电流)

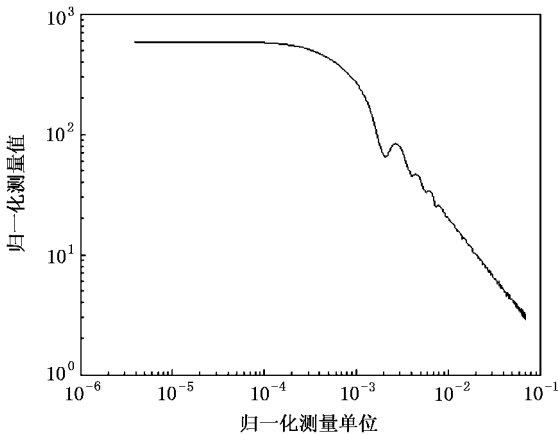


图 8 对图 4 中总电压的时域波形做分维计算得到的结果

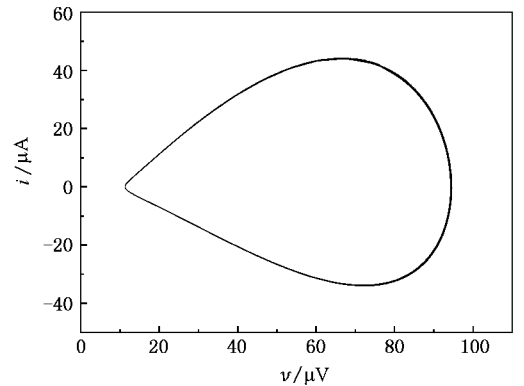


图 11 不存在耦合时利用第五个约瑟夫森结绘制的相图(横轴表示约瑟夫森结两端电压,纵轴表示流过电容的电流)

沌行为.然而,我们所研究的电路结构是存在相邻耦合的多个约瑟夫森结的串联,描述它的微分方程是具有耦合的常微分方程形式,这样一旦出现混沌行为将是时空混沌.因此,我们又对系统的时空混沌行为进行了仿真,为了提高空间分辨率,我们使用了含有 50 个约瑟夫森结的串联阵列(除了个数以外,其他参数均与前面一致,并使用同样的周期性边界条

件).图 12 给出了不同序号的约瑟夫森结两端电压随时间变化的真结果,可以看出确实存在时空混沌行为.为进行对比,图 13 中给出了没有耦合(不存在混沌)时的时空行为发展图.

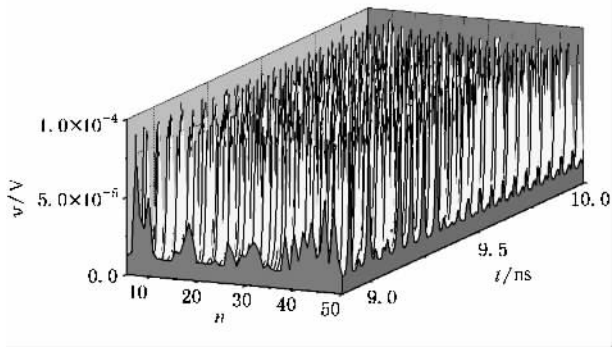


图 12 耦合系数为 0.5 时的时空行为发展图

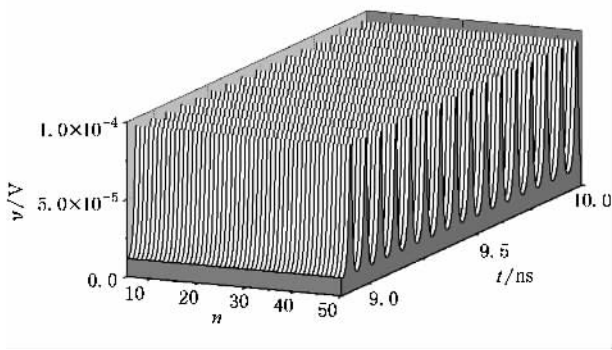


图 13 耦合系数为 0 时的时空行为发展图

为了清楚地显示约瑟夫森结阵列在空间上也存在混沌,图 14 和图 15 给出了耦合系数为 0.5(存在混沌)时同一时刻、不同序号约瑟夫逊结的电压波形,其中图 14 对应的时刻是 9.0055 ns,图 15 对应的时刻是 9.3304 ns.从这两幅图可以看出电压随约瑟夫森结序号变化时的随机特性,为了进一步检验序列的随机特性,图 16 和图 17 分别给出了这两个时刻的  $V(n+1)-V(n)$  映像( $n$  为约瑟夫森结的序号),即以  $V(n)$  作为横轴、 $V(n+1)$  作为纵轴绘图.

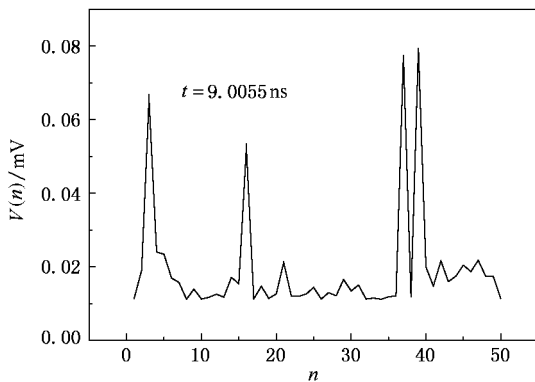


图 14 时间在 9.0055 ns 时处于不同位置约瑟夫森结的电压

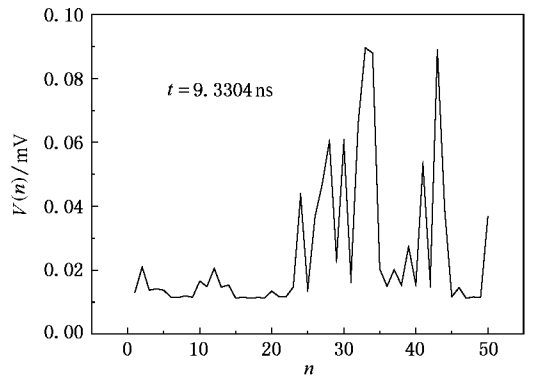


图 15 时间在 9.3304 ns 时处于不同位置约瑟夫森结的电压

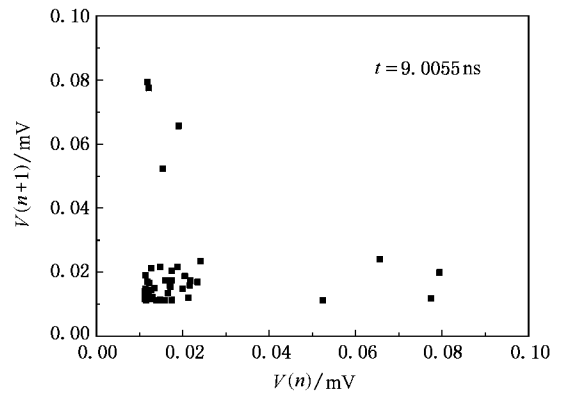


图 16 时间在 9.0055 ns 时的  $V(n+1)-V(n)$  映像,  $n$  为约瑟夫森结的序号

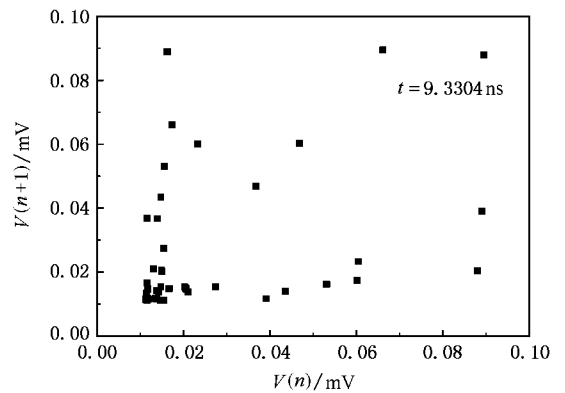


图 17 时间在 9.3304 ns 时的  $V(n+1)-V(n)$  映像,  $n$  为约瑟夫森结的序号

从  $V(n+1)-V(n)$  映像可以看出,点多分布在 0.008 mV—0.03 mV 的电压区间内,但是其分布具有较强的随机性,说明了相邻约瑟夫森结的电压之间的相关性很差,反映了电容耦合本征约瑟夫森结阵列空间混沌的特性.

我们又改变直流驱动电流的大小进行的仿真,结果表明只有在一定的电流范围内才能观察到明显的混沌行为.图 18 给出的是我们取不同的 McCumber 参数,然后不断改变直流驱动电流进行仿真,得到的可以观察到混沌行为的参数空间.

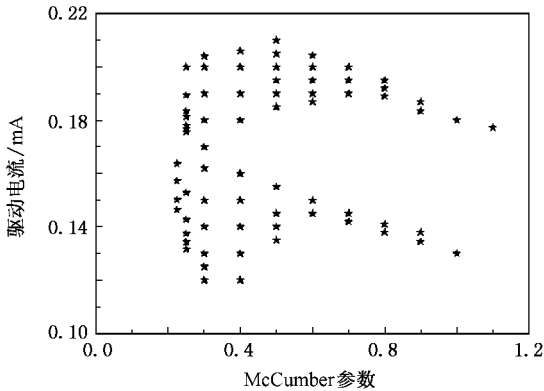


图 18  $I_1-\beta_c$  平面,星号表示观察到混沌行为的参数点

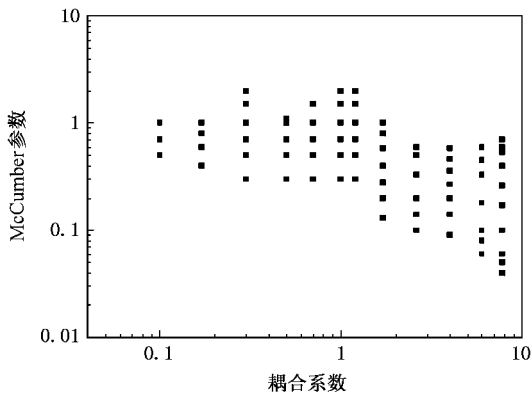


图 19  $\beta_c-\alpha$  平面,黑色方块表示观察到混沌行为的参数点

从图 18 可以看出,McCumber 参数在 0.2—0.5 之间时,在较大的电流范围内都可以观察到混沌行为,当 McCumber 参数在小于 0.2 时,基本上没有混

沌行为出现,而当 McCumber 参数超过 0.5 并且不断增加时,可以观察到混沌行为的电流范围不断减小,当 McCumber 参数超过 1.2 时,不能观察到混沌行为.图 19 给出的是对不同的耦合系数值和 McCumber 参数值进行仿真的结果,仿真时直流驱动电流在 0.1 mA—0.3 mA 范围内取值,图中的点代表可以观察到混沌行为的参数值.从图 19 可以看出,对于一定的耦合系数,只有 McCumber 在一定范围内才能观察到混沌行为,这与图 18 给出的结果一致.随着耦合系数的不断增加,可以观察到混沌行为的 McCumber 参数值略有减小.

## 4. 结 论

提出了电容耦合的本征约瑟夫森结阵列的新的仿真研究方法,对本征约瑟夫森结阵列进行了仿真研究,通过时域波形、频谱、分维和相图等结果的对比,发现了其中的混沌行为.这种混沌属于时空混沌行为,给出了存在耦合的 50 个约瑟夫森结组成的阵列混沌行为的时空行为发展图,与不存在耦合时的情况做了对比,并分析了存在混沌行为时同一时刻不同序号约瑟夫森结两端电压的空间波形.改变直流驱动电流的仿真表明,混沌行为在一定的参数范围内出现,偏离这一范围不会出现混沌现象.给出了可以观察到混沌行为的 McCumber 参数和耦合系数的参数空间.这种新的时空混沌现象的发现对于本征约瑟夫森结的应用有重要的意义,首先可以利用它作为研究时空混沌现象的一个新对象;其次,可以利用它制作频率极高的混沌信号发生器;再次,在应用本征约瑟夫森结阵列时(THz 源、THz 检测、电压标准等)必须考虑混沌行为的影响,比如可能造成异常高的噪声.

[1] Zhou P, Luo X H, Chen H Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5048 (in Chinese) [周平、罗小华、陈海燕 2005 物理学报 **54** 5048]  
 [2] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Zhang Y H, Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强、张宇辉、袁著社 2006 物理学报 **55** 4005]  
 [3] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5061 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5061]  
 [4] Wang L, Wang F P, Wang Z J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3964 (in Chinese) [王蕾、汪芙平、王赞基 2006 物理学报 **55** 3964]  
 [5] Sun L, Jiang D P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3283 (in Chinese) [孙

琳、姜德平 2006 物理学报 **55** 3283]  
 [6] Dana S K 2001 *IEEE Trans. Circ. and Syst.* **1**, **48**(8) 990  
 [7] Cawthorne A B, Whan C B, Lobb C J 1998 *J. Appl. Phys.* **84** 1126  
 [8] Yang X S, Li Q D 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 25  
 [9] Harb A M, Harb B A 2006 *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **16** 1988  
 [10] Wang Z Y, Liao H Y, Zhou S P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1996 (in Chinese) [王震宇、廖红印、周世平 2001 物理学报 **50** 1996]  
 [11] Du H C, Liao H Y, Zhou S P 2003 *Chin. Phys.* **12** 557

- [ 12 ] Uchida A , Iida H , Maki N , Osawa M , Yoshimori S 2004 *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **14** 2064
- [ 13 ] Wang L Q , Wei X Y , Wen W G 2004 *J. Syst. Simul.* **16** 52
- [ 14 ] Li W Q , An H Z , Liu S H 1998 *Acta Elec. Sin.* **5**( 5 ) 7 ( in Chinese ) [ 李文全、安海忠、刘守会 1998 电子学报 **5**( 5 ) 7 ]
- [ 15 ] Machida M , Koyama T 2004 *Phys. Rev. B* **70** 024523
- [ 16 ] Matsumoto H , Sakamoto S , Wajima F , Koyama T , Machida M 1999 *Phys. Rev. B* **60** 3666
- [ 17 ] Shukrinov Y M , Mahfouzi F 2006 *Physica C* **434** 6
- [ 18 ] Zhou T G , Zhang X , Ji L , He M , Li S , Xie Q L , Zuo T , Fang L , Zhao X J , Yan S L 2006 *Cryo. Supercond.* ( Special ) 46 ( in Chinese ) [ 周铁戈、张旭、季鲁、何明、李颂、谢清连、左涛、方兰、赵新杰、阎少林 2006 低温与超导 ( 专辑 ) 46 ]
- [ 19 ] Wang H B , Aruga Y , Chen J , Nakajima K , Yamashita T , Wu P H 2000 *Appl. Phys. Lett.* **77** 1017

## The model of capacitively coupled intrinsic Josephson junction array and its chaotic behavior<sup>\*</sup>

Zhou Tie-Ge<sup>†</sup> Song Feng-Bin Zuo Tao Gu Jing Xia Hou-Hai Hu Ya-Ting  
Zhao Xin-Jie Fang Lan Yan Shao-Lin

( College of Information Technical Science , Nankai University , Tianjin 300071 , China )

( Received 29 January 2007 ; revised manuscript received 23 March 2007 )

### Abstract

The model of capacitively coupled intrinsic Josephson junction array was constructed with the software PSpice. Taking advantage of this new model , we investigated the behavior of capacitively coupled intrinsic Josephson junction array driven by constant current. The time domain wave , frequency spectrum , fractal dimension and phase portrait were obtained. Compared with the uncoupled array , chaotic behaviors were found firstly in the capacitively coupled intrinsic Josephson junction array. The results are valuable for the research and application of intrinsic Josephson junction arrays.

**Keywords** : intrinsic Josephson junction array , chaotic behavior , PSpice

**PACC** : 0545 , 7450 , 6120J

<sup>\*</sup>Project supported by the National Basic Research Program of China ( Grant No. 2006CB601006 ) , the National High Technology Research and Development Program for Advanced Materials of China ( Grant No. 2006AA03Z213 ) , the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China ( Grant No. 20050055028 ) , and the Tianjin Key Laboratory for Photoelectronic and Electronic Thin Film Devices and Technology.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : nktgzhou@yahoo.com.cn