

# 基于截断奇异值分解的三维火焰温度场重建研究\*

黄群星 刘冬 王飞† 严建华 池涌 岑可法

(浙江大学能源清洁利用国家重点实验室, 杭州 310027)

(2007 年 1 月 9 日收到, 2007 年 3 月 21 日收到修改稿)

利用 CCD 摄像机得到的火焰辐射能图像进行炉膛三维火焰温度场重建, 但温度重建矩阵方程是一个不适定方程组, 从而重建问题是一个不适定问题. 应用截断奇异值分解 (truncated singular value decomposition, TSVD) 的正则化方法对该不适定方程组进行求解, 并且采用了 L 曲线法对正则化参数进行选取. 结合重建算例, 采用奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) 与离散 Picard 条件对这个不适定问题进行了分析. 重建结果表明, 在不同的模拟测量误差下, TSVD 能够成功得到合理的解, 重建温度场较好的再现了原始假设温度场的特征.

关键词: 温度场重建, 不适定问题, 截断奇异值分解, 离散 Picard 条件

PACC: 8690, 4440, 0720D

## 1. 引言

大型电站锅炉炉内火焰温度场的测量对于研究炉内的燃烧过程具有重要的意义, 火焰温度场的瞬态变化直接反映了炉内的燃烧的变化. 由于电站燃煤锅炉往往具有尺寸大, 工作环境比较恶劣, 炉内燃烧火焰温度很高, 传统的接触式测温法和一些需要使用精密仪器的测温方法很难在现场使用, 并且很难得到炉内三维火焰温度场. 近年来, 基于工业 CCD 摄像机拍摄的火焰辐射能图像测温方法得到了广泛的重视和发展. Zhou 等<sup>[1]</sup>采用改进的 Tikhonov 正则化方法对炉膛燃烧三维温度场进行了重建研究; 王飞等<sup>[2]</sup>通过代数重建技术 ART 对温度控制方程进行了求解, 得到了三维温度分布; 黄群星等<sup>[3]</sup>采用了基于 CT 技术与校正后的比色法得到了炉膛准三维温度场.

由火焰辐射能图像进行三维温度场重建是严重不适定问题, 即测量数据中的微小误差都可能对求解结果产生巨大的影响, 因此对于大型不适定温度重建矩阵方程的求解是整个重建问题的关键之一. 正则化方法是求解不适定问题的有效方法, 在很多领域被广泛使用<sup>[2, 4-7]</sup>. 奇异值分解 (SVD) 是分析不适定问题的一种非常有效的方法, 而截断奇异值分

解 (TSVD) 正则化方法已经成功解决了许多不适定问题<sup>[8]</sup>. 本文应用截断奇异值分解的正则化方法对温度场重建进行研究.

## 2. 三维温度场重建模型

把三维的炉膛空间划分为  $N$  个网格, 由于壁面的温度远远低于炉膛内的温度, 壁面的辐射相比炉膛内火焰的辐射是很小的, 这里忽略炉膛壁面的辐射, 因此有  $N$  个未知温度要求解. 假设 CCD 摄像机靶面上划分为  $M$  个像素, 则可以得到  $M$  个方程, 即

$$f_1(T_1, T_2, \dots, T_N) = P_1,$$

$$f_2(T_1, T_2, \dots, T_N) = P_2,$$

$$f_M(T_1, T_2, \dots, T_N) = P_M, \quad (1)$$

式中,  $P$  为 CCD 靶面上每个像素接收到的辐射能,  $f$  表示能束由发射到在 CCD 靶面上成像的过程<sup>[9]</sup>.

在 CCD 摄像机响应波长范围内, 煤粉火焰中第  $i$  个网格发射的能量由下式计算:

$$E_i = 4\alpha\sigma_0\Delta V \cdot T_i^4, \quad (2)$$

其中,  $\alpha = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\alpha_g + \alpha_p) e_{\lambda} d\lambda}{\sigma_0 T^4}$ ,  $\alpha_g$  和  $\alpha_p$  分别为  $\text{CO}_2$  和粒子群的吸收系数;  $\sigma_0$  为黑体辐射常数, 其值为

\* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 60534030), 国家自然科学基金 (批准号: 50606031) 和长江学者和创新团队发展计划 (批准号: IRT0434) 资助的课题.

† 本文通讯作者. E-mail: wangfei@cmec.zju.edu.cn

$5.67 \times 10^{-8} \text{ W}(\text{m}^2 \times \text{K}^4)$ ;  $\lambda_1, \lambda_2$  为 CCD 响应波长的上限和下限;  $T$  为第  $i$  个网格内的温度, 单位 K;  $\Delta V$  为网格的体积;  $i = 1, 2, \dots, N$ .

煤粉火焰中第  $i$  个体元发出的到达 CCD 靶面上第  $j$  个像素的辐射能为

$$E_{i \rightarrow j} = E_i \cdot \alpha_{i \rightarrow j}, \quad (3)$$

式中  $\alpha_{i \rightarrow j}$  为煤粉火焰中第  $i$  个微元发出的到达 CCD 靶面上第  $j$  个像素的辐射能的份额.

将 (2) 式代入 (3) 式可得

$$E_{i \rightarrow j} = A_{i \rightarrow j} \cdot T_i^4, \quad (4)$$

其中  $A_{i \rightarrow j} = 4\alpha\sigma_0\Delta V \cdot \alpha_{i \rightarrow j}$ .

将  $A_{i \rightarrow j}$  代入方程组 (1) 得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (A_{i \rightarrow 1} \cdot T_i^4) &= P_1, \\ \sum_{i=2}^N (A_{i \rightarrow 2} \cdot T_i^4) &= P_2, \\ \dots \\ \sum_{i=M}^N (A_{i \rightarrow M} \cdot T_i^4) &= P_M. \end{aligned} \quad (5)$$

写成矩阵的形式为

$$A_{M \times N} \times T_{N \times 1}^4 = P_{M \times 1}. \quad (6)$$

把矩阵  $P_{M \times 1}$  表示成  $E$ , 改写上式得到三维温度场重建模型

$$AT = E, A \in R^{M \times N}, T \in R^N, E \in R^M, \quad (7)$$

其中  $A$  表示系数矩阵,  $T$  表示待求温度值的四次方向量,  $E$  表示 CCD 摄像机靶面上像素能量值向量.

### 3. TSVD 正则化方法及正则化参数的选取

设不适定方程

$$Ax = b, A \in R^{m \times n}, x \in R^n, b \in R^m, m \geq n, \quad (8)$$

式中的系数矩阵  $A$  的 SVD 分解<sup>[8]</sup>为

$$A = U \sum V^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T, \quad (9)$$

其中左奇异向量  $u_i$  和右奇异向量  $v_i$  分别为矩阵  $U \in R^{m \times n}$  和  $V \in R^{n \times n}$  的正交列向量, 奇异值  $\sigma_i$  满足

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n.$$

(8) 式的最小二乘解可以表示为

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{u_i b}{\sigma_i} v_i. \quad (10)$$

从 (10) 式可以看出, 若数据项  $b$  含有误差, 式中对

应于小奇异值的项, 误差将被放大, 随着  $i$  的增大, 误差被放大的情况越严重, 这样得到的解将是没有意义的. TSVD 是把容易造成不稳定的较小的奇异值直接截去, 使原来的不适定问题转化为一个适定问题来求解. 由 TSVD 定义的解为<sup>[8]</sup>

$$x_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i b}{\sigma_i} v_i, \quad (11)$$

其中, 整数  $k$  称为截断参数, 也就是正则化参数.

由于在温度场重建方程中, 系数矩阵  $A$  是病态的, 而且有病态秩 (后面重建算例结果中有例子), 也就是它的奇异值是逐渐减少, 奇异值之间并没有特殊明显的差别, 这样对于截断参数  $k$  的选取来说是不利的. 在这里采用了 L 曲线法<sup>[10]</sup>进行截断参数的选取. L 曲线是指对应一定的正则化参数以  $(\log_{10} \|Ax - b\|_2, \log_{10} \|x\|_2)$  为点坐标, 在直角坐标系中所画出的曲线图, 形状像字母 L, 故取名为 L 曲线法. L 曲线的拐角 (最大曲率) 点所对应的解不但平衡了解范数和残差范数, 而且趋于平衡正则化误差和扰动误差<sup>[11]</sup>. 这个最大曲率点所对应的正则化参数一般当作是优化参数.

### 4. 重建算例

模拟系统的尺寸为  $0.4 \text{ m} \times 0.4 \text{ m} \times 0.4 \text{ m}$ , 被划分为  $7 \times 7 \times 7$  的体元, 如图 1 所示, 系统的每个侧面各放置两个 CCD 摄像机, 一共八个 CCD 摄像机 (图 1 中只标出四个). CCD 摄像机靶面尺寸设为  $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ , 划分为  $30 \times 30$  个像素, 视场角为  $100^\circ$ .

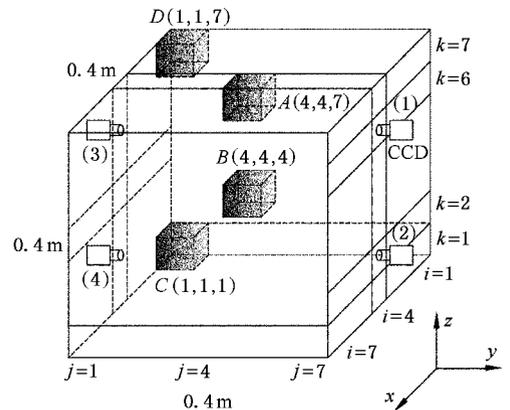


图 1 模拟系统图

假设系统中介质由  $\text{CO}_2, \text{N}_2$  和碳粒组成. 由于 CCD 摄像机响应的是可见光波段  $0.4\text{--}0.7 \mu\text{m}$  内的

辐射,所以在可见光波段可认为 CO<sub>2</sub> 的光谱吸收系数为 0. 碳粒假设为统一的直径 30 μm,系统中的碳粒浓度设为均匀 2.0 × 10<sup>8</sup> 个/m<sup>3</sup>. 文献 [12] 认为碳颗粒在波长为 2 μm 时,复折射率为 1.93(1 - 0.53i),而 2 μm 是煤粉燃烧时辐射的平均波长,这个复折射率的值对于碳颗粒来说,在其整个燃烧过程中都是可以使用的. 采用 Mie 理论 [13] 详细计算了在 0.4—0.7 μm 内的碳颗粒的辐射特性参数,如图 2 所示,  $x$  为尺寸参数.

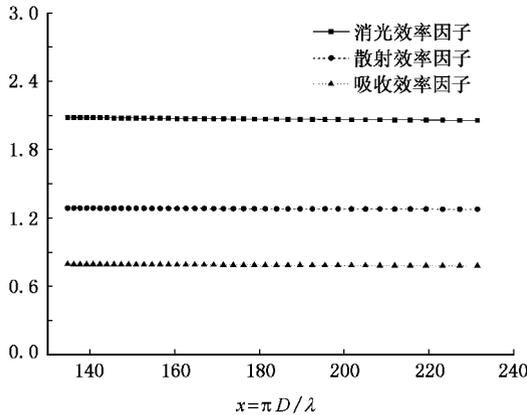


图 2 碳颗粒辐射特性参数

从图 2 可以看出,碳颗粒的辐射特性参数在可见光波段几乎没有大的变化,因此对于浓度为 2.0 × 10<sup>8</sup> 个/m<sup>3</sup> 来说,可认为碳粒的消光系数、散射系数和吸收系数为不变的,分别计算为 0.29 m<sup>-1</sup>, 0.18 m<sup>-1</sup> 和 0.11 m<sup>-1</sup>.

对文献 [14] 中的三维温度分布加以修改,假设系统温度分布为

$$T(x, y, z) = T_0 \left[ \left( 1 - 2 \frac{|x - 0.4/7|}{W} \right) \times \left( 1 - 2 \frac{|y + 0.4/7|}{L} \right) \left( 1 - 2 \frac{|z|}{H} \right) + 1 \right], \quad (12)$$

其中,  $T_0 = 950$  K.

对应图 1 中的典型三个截面上的温度分布如图 3 所示. 特意假设温度场为偏心温度场,以检验重建算法的可靠性.

为了模拟测量误差,在 (7) 式中的像素能量向量  $E$  上加上均值为 0, 均方差为  $\sigma$  的正态分布的随机误差,得到用于重建的辐射能量值  $E_{err}$  为

$$E_{err} = (\mu + \sigma\xi)E + E \quad (13)$$

上式中, 均值  $\mu = 0$ ,  $\xi$  为符合标准正态分布的随机变量,  $-3 < \xi < 3$ .

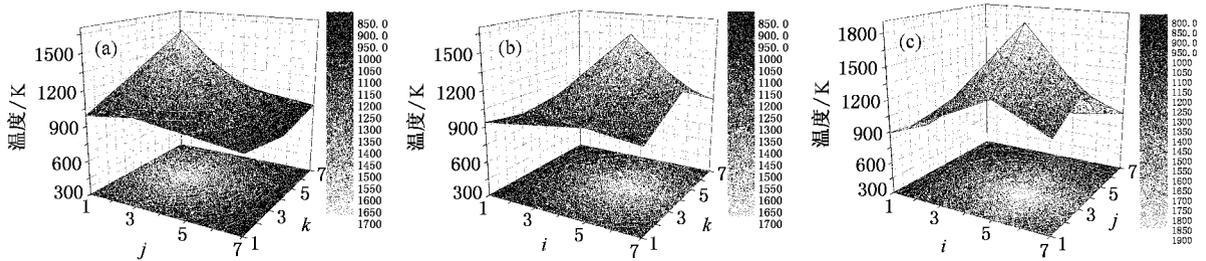


图 3 典型截面温度分布 (a) 截面  $i=4$  (b) 截面  $j=4$  (c) 截面  $k=4$

由于重建问题为严重的不适定问题,求解后仍会出现温度的四次方为负值的情况,所以对所得的温度进行了修正,修正方法如下:

$$\begin{aligned} T'_i &= T_i, & T_i &\geq 810^4, \\ T'_i &= T_i + T_{\min}, & 0 < T_i < 810^4, \\ T'_i &= T_{\min}, & T_i &\leq 0, \\ T_{\min} &= 810^4, \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $T_i$  为求得的温度四次方值,  $T_{\min}$  为温度下限,  $T'_i$  为修正后的四次方温度.

把修正后的温度作为重建后的温度,这些温度值可能并不是原重建问题的最优解,目的在于修正不合理的温度值,并且总体的重建误差在不同大小

的模拟测量误差下能够保持在一个较低的水平. 假设了大小不同的模拟误差,均方差  $\sigma$  分别为 0.01, 0.03, 0.05 和 0.07.

## 5. 重建结果及分析讨论

### 5.1. 问题不适定性分析

离散 Picard 条件 [15] 是与不适定问题紧密联系的,简单的说,也就是 (8) 式中,傅里叶系数  $|u_j^T b|$  在平均意义上比系数矩阵  $A$  的奇异值  $\sigma_i$  趋于零的速度快,则称该问题满足离散 Picard 条件. 如果不适应

问题满足离散 Picard 条件,那么可以通过适当的正则化方法得到原问题合理近似解,如果不满足的话,那么一般不可能通过正则化或相联系的方法得到原

问题的合理解.Picard 图是分析不适定性的直观方法.

图 4 中给出系数矩阵  $A$  的奇异值分布图及均方差  $\sigma$  为 0,0.01 和 0.07 时的 Picard 图.

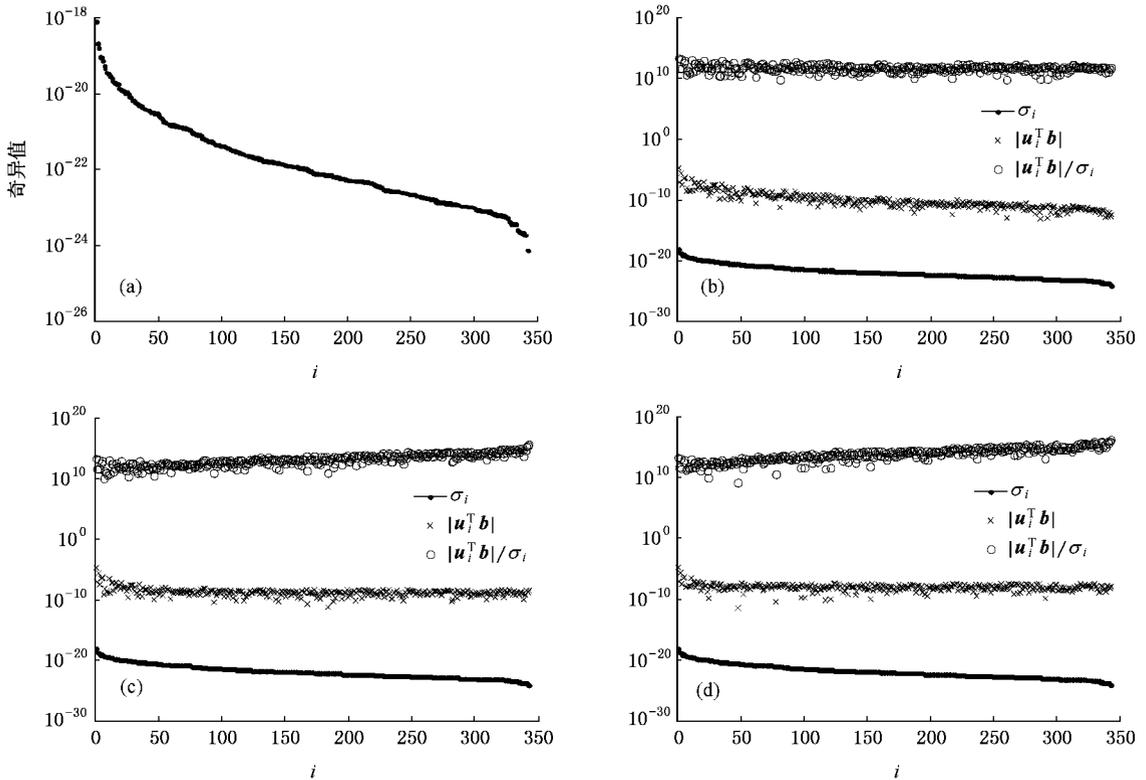


图 4 奇异值分布及均方差  $\sigma$  为 0,0.01 和 0.07 时 Picard 图 (a)奇异值分布 (b)均方差  $\sigma=0$  (c)均方差  $\sigma=0.01$  (d)均方差  $\sigma=0.07$

可以计算出系数矩阵  $A$  的条件数为  $1.0817 \times 10^6$ ,重建问题为严重不适定问题.从图 4 可以看出,系数矩阵  $A$  的奇异值不但数值非常小,而且单调下降,各个值之间没有明显的差别,这给正则化参数的选择带来困难.对应于均方差 0 的情况,整体上  $|u^T b|$  在平均意义上比系数矩阵  $A$  的奇异值  $\sigma_i$  趋于零的速度快,表明该不适定问题可以通过适当的正则化方法得到合理的近似解.但是对于均方差 0.01 的情况,只是在开始一段  $|u^T b|$  在平均意义上比系数矩阵  $A$  的奇异值  $\sigma_i$  趋于零的速度快,表明原问题受到了误差的影响,如果再用整体来计算原问题的解的话,就会出现不合理解,在 TSVD 中需要把后面不满足离散 Picard 条件的部分截去.在均方差为 0.07 的情况下,  $|u^T b|$  在平均意义上比系数矩阵  $A$  的奇异值  $\sigma_i$  趋于零的速度快的一段变得更小.

对于截断参数的选取,采用 L 曲线法,图 5 给出了均方差为 0.01 时的 L 曲线.可以看出,对应于拐角(最大曲率)的 TSVD 正则化参数为 46.

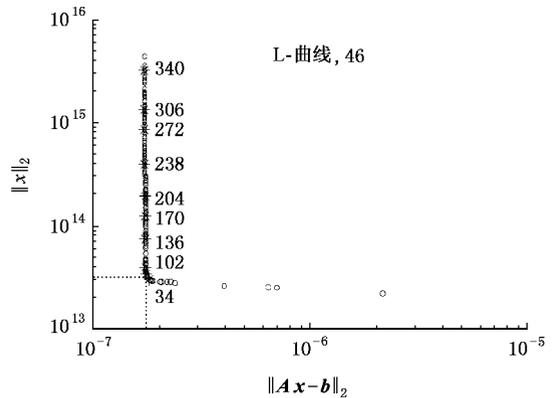


图 5 L 曲线

### 5.2. 重建温度分布

均方差为 0.01 下的重建温度分布如图 6 所示.图 6 中,横坐标表示系统的各个体元的编号,编号是按照  $(i, j, k)$  的顺序  $(1, 1, 1) \rightarrow (2, 1, 1) \rightarrow \dots \rightarrow (7, 1, 1) \rightarrow (1, 2, 1) \rightarrow (2, 2, 1) \rightarrow \dots \rightarrow (7, 7, 1) \rightarrow (1, 1, 2) \rightarrow$

..(7,7,7),依次设为体元 1,2,...,343,典型的体元如图 1 所示.

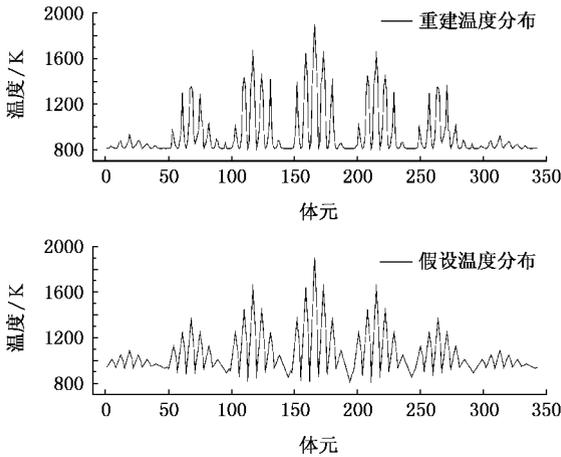


图 6 均方差  $\sigma$  为 0.01 下的重建温度场及假设温度场

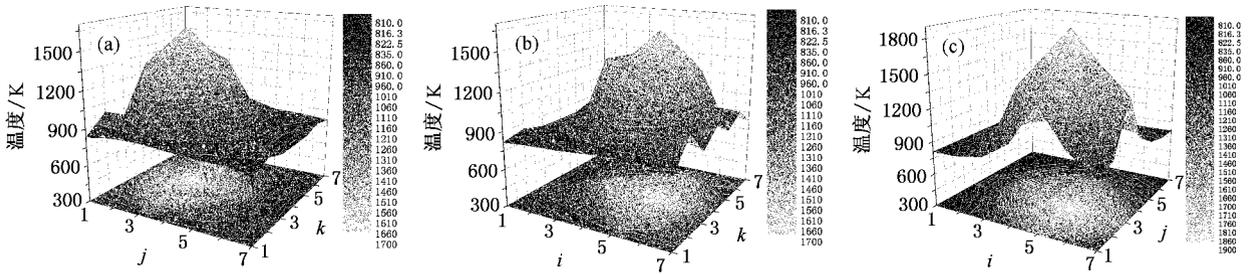


图 7 典型截面重建温度分布 (a)截面  $i=4$  (b)截面  $j=4$  (c)截面  $k=4$

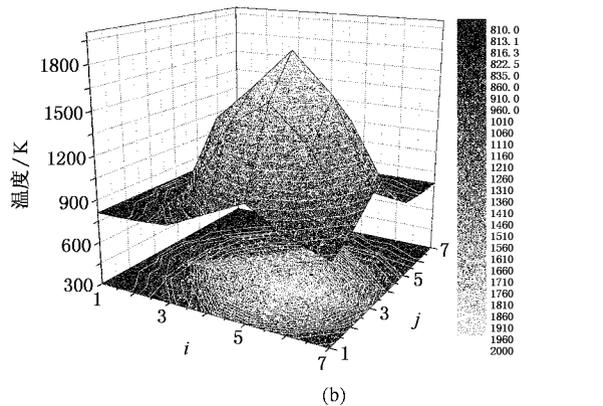
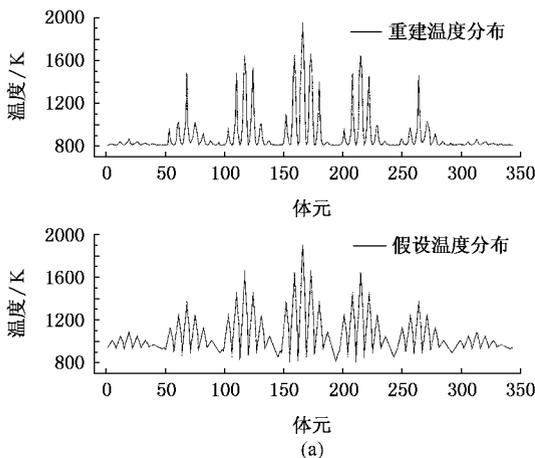


图 8 均方差  $\sigma$  为 0.07 下重建结果 (a)重建整体温度场 (b)截面  $k=4$  重建温度分布

典型截面重建温度分布如图 7 所示.从图 6 可以看出,整体重建的温度分布与假设的温度分布特征能够较好的符合.对比图 7 与图 3 中典型截面上的温度分布可以发现,三个截面上的温度分布特征能够较好地再现,并且最高温度所在的位置能够正确地重建出来.

图 8 给出了均方差  $\sigma$  为 0.07 下的重建温度场及截面  $k=4$  上的温度分布.同样,重建温度场较好地再现了原始假设温度场的特征.

### 5.3. 误差分析

比较了 TSVD 与一般最小二乘法 (LS) 求解的结果所得到的误差,如图 9 所示.表 1 给出了 TSVD 与 LS 重建最高温度所得到的误差及相对应的位置.从图 9 可以看出,在不同的均方差下,TSVD 重建结果的相对误差能够维持在一个较低的水平,且随着均

方差的增大不会增加很快.而 LS 重建结果的相对误差非常大,得到的解是不合理的无意义解.同样,对于最高温度重建结果来说(表 1),TSVD 重建的最高

温度相对误差很小,并且重建位置完全正确,LS 方法重建的相对误差很大,且重建位置不正确.由此说明,对于不适定问题的求解,LS 方法容易出现数值

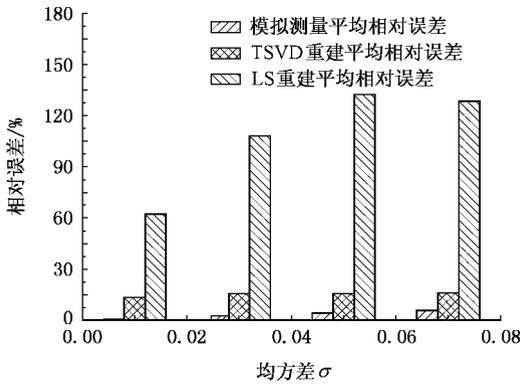


图9 TSVD与LS重建结果误差比较

表1 TSVD与LS重建最高温度比较

均方差 $\sigma$	最高温度 相对误差/%	假设最高温度 所在体元	重建最高温度 所在体元
LS	0.01	278.32	166
	0.03	350.84	166
	0.05	458.87	166
	0.07	411.91	166
TSVD	0.01	0.0104	166
	0.03	0.0670	166
	0.05	0.1187	166
	0.07	0.1121	166

不稳定,一般得不到合理的解,而TSVD正则化方法是求解不适定问题的一种效果很好的方法。

从图6至图9及表1综合来看,由于低温区温度比高温区低很多,发射的能量相对来说就小,CCD摄像机能够接收到的对应能量也相应较小,因此重建问题得到的低温区的信息就比高温区少很多,造成TSVD重建误差的主要原因在于低温区重建的误差。

## 6. 结 论

本文提出把TSVD方法应用于三维火焰温度场重建,较好的解决了重建问题的不适定性。在截断参数的选取上,应用了L曲线法,较好的解决了对于病态秩,奇异值之间没有明显差别,截断参数选取困难的问题。结合重建算例,采用了离散Picard条件及奇异值分解对重建不适定问题给予了详细的分析。

重建结果表明,在不同的模拟测量误差下,TSVD重建出的三维温度场能够较好地再现原始假设温度场的特征,整体重建相对误差能够维持在一个相对较低的水平,最高温度重建相对误差很小,并且重建位置完全正确。

[1] Zhou H C, Han S D, Sheng F, Zheng C G 2002 *JQSRT* **72** 361  
 [2] Wang F, Ma Z Y, Yan J H, Cen K F 2004 *Journal of Combustion Science and Technology* **10** 140 (in Chinese) [王飞、马增益、严建华、岑可法 2004 燃烧科学与技术 **10** 140]  
 [3] Huang Q X, Ma Z Y, Yan J H, Chi Y, Wang F, Cen K F 2005 *Proceedings of the CSEE* **25** 134 (in Chinese) [黄群星、马增益、严建华、池涌、王飞、岑可法 2005 中国电机工程学报 **25** 134]  
 [4] Bi C X, Chen X Z, Chen J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4268 (in Chinese) [毕传兴、陈心昭、陈剑 2004 物理学报 **53** 4268]  
 [5] Li W B, Chen J, Bi C X, Chen X Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1264 (in Chinese) [李卫兵、陈剑、毕传兴、陈心昭 2006 物理学报 **55** 1264]  
 [6] Shen S Y 1999 *Computers and Mathematics with Applications* **38** 173  
 [7] Daun K J, Howell J R 2005 *JQSRT* **93** 43  
 [8] Hansen P C 1990 *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **11** 503

[9] Wang F, Liu D, Huang Q X, Yan J H, Cen K F 2006 *The 5th International Symposium on Measurement Techniques for Multiphase Flows* p661  
 [10] Hansen P C and O'Leary D P 1993 *SIAM J. Sci. Comput.* **14** 1487  
 [11] Hansen P C 1992 *SIAM Rev.* **34** 561  
 [12] Smoot L D, Pratt D T 1983 *Pulverized Coal combustion and gasification* (Beijing: Tsinghua University Press) p126 (in Chinese) [傅维标、卫景彬译 1983 粉煤燃烧与气化(北京:清华大学出版社)第126页]  
 [13] Modest M F 1993 *Radiative Heat Transfer* (New York: McGraw-Hill) p383  
 [14] Farmer J T and Howell J R 1994 *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* **8** 133  
 [15] Hanesn P C 1990 *BIT* **30** 658

# Study on three-dimensional flame temperature distribution reconstruction based on truncated singular value decomposition<sup>\*</sup>

Huang Qun-Xing Liu Dong Wang Fei<sup>†</sup> Yan Jian-Hua Chi Yong Cen Ke-Fa

( Zhejiang University State Key Laboratory of Clean Energy Utilization , Hangzhou 310027 , China )

( Received 9 January 2007 ; revised manuscript received 21 March 2007 )

## Abstract

Three-dimensional flame temperature distribution reconstruction in furnace according to the flame radiative energy images captured by CCD cameras was studied. Temperature reconstruction matrix equation is an ill-posed linear system of equations and the reconstruction problem is an ill-posed problem. Truncated singular value decomposition method ( TSVD ) was introduced to deal with the ill-posed matrix equation and L-curve method was adopted to choose regularization parameter. Singular value decomposition ( SVD ) and discrete Picard condition were used to analyze the ill-posed characteristics of the reconstruction problem carefully. The results show that reasonable solutions can be obtained by TSVD and the reconstructed temperature distribution can reproduce the feature of the assumed temperature distribution.

**Keywords :** temperature distribution , ill-posed problem , TSVD , discrete Picard condition

**PACC :** 8690 , 4440 , 0720D

---

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Program of National Natural Science of China ( Grant No. 60534030 ) , the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 50606031 ) and Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University ( Grant No. IRT0434 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : wangfei@cmeec.zju.edu.cn.