

# 玻色凝聚的原子自旋链中的非线性自旋波 \*

赵兴东<sup>1)</sup> 谢征微<sup>1,2)</sup> 张卫平<sup>1)†</sup>

1) 华东师范大学物理系,光谱学与波谱学教育部重点实验室,上海 200062)

2) 四川师范大学物理与电子工程学院,成都 610066)

(2007 年 4 月 19 日收到 2007 年 4 月 20 日收到修改稿)

研究了囚禁在光晶格中的旋量玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)形成的原子自旋链中的相干非线性自旋波的激发与调制不稳定性.通过解析分析,得到了调制不稳定性的一般判据以及其对原子自旋的长程耦合的依赖关系.在蓝失谐和红失谐光晶格的情况下,分别具体分析了长程非线性自旋耦合,包括光诱导的和静磁诱导的偶极-偶极相互作用对相干自旋波调制不稳定性的影响.

关键词:玻色-爱因斯坦凝聚体,光晶格,自旋波,调制不稳定性

PACC: 3280, 4250, 7530D, 7540F

## 1. 引言

近年来,自旋畴和其中的量子隧穿以及自旋交换力学的实验观测已引发了人们对囚禁在光阱中的带有自旋自由度的玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)的动力学特性产生了极大的兴趣<sup>[1-4]</sup>.其中,针对单个势阱里的旋量 BEC 的调制不稳定性(modulational instability)的研究是一个典型的例子.调制不稳定性对于物理上理解 BEC 系统中的许多动力学行为,比如斑纹的形成(pattern formation)、磁畴壁(magnetic domain walls)、非线性自旋激发(nonlinear spin excitations)、量子相变(quantum phase transition)等<sup>[5-9]</sup>是非常重要的.另一方面,随着激光控制超冷原子技术的发展,光晶格中的旋量 BEC 的动力学特征也是目前备受关注的一个研究主题.一些与自旋相关的现象如自旋混合(spin mixing)、自旋结构(spin texture)的形成、自发磁化(spontaneous magnetization)的产生、自旋波(spin waves)的激发、宏观自旋隧穿(macroscopic spin tunneling)等的物理机理近来已得到了详细地研究<sup>[5,6,10,11]</sup>.本文将更进一步拓展光晶格中的旋量 BEC 的非线性自旋力学的研究.我们考虑一个囚禁在一维光晶格中的旋量 BEC.在晶格势阱很深的条件下,系统处于强束缚

(tight-binding)区.此时光晶格中的旋量 BEC 通过量子相变而处于莫特绝缘态.这时整个体系可以看成一个相干的原子自旋链<sup>[10-12]</sup>.在这种情况下,各个晶格格点上的旋量 BEC 就像一个自旋磁子.这些自旋磁子能够通过光诱导的和静磁的偶极-偶极相互作用进行耦合.在这个意义上来说,这样的旋量 BEC 的原子自旋链和固体物理磁性系统中的自旋链有着一定的相似性<sup>[13-21]</sup>.当然,它们也有着明显的差别.在固体自旋链中,由于格点间自旋耦合是短程海森伯交换相互作用所导致,理论模型和处理方法都采用近邻相互作用近似,长程相互作用通常被忽略<sup>[17,22-24]</sup>.而在光晶格旋量 BEC 的原子自旋链里,长程相互作用是非常重要的.而且,自旋耦合的强弱可以通过外部光场来控制.因此光晶格 BEC 原子自旋链对研究长程相互作用对格点系统中自旋耦合动力学的影响提供了一个重要的工具.

本文的一个重要目的就是集中考察长程偶极-偶极相互作用在光晶格旋量 BEC 中的非线性自旋波的激发与调制不稳定性方面所扮演的角色.我们将通过与短程相互作用的特征进行比较,进一步揭示长程相互作用所产生的新的物理现象与机理.本文第二节建立光晶格旋量 BEC 原子自旋链的理论模型,以及引入光与磁诱导的长程偶极-偶极相互作用项.在自旋波相干激发条件下,借助 Holstein-

\* 国家自然科学基金(批准号:10474055,10447004)、国家杰出青年科学基金(批准号:10588402)、国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:2006CB921104)、上海市科学技术委员会科研计划(批准号:05PJ14038,06JC14026 和 04DZ14009)和国家博士后科研基金(批准号:44020570)资助的课题.

† 通讯联系人 E-mail: wpzhang@phy.ecnu.edu.cn

Primakoff(HP)变换,将系统的哈密顿量玻色化,导出相干自旋波激发的非线性哈密顿量,进而获得描述相干自旋波时间演化的非线性方程.在第三节对非线性自旋波方程进行线性不稳定性分析,得到调制不稳定性的一般判据以及其对原子自旋的长程耦合的依赖关系.第四节数值上详细分析了长程偶极-偶极相互作用对非线性自旋波的调制不稳定性的影响.

## 2. BEC 原子自旋链的理论模型

本文所研究的是由两束沿  $y$  轴相向传输的  $\pi$  偏振的激光形成的一维光晶格.两束激光的频率相对原子的共振频率有较大的失谐.玻色-爱因斯坦凝聚体被受限在这样的光晶格中.当光晶格中每个势阱被调到足够深时,系统将进入所谓的莫特绝缘态.结果晶格势就将凝聚体分成若干个小的独立的凝聚体分散在每个格子里<sup>[10]</sup>.如果忽略与自旋无关的常数项,在紧束缚近似下,光晶格中  $F=1$  的旋量 BEC 的哈密顿量可以简化成

$$H = \sum_i [\lambda'_a \hat{S}_i^2 - \gamma_B \hat{S}_i \cdot \mathbf{B} - \sum_{j \neq i} J_{ij} \hat{S}_i \hat{S}_j^* - \sum_{j \neq i} J_{ij} (\hat{S}_i^- \hat{S}_i^+ + \hat{S}_i^+ \hat{S}_j^-)]. \quad (1)$$

式中  $\hat{S}_i$  是第  $i$  个自旋的总自旋算符,其各分量是  $\hat{S}_i^{\{\pm, z\}}$ .哈密顿量中的第一项是描述同一格点上原子之间的与自旋有关的碰撞项,碰撞参数  $\lambda'_a = (1/2) \lambda_a \int d^3 r |\phi_i(r)|^4$ .第二项是磁场存在时的塞曼项,  $\mathbf{B}$  是一个沿  $z$  轴的外加磁场,  $\gamma_B = -\mu_B g_F/g_F$  是朗德  $g$  因子,  $\mu_B$  是波尔磁子.最后两项起源于原子之间的静磁诱导的和光诱导的偶极-偶极相互作用,它们导致格点与格点间的自旋耦合,耦合系数由下式确定<sup>[10]</sup>:

$$\begin{aligned} J_{ij}^z &= \frac{\mu_0 \gamma_B^2}{16\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{|\mathbf{r}'|^2 - 3y'^2}{|\mathbf{r}'|^5} \\ &\quad \times |\phi_i(\mathbf{r})|^2 |\phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2, \\ J_{ij} &= \frac{U}{144\hbar^2 k_L^3} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' f_c(\mathbf{r}') \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\mathbf{r}_\perp^2 + |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2}{W_L^2}\right) \\ &\quad \times \cos(k_L y) \cos[k_L(y - y')] \\ &\quad \times \mathbf{e}_{+1} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_{-1} |\phi_i(\mathbf{r})|^2 \end{aligned}$$

$$\times |\phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 + \frac{1}{2} J_{ij}^z. \quad (2)$$

式中光诱导的偶极-偶极相互作用程通过截断函数  $f_c(\mathbf{r}) = \exp(-r/L_c)$  来描述,这里  $L_c$  是和  $N$  个原子集体自发辐射有关的相干长度<sup>[25]</sup>.  $k_L = 2\pi/\lambda_L$  是波数,  $r_\perp = \sqrt{x^2 + z^2}$  是横向坐标.参数  $W_L$  是激光束的宽度.  $\mathbf{e}_{\pm 1,0}$  是球谐坐标下的单位矢量.张量函数  $\mathbf{W}(\mathbf{r})$  是用来描述光诱导的偶极-偶极相互作用的空间分布,其表达式为  $\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{3}{4}[(\mathbf{l}\mathbf{l} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \times (\sin(\xi)\mathbf{y}\xi^2 + \cos(\xi)\mathbf{y}\xi^3) - (\mathbf{l}\mathbf{l} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})\cos(\xi)\mathbf{y}\xi]$ ,其中  $\mathbf{l}\mathbf{l}$  是单位张量.这里我们已定义  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  和  $\xi = k_L |\mathbf{r}|$ .光晶格势的深度  $U = \hbar |\Omega|^2/\Delta^2$ ,  $\Omega$  是拉比频率.

在文仅仅考虑铁磁态的凝聚体<sup>[11]</sup>,基态铁磁的 BEC 自旋原子链可以通过哈密顿量(1)来描述.在每一个晶格点上所有原子的自旋是平行于外加磁场(即量子化  $z$  轴).在这种情况下,可以通过 Holstein-Primakoff 变换对哈密顿量(1)进行玻色化<sup>[26]</sup>,

$$\begin{aligned} \hat{S}^+ &= (\sqrt{2S - a^\dagger a})a, \\ \hat{S}^- &= a^\dagger (\sqrt{2S - a^\dagger a}), \\ \hat{S}_z &= (S - a^\dagger a). \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $a$  和  $a^\dagger$  是玻色湮没和产生算符,描述自旋相对于  $z$  轴的偏离.如果忽略  $\sqrt{2S - a^\dagger a}$  中高于四阶以上的展开项,哈密顿量(1)将有以下的一般形式:

$$H = G(a_i, a_i^\dagger, a_j, a_j^\dagger) + O\left(\frac{1}{S^3}\right), \quad (4)$$

其中  $G$  是由(1)式通过(3)式确定的算符  $a$  和  $a^\dagger$  的非线性函数.哈密顿量(4)描述了非线性自旋波的激发.这里我们只对自旋系统里的相干激发感兴趣,即假定每一个晶格点上都有一簇自旋以集体的方式同步相干地对量子化  $z$  轴产生偏离.对具有这种大幅度的集体激发模,通常可用相干态来描述<sup>[26]</sup>.在自旋相干态表象下,算符  $a_l$  的运动方程就转化为概率幅  $\psi_l$  的运动方程:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_l}{\partial t} &= \gamma_B B_z \psi_l + \sum_j 2 J_{lj}^z S \psi_l - \sum_j 2 J_{lj}^z \psi_j^\dagger \psi_j \psi_l \\ &\quad - \sum_j 4 J_{lj} S \psi_j + \sum_j J_{lj} (2 \psi_l^\dagger \psi_l \psi_j \\ &\quad + \psi_j^\dagger \psi_j \psi_l + \psi_j^\dagger \psi_l \psi_j). \end{aligned} \quad (5)$$

这里概率幅  $\psi_l = \psi_l |a_l| \psi_l$  是用来描述格点  $l$  处的相干自旋激发.

### 3. 非线性自旋波的调制不稳定性与自旋耦合特性

据上面的分析,在光晶格原子自旋链中,格点间的自旋耦合系数 $\{J_{lj}\}$ 可以通过调节激光束的参数来进行控制。相比于固体自旋系统,可以看到光晶格自旋链对研究格点系统中的非线性自旋动力学提供了一个很好的工具。由方程(5)描述的相干自旋波激发的定态解为平面波形式。下面,我们主要研究该平面波形式的自旋相干激发在一个非常小的扰动下的动力学稳定性问题,即非线性相干自旋波的调制不稳定性。首先,我们先考虑下面形式的受扰动的非线性相干自旋波的时间演化:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= [\phi_0 + b_l(t)] \exp[i\theta_l(t) + \varphi_l(t)] \\ &= [\phi_0 + b_l + i\phi_0\varphi_l] \exp[i\theta_l],\end{aligned}\quad (6)$$

式中 $\phi_0$ 是自旋波的振幅,并被假定有 $\phi_0^2 \ll 2S$ 。扰动项 $b_l(t)$ 和 $\varphi_l(t)$ 是实数,并且有 $|b_l(t)| \ll \phi_0$ , $|\varphi_l(t)| \ll |\theta_l(t)|$ 。相位 $\theta_l(t) = ql - \omega_0 t$ ,其中 $q$ 是自旋波的波数,自旋波的频率 $\omega_0$ 满足色散关系

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \gamma_B B_z + \sum_j 2J_{lj}^z S - \sum_j 2J_{lj}^z \phi_0^2 \\ &\quad - \sum_j 4J_{lj} S \cos qj + \sum_j 4J_{lj} \phi_0^2 \cos qj.\end{aligned}\quad (7)$$

因为 $|b_l(t)| \ll \phi_0$ , $|\varphi_l(t)| \ll |\theta_l(t)|$ ,将(6)式代入(5)式,可得扰动项 $b_l$ 和 $\varphi_l$ 的耦合运动方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_l}{\partial t} &= \sum_j 4S J_{lj} \phi_0 (\varphi_l - \varphi_j) \cos(qj - ql) \\ &\quad - \sum_j 4S J_{lj} b_j \sin(qj - ql) \\ &\quad + \sum_j [2J_{lj} \phi_0^3 \cos(qj - ql) (\varphi_j - \varphi_l) \\ &\quad + 4J_{lj} \phi_0^2 b_j \sin(qj - ql)], \\ \phi_0 \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} &= \sum_j 4J_{lj}^z \phi_0^2 b_j + \sum_j 4S J_{lj} [(b_j - b_l) \\ &\quad \times \cos(qj - ql) - \varphi_j \phi_0 \sin(qj - ql)] \\ &\quad + \sum_j J_{lj} [4\phi_0^3 \varphi_j \sin(qj - ql) \\ &\quad - (6b_j + 2b_l)\phi_0^2 \cos(qj - ql)].\end{aligned}\quad (8)$$

进一步可假定

$$\begin{aligned}\varphi_l &= \varphi \exp[iQl + \Omega t] + \text{c.c.}, \\ b_l &= b \exp[iQl + \Omega t] + \text{c.c.},\end{aligned}\quad (9)$$

上式中 $Q$ 和 $\Omega$ 是自旋调制波的波数和频率。如果自旋调制波的频率出现虚值,则扰动振幅会出现指数

形式的增长,于是非线性相干自旋波展现调制不稳定现象。为了获得 $Q$ 和 $\Omega$ 的关系,我们将(9)式代入耦合方程(8),可得线性方程组

$$\begin{bmatrix} \Omega - M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & \Omega - M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \phi_0 \varphi \end{bmatrix} = 0. \quad (10)$$

其中系数矩阵元为

$$\begin{aligned}M_{11} &= M_{22} = \sum_j (4J_{lj} \phi_0^2 - 4S J_{lj}) \\ &\quad \times \sin(Qj - ql) \sin(qj - ql), \\ M_{12} &= i \sum_j [2J_{lj} \phi_0^2 - 4S J_{lj}] \\ &\quad \times \cos(qj - ql) [\cos(Qj - ql) - 1], \\ M_{21} &= i \sum_j \{4J_{lj}^z \phi_0^2 + 4S J_{lj} \cos(qj - ql) \\ &\quad - 6J_{lj} \phi_0^2 \cos(qj - ql)\} \cos(Qi - ql) \\ &\quad - (2J_{lj} \phi_0^2 + 4S J_{lj}) \cos(qj - ql).\end{aligned}\quad (11)$$

我们知道,齐次线性方程组(10)有非零解的充要条件是系数矩阵行列式等于零。这样就可以得出自旋调制波的频率

$$\Omega = M_{11} \pm \sqrt{M_{12} M_{21}}. \quad (12)$$

当本征值 $\Omega$ 是虚数( $M_{12} M_{21} < 0$ )时,扰动振幅 $b_l$ 将会呈指数形式的增长,从而可以判断被激发的非线性相干自旋波将会表现出调制不稳定性。因此可以通过 $\Omega$ 的值来判定不同的调制产生的稳定和不稳定性区域。从上面的分析和计算中可明显地看出,调制不稳区域不仅依赖于自旋波的波数 $q$ 和自旋调制波的波数 $Q$ ,而且依赖于非线性自旋耦合系数 $J_{lj}$ 和 $J_{lj}^z$ 。另外,我们假定在 $y$ 轴方向上,凝聚体的空间尺寸比 $\lambda_L$ 小得多,而在横向( $x-z$ )平面,凝聚体呈高斯型且波包宽度是 $w$ 。计算表明,耦合系数 $J_{lj}$ 和 $J_{lj}^z$ 随凝聚体的形状(横向波包宽度 $w$ )的改变而变化。图1是磁诱导的和光诱导的偶极-偶极相互作用所确定的耦合系数随格点变化的关系。从图1中可以看出,选择不同的波包宽度 $w$ ,耦合系数序列 $\{J_{lj}^z\}$ 和 $\{J_{lj}\}$ 随格点变化的曲线也不同。特别是,凝聚体越宽, $w$ 越大,磁偶极-偶极相互作用所确定的自旋耦合系数 $\{J_{lj}^z\}$ 随格点的变化就越缓慢。这意味着对宽凝聚体而言磁诱导的偶极-偶极相互作用导致的长程自旋耦合的效果就越明显。

### 4. 数值结果与分析

为了定量地确定调制不稳区,我们数值上计算

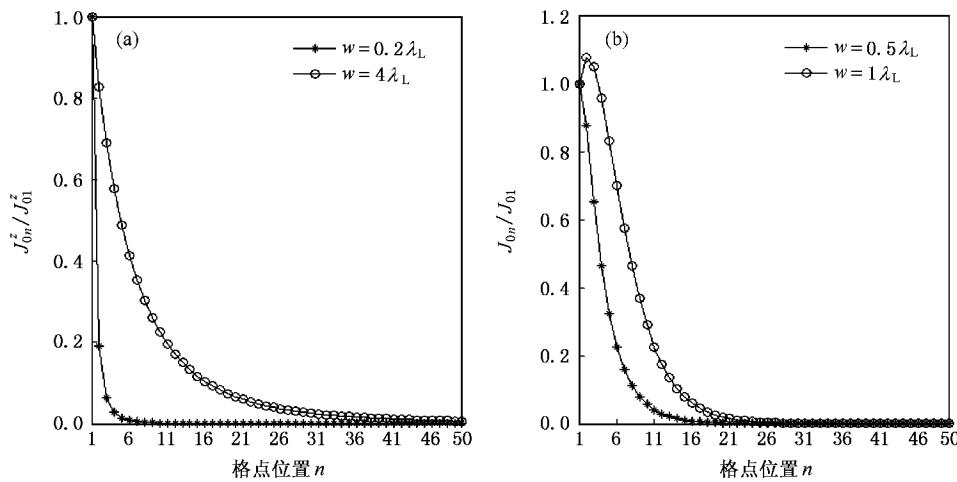


图1 (a)光晶格中磁诱导的偶极-偶极相互作用所确定的自旋耦合系数随格点的变化图 (b)光晶格中光诱导的偶极-偶极相互作用所确定的自旋耦合系数随格点的变化图.另外在计算中,我们取了包含200个格点的光晶格,并且每个格点内囚禁了2000个原子.激光波长是 $1\text{ }\mu\text{m}$ , $\phi_0=0.25\sqrt{S}$ , $\gamma|\Omega|^2/\Delta^2=10^5$ .图中强度的大小已经作了归一化

了自旋调制波频率 $\Omega$ .在计算中,我们采用了周期性边界条件,即自旋波的波数 $q$ 和自旋调制波的波数 $Q$ 限定在 $[0, 2\pi]$ 范围内.从上节可知,通过调节凝聚体的波包宽度 $w$ 可实现对原子链中的自旋耦合系数 $J_{ij}$ 和 $J_{ij}^z$ 的控制.此外,光诱导的自旋耦合系数 $J_{ij}$ 的大小还可以通过其他方法来改变,比如调节激光场的失谐量和激光强度.

在以下的讨论中,我们将用黑色来标示 $(q, Q)$ 平面上的调制不稳定区.在这个区域内,波数为 $q$ 的自旋波在受到波数为 $Q$ 的自旋调制波调制以后振幅将会随时间指数增长.除黑色标示区外,其余的区域是稳定区.在稳定区,受调制的非线性相干自旋波的振幅在一段时间内总是保持稳定的.现在我们对两种不同情况(蓝失谐光晶格与红失谐光晶格)分别进行讨论.

#### 4.1. 蓝失谐光晶格

首先,我们研究蓝失谐光晶格中的非线性相干自旋波的调制不稳定性.在这种情况下,凝聚体被囚禁在驻波场的波节处( $\cos(k_L y) \approx 0$ ).光诱导的偶极-偶极相互作用此时可以被忽略.结果有 $J_{ij} = J_{ij}^z/2$ .从表达式(2)中可以看出,这种情况下格点间的自旋耦合系数仅由磁偶极-偶极相互作用所确定.

为了简单起见,我们第一步只考虑近邻格点间的相互作用.由(11)式,得到一个简单的关系

$$M_{12} M_{21} = -(\phi_0^2 - 2S) J_{01}^z (\cos Q - 1) \cos q$$

$$\times [(2S - 3\phi_0^2) \cos q \cos Q - (\phi_0^2 + 2S) \cos q + 4\phi_0^2 \cos Q]. \quad (13)$$

既然 $\phi_0^2 \ll 2S$ ,于是我们得到调制不稳定性判据

$$M_{12} M_{21} < 0 \rightarrow \left( S \cos q \sin^2 \frac{Q}{2} - \phi_0^2 \cos Q \right) \times \cos q < 0. \quad (14)$$

从上式可以发现,在近邻近似下,非线性相干自旋波的调制不稳定性既依赖于自身的波数 $q$ 和自旋调制波的波数 $Q$ ,又与自旋波的振幅 $\phi_0^2$ 有关.但有趣的是,它与自旋耦合系数无关.在长波调制区( $Q \ll 1$ ),(14)式更进一步简化为 $\cos q > 0$ ,即自旋波的调制不稳定性完全取决于其波数 $q$ .数值计算中,我们取自旋波的振幅 $\phi_0 = 0.25\sqrt{S}$ 为例,结果如图2(a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>)所示.与解析分析相同,仅考虑近邻格点作用,不稳定区主要分布在 $(q, Q)$ 平面的四个角(长波区),而且其分布也不随凝聚体形状(横向波包宽度 $w$ )的变化而改变.这也证实了仅有近邻格点作用时,不稳定区与自旋耦合无关.在区域 $\pi/2 < q < 3\pi/2$ (包含布里渊区边界 $q = \pi$ )上, $M_{12} M_{21} > 0$ 总是满足,非线性相干自旋波在这些区域总是稳定的.

下一步我们考虑增加相互作用的格点到包括次近邻格点.这时与某一个被研究的格点有相互作用的格点数增加至四个.自旋波的调制不稳定性条件 $M_{12} M_{21} < 0$ 现在成为

$$[\cos q(1 - \cos Q) + A^{\parallel} \cos 2q(1 - \cos 2Q)] \times [S \cos q \cos Q + A^{\parallel} \cos 2q \cos 2Q]$$

$$-S \cos q + A^{\parallel} \cos 2q) \\ + 2\phi_0^2 (\cos Q + A^{\parallel} \cos 2Q)] < 0. \quad (15)$$

其中  $A^{\parallel} = J_{02}^z / J_{01}^z$  代表次近邻格点间相互作用的强弱. 上式表明, 与仅有近邻格点相互作用的情况不同, 由于增加了次近邻格点间的相互作用, 不稳定区域出现依赖于次近邻格点间自旋耦合系数 ( $A^{\parallel} = J_{02}^z / J_{01}^z$ ) 的情况. 从图 2(b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>) 可以看出, 不稳定区域的分布明显随凝聚体形状 (横向波包宽度  $w$ ) 的不同而改变. 在图 2(b<sub>1</sub>) 中, 对于较窄的凝聚体 (如  $w = 0.2\lambda_L$ ), 布里渊区边界 ( $q = \pi$ ) 处的非线性相干自

旋波对不同的调制总是稳定的. 这一结论也适用于包括更多格点相互作用 (长程耦合) 的情况. 这表明, 对较窄的凝聚体, 长程自旋耦合对其不稳定性的影  
响较小. 然而对较宽的凝聚体, 即  $w$  比较大时, 如图 2(b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>), 布里渊区边界处的非线性相干自旋波对长波调制开始出现不稳定性. 可以推断, 布里渊区的不稳定性与次近邻格点的自旋耦合有关. 而且随着相互作用格点数的增加, 长程自旋耦合将引起布里渊区的不稳定性发生戏剧性变化. 这一点将在下面仔细讨论.

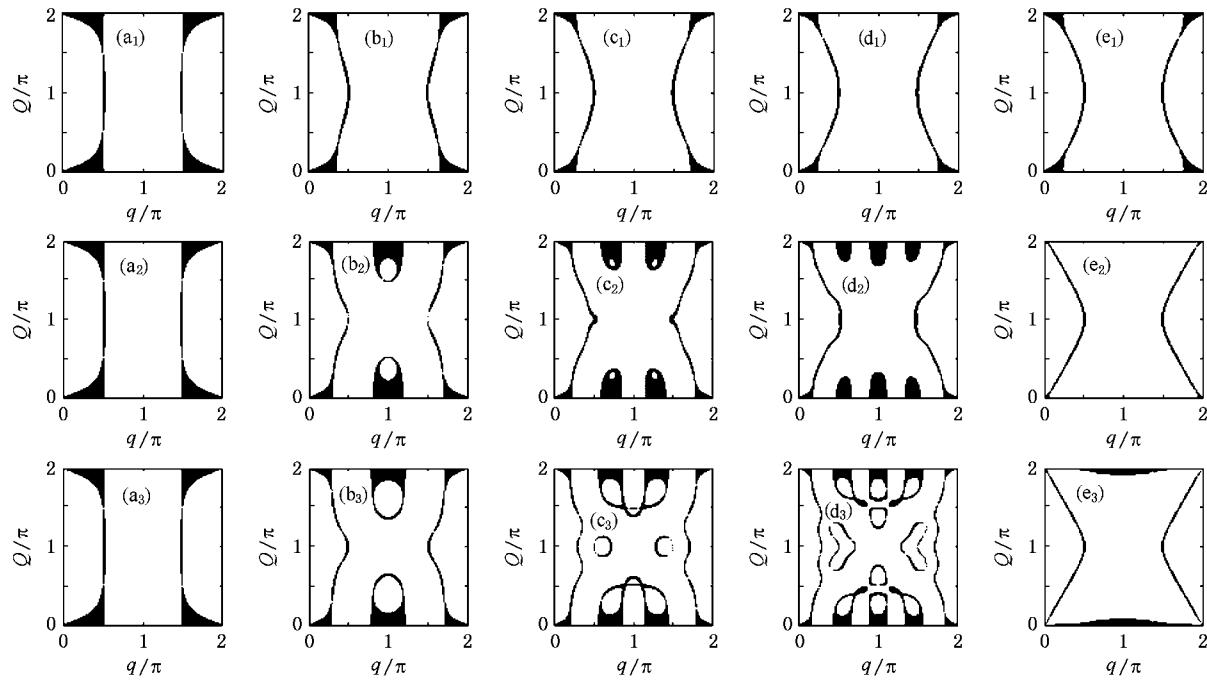


图 2 蓝失谐光晶格中 ( $q, Q$ ) 平面上不稳定区域的分布图 (分布图从左到右的顺序是对应与在位格点相互作用的格点数分别为 2, 4, 6, 8 和 200 的不同情况, 而从上到下的顺序对应波包宽度的取值分别为  $0.2\lambda_L$ ,  $1\lambda_L$  和  $4\lambda_L$  的情况)

以上我们看到了在采用近邻和次近邻近似时所得到的自旋波调制不稳定性. 事实上, 由于偶极-偶极相互作用的长程特性, 格点与格点间的相互作用是不应该仅局限于少数几个晶格点. 为了更好地展示长程相互作用对自旋波调制不稳定性的影响, 在图 2(c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, c<sub>3</sub>) 和图 2(d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>, d<sub>3</sub>) 中, 我们将与某个被研究的单一格点相互作用的格点数增加至 6 个和 8 个. 结果发现当格点数增多后, 随着  $w$  的增大, 不稳定区域的分布出现显著的变化. 布里渊区附近的调制不稳定性随相互作用格点数的增多, 展现交替改变特征. 而长波调制区对应的不稳定区分布逐渐缩小. 当所有格点间的相互作用都被考虑进来以后, 如图 2(e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub>, e<sub>3</sub>) 所示, 不稳定区域的分布几乎完全改

变, 不稳定区收缩为窄的线状区域. 这表明系统中自旋波趋向于越来越稳定.

为了理解上面的长程自旋耦合所引起的自旋波调制不稳定性行为, 我们做一些定性的解析分析. 当包括长程相互作用所引起的所有格点的自旋耦合时, 在长波调制区 ( $Q \ll 1$ ), 由 (11) 式, 调制不稳定性判据可以简单地表示为

$$M_{12} M_{21} < 0 \rightarrow \sum_j j^2 A_j^{\parallel} \cos(qj) \\ \times \sum_j A_j^{\parallel} (1 - \cos(qj)) > 0, \quad (16)$$

其中  $A_j^{\parallel} = J_{0j}^z / J_{01}^z$  代表第  $j$  个格点参与相互作用的强度. 考虑到  $A_j^{\parallel} > 0$ ,

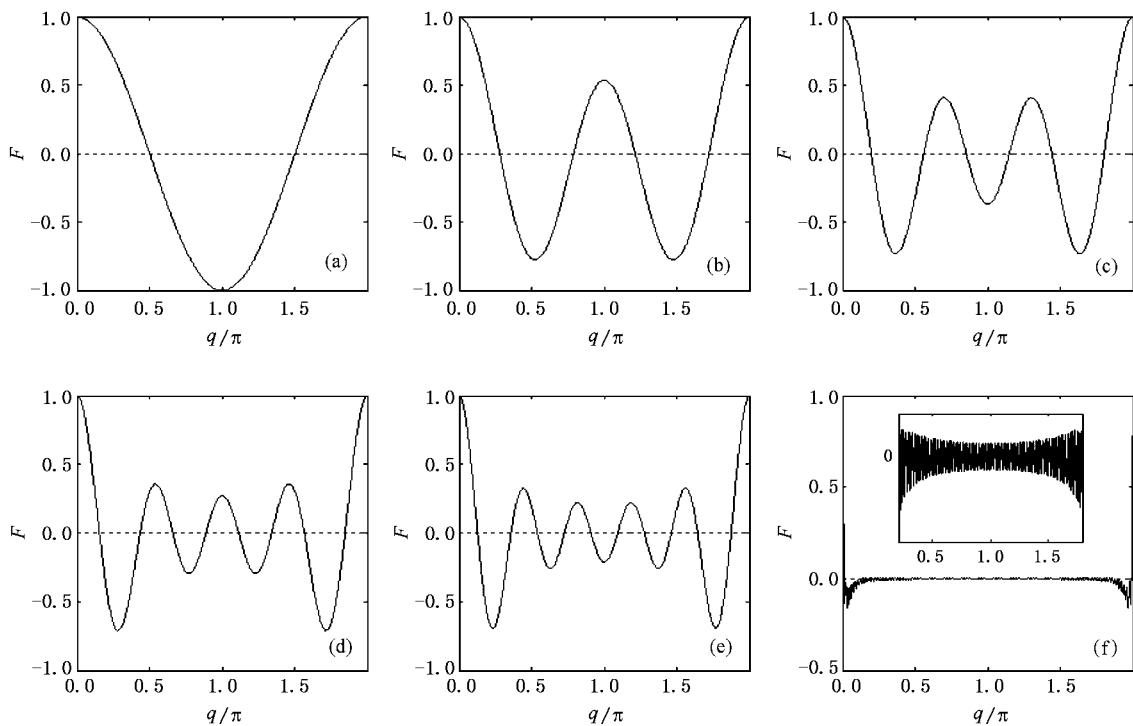


图3 函数  $F(q)$  的曲线.(a)–(f)对应于所取的与在位格点相互作用的格点数分别为 2, 4, 6, 8, 10 和 200 的不同情况. 函数值大于零所对应的波数给出自旋波在长波调制下的调制不稳. 图中  $w = 4\lambda_L$ , 其他参数同图 2

$$M_{12} M_{21} < 0 \rightarrow F(q) = \sum_j j^2 A_j^{\parallel\parallel} \cos(qj) > 0. \quad (17)$$

我们已将决定  $M_{12} M_{21}$  符号取向的函数记为  $F(q)$ .

很明显, 函数  $F(q)$  是一个偶函数, 其展开为一余弦傅里叶级数.  $\{j^2 A_j^{\parallel\parallel}\}$  是其余弦傅里叶变换系数. 由于序列  $\{j^2\}$  是确定的, 函数  $F(q)$  的取值(自旋波调制不稳的判据)就完全取决于序列  $\{A_j^{\parallel\parallel}\}$ . 由图 1 我们知道, 调整凝聚体的波包宽度就相当于改变了自旋耦合系数序列  $\{A_j^{\parallel\parallel}\}$ . 由(17)式可以看出, 格点数的增加就意味着傅里叶级数的项数增多. 所有这些傅里叶分量叠加的结果就决定了自旋波的不稳定区域的分布. 从图 3 中可以看出, 格点数增多导致判据函数  $F(q)$  随  $q$  的改变交替振荡. 当参与相互耦合的格点数非常多时, 函数  $F(q)$  的值大于零所对应的  $q$  值也逐渐增多, 但是振荡的幅度逐渐减弱. 所以在图 2 中, 当长程耦合起作用时(对应较宽的 BEC 波包), 长波调制区随格点数的增加会出现逐渐增多且交替改变的不稳定区域. 当格点数增加到足够多时, 各个格点间相互作用会产生类似于波的干涉相消现象, 结果, 长波区的分立的不稳定区就变得越来越窄, 乃至消失(如图 2( $e_1, e_2, e_3$ )). 由此可见, 长程

相互作用导致的相干自旋耦合在适当的条件下, 能使自旋波变得更趋于稳定. 这一特点可能在控制自旋量子力学, 特别是在基于自旋的量子信息处理中找到应用.

#### 4.2. 红失谐光晶格

现在我们来研究红失谐光晶格的情况. 在图 4 中, 我们给出了红失谐光晶格中非线性相干自旋波的调制不稳定性区域, 同样我们通过选择三个不同的波包宽度来改变自旋耦合系数. 在红失谐光晶格中, 凝聚体被囚禁在驻波波腹, 即光强最强的地方. 结果光诱导的偶极-偶极相互作用相比于磁诱导的偶极-偶极相互作用来说要强得多. 与蓝失谐光晶格的情况相比, 这里光诱导的偶极-偶极相互作用将增强格点间自旋的横向耦合. 在这个意义上, 红失谐光晶格中的原子自旋链呈现较强的自旋各向异性特征. 这种自旋耦合的各向异性将导致红失谐光晶格中的自旋波的调制不稳与蓝失谐光晶格中有很大的不同.

如果只考虑近邻格点的相互作用, 由(11)式, 我们得到红失谐光晶格中自旋波的调制不稳的判据为

$$M_{12} M_{21} < 0 \rightarrow [(2S - 3\phi_0^2) \cos Q$$

$$-(\phi_0^2 + 2S) \cos^2 q > 0. \quad (18)$$

由于  $\phi_0^2 \ll 2S$  (18) 式简化为如下:

$$\sin^2 \frac{Q}{2} \cos^2 q < 0. \quad (19)$$

明显(19)式并不成立,所以在红失谐光晶格中采用近邻近似时对任意波数的非线性相干自旋波总是稳定的.因此在图4中我们的比较是从此近邻格点开始的.从图4可以看出,和蓝失谐光晶格情况类似,红失谐光晶格中的自旋波调制不稳主要发生在长波调制区,并且随相互耦合的格点数的增加和凝聚体形状(横向波包宽度  $w$ )的改变而变化.事实上,红失谐光晶格中长波调制下的自旋波的不稳定性条件由(11)式一般可写为

$$M_{12} M_{21} < 0 \rightarrow \sum_j A_j^\perp j^2 \cos qj \sum_j (A_j^// - 2A_j^\perp \cos qj) > 0. \quad (20)$$

其中  $A_j^\perp = J_{0j}/J_{01}$  是光诱导的横向第  $j$  个格点参与的自旋耦合的强度.  $A_j^// = J_{0j}^///J_{01}$  是磁诱导的纵向自旋耦合强度.如果我们只考虑到次近邻格点的相互作用的影响(20)式进一步可简化为

$$M_{12} M_{21} < 0 \rightarrow (\cos q + 4A_2^\perp \cos 2q) (A_1^// + A_2^// - 2\cos q - 2A_2^\perp \cos 2q) > 0. \quad (21)$$

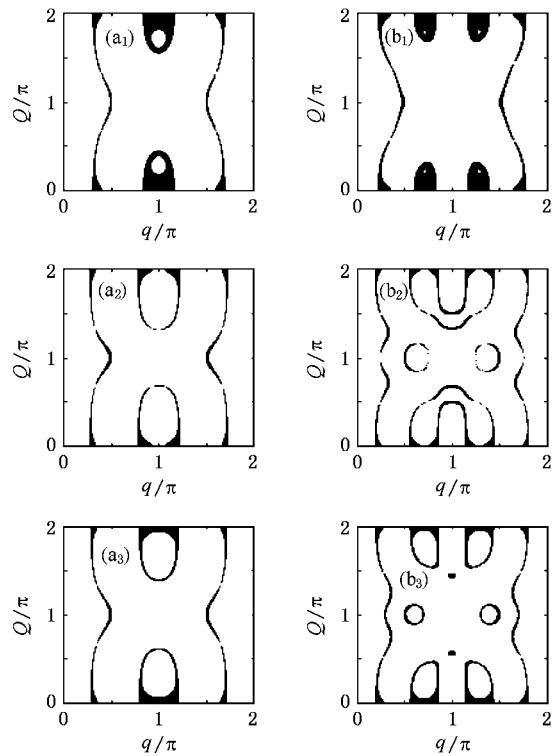
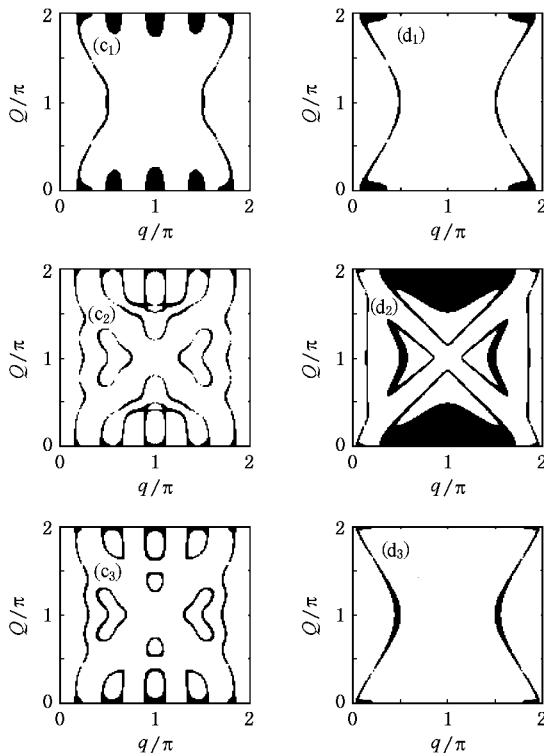


图4 红失谐光晶格中( $q, Q$ )平面内不稳定区域的分布图.分布图从左到右的顺序是对应与在位格点相互作用的格点数分别为2, 6, 8和200的不同情况,而从上到下的顺序对应波包宽度的取值分别为 $0.2\lambda_L$ ,  $1\lambda_L$ 和 $2\lambda_L$ 的情况.其他参数同图1

从(21)式可以看出,由于光诱导的偶极-偶极相互作用加强格点间自旋的横向耦合,不稳定区域不仅依赖于次近邻格点间横向自旋耦合强度  $A_2^\perp$ ,而且还受纵向自旋耦合( $A_1^//, A_2^//$ )的影响.这就导致了红失谐光晶格相对于蓝失谐光晶格不稳定区分布出现很大程度上不同的特征.从图4( $a_1, a_2, a_3$ )可以看出,与蓝失谐光晶格情况相比较,次近邻近似下红失谐光晶格中长波区的不稳定性消失.同样,随着与某一个被研究的格点有相互作用的格点数目的增多,如图4( $b_1, b_2, b_3$ )和图4( $c_1, c_2, c_3$ )所示,长波调制区的不稳定区明显增多,且同样出现交替变化的现象.当相互作用的格点数足够多时,不稳定区的分布如图4( $d_1, d_2, d_3$ )所示.从(20)式可看出,当考虑的格点数足够多时,格点间相互作用将产生类似于波的干涉式的叠加.由于受到格点间的长程相互作用与自旋耦合的各向异性的双重影响,干涉叠加的结果使分布在长波区的不稳定区的分布出现两种结果,一是类似于波的相消干涉,布里渊区边界附近的不稳定区域完全被压缩,如图4( $d_1, d_3$ )所示;二是类似于波的相长干涉,布里渊区边界附近的不稳定区域互相叠加连接,从而区域面积被扩大,如图4( $d_2$ )所示.

综上所述,我们再一次看到在光晶格旋量 BEC



的原子自旋链里,长程相互作用在确定非线性相干自旋波的稳定性上有着不可忽视的影响.

## 5. 结 论

应用 HP 变换和线性不稳定性分析,我们研究了旋量 BEC 原子自旋链中非线性相干自旋波的调制不稳定性. 得到了长程相互作用的情况下非线性相干自旋波的调制不稳定性的一般判据. 在此基础上, 我们分别对红失谐和蓝失谐光晶格中非线性相

干自旋波的调制不稳定性进行了详细的解析与数值分析. 分析结果显示, 在不同性质的光晶格中, 光诱导的和磁诱导的偶极-偶极相互作用对光晶格中旋量 BEC 的原子自旋链的非线性相干自旋波的调制不稳定性有很大的影响并起着不同的作用. 另外, 由于旋量 BEC 的原子自旋链中的自旋耦合的强度可以通过外部控制来进行改变, 因此和固体磁性材料中不易控制的自旋耦合作用的自旋链相比, 旋量 BEC 的原子自旋链为晶格系统中的自旋动力学的研究提供了一个有效的工具.

- [ 1 ] Stenger J , Inouye S , Stamper-Kurn D M , Miesner H J , Chikkatur A P , Ketterle W 1998 *Nature* **396** 345
- [ 2 ] Miesner H J , Stamper-Kurn D M , Stenger J , Inouye S , Chikkatur A P , Ketterle W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2228
- [ 3 ] Stamper-Kurn D M , Miesner H J , Chikkatur A P , Inouye S , Stenger J , Ketterle W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 661
- [ 4 ] Chang M S , Hamley C D , Barrett M D , Sauer J A , Fortier K M , Zhang W , You L , Chapman M S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 140403
- [ 5 ] Leanhardt A E , Shin Y , Kielpinski D , Pritchard D E , Ketterle W 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 140403
- [ 6 ] Chang , Qin Q , Zhang W Z , You L , Chapman M S 2005 *Nature Physics* **1** 111
- [ 7 ] Robins N P , Zhang W P , Ostrovskaya E A , Kivshar Y S 2001 *Phys. Rev. A* **64** 021601
- [ 8 ] Li L , Li Z D , Malomed B A , Mihalache D , Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **72** 033611
- [ 9 ] Ieda J , Miyakawa T , Wadati M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 194102
- [ 10 ] Zhang W P , Pu H , Search C , Meystre P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 060401
- [ 11 ] Pu H , Zhang W , Meystre P 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 140405
- [ 12 ] Gross K , Search C P , Pu H , Zhang W P , Meystre P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 033603
- [ 13 ] Irkhin V Y , Katsnelson M I 1997 *Phys. Rev. B* **56** 8109
- [ 14 ] Azevedo L J , Narath A , Richards P M , Soos Z G 1979 *Phys. Rev. Lett.* **43** 875
- [ 15 ] Carpentier D , Balents L 2002 *Phys. Rev. B* **65** 024427
- [ 16 ] Zheng G P , Liang J Q , Liu W M 2006 *Annals of Physics* **321** 950
- [ 17 ] Daumont I , Dauxois T , Peyrard M 1997 *Nonlinearity* **10** 617
- [ 18 ] Burlakov V M , Kiselev S A 1991 *Sov. Phys. JETP* **72** 854
- [ 19 ] Kivshar Y S , Salerno M 1994 *Phys. Rev. E* **49** 3543
- [ 20 ] Li Z D , He P B , Li L , Liang J Q , Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053611
- [ 21 ] Xie Z W , Zhang W P , Chui S T , Liu W M 2004 *Phys. Rev. A* **69** 053609
- [ 22 ] Lai R , Sievers A J 1998 *Phys. Rev. B* **57** 3433
- [ 23 ] Wallis R F , Mills D L , Boardman A D 1995 *Phys. Rev. B* **52** R3828
- [ 24 ] Nguenang J P , Peyrard M , Kenfack A J et al 2005 *J. Phys* **17** 3083
- [ 25 ] Javanainen J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2375
- [ 26 ] Callaway J 1991 *Quantum Theory of the Solid State* ( Academic Press , New York )

# Nonlinear spin waves in a Bose condensed atomic chain<sup>\*</sup>

Zhao Xing-Dong<sup>1)</sup> Xie Zheng-Wei<sup>1,2)</sup> Zhang Wei-Ping<sup>1)†</sup>

1) Key Laboratory of Optical and Magnetic Resonance Spectroscopy (Ministry of Education),

Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

2) College of Physics and Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

(Received 19 April 2007; revised manuscript received 20 April 2007)

## Abstract

The modulational instability (MI) of nonlinear coherent spin waves in an atomic spin chain of spinor Bose-Einstein condensates confined in an optical lattice is studied. Analytically we obtained the criteria for the MI of nonlinear coherent spin waves and its relation with the long-range nonlinear spin coupling. We analysed the MI in the case of blue-detuned and red-detuned optical lattice respectively. It was found that the long-range nonlinear spin coupling in the optical lattice is due to light-induced and static magnetic field-induced dipole-dipole interaction.

**Keywords** : Bose-Einstein condensates, optical lattice, spin waves, modulational instability

**PACC** : 3280, 4250, 7530D, 7540F

\* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant Nos. 10474055 and 10447004), the National Science Foundation for Young Scientists of China (Grant No. 10588402), the National Basic Research Program of China (973 Program) (Grant No. 2006CB921104), the Science and Technology Commission of Shanghai Municipality (Grant Nos. 05 PJ14038, 06JC14026 and 04DZ14009), and the Post Doctoral Fund of China (Grant No. 44020570).

† Corresponding author. E-mail: wpzhang@phy.ecnu.edu.cn