第 56 卷 第 12 期 2007 年 12 月
1000-3290/2007/56(12)/6784-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 56, No. 12, December, 2007

(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的新映射解及其局域结构*

马松华† 方建平 任清褒
(丽水学院物理系,丽水 323000)
(2006 年 12 月 14 日收到;2007 年 5 月 8 日收到修改稿)

映射法是一种非常经典、有效和成熟的求解非线性演化方程的方法,其最大的特点是可以有多种不同形式的设解,使得最终求得的解丰富多彩. 利用改进的 Riccati 方程映射法和变量分离法,得到了(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的新显式精确解. 根据得到的孤波解,构造出该系统的峰孤子和分形孤子等局域结构,研究了两个孤立波的"追碰"现象.

关键词:改进的映射法,(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统,局域结构,"追碰"现象
PACC:0230,0340,0290

1. 引 言

孤子理论是非线性科学研究的一个重要方面,它广泛应用于物理学、数学、化学、生物学、气象学等学科,尤其在物理学中的流体力学、等离子体物理、光学、凝聚态物理等领域发挥着十分重要的作用[1—3]. 自 Boiti 等[4] 通过 Bäcklund 变换法发现 Daver-Stewartson 系统的 dromion 钟状平面相干孤子后,人们对 (2+1)维孤子系统产生了极大的兴趣. 近 10 年来,许多学者对高维非线性物理模型进行了广泛的研究,提出了许多相干孤子结构,诸如线孤子、半线孤子、紧致子、环孤子、方孤子、盘孤子、折叠子、泡孤子和峰孤子等[5—9]. 随着对非线性理论研究的不断深入,人们总结出了许多求解非线性方程的新方法,如双线性法[10—13]、齐次平衡法[14]、标准的 Painlevé 截断分析法[15,16]、波数合并法[17,18]、分离变量法[19] 和双曲正切函数法[20] 等. 两年前,方建平等[21—25] 提出了拓展的 Riccati 方程映射法,现已在许多(2+1)维物理模型中得到了应用. 在此基础上,我们对该方法进行了改进,即在设解中加入了根号项,从而使得到的解更加丰富. 本文的工作是将改进的 Riccati 方程映射法运用到(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov(ANNV)系统

$$\begin{aligned} & u_t + u_{xxx} - 3v_x u - 3vu_x = 0, \\ & u_x = v_y, \end{aligned} \tag{1}$$

并进一步研究其相干孤子结构和分形现象. 方程(1)最先由 Boiti 等[26] 导出,文献[27]证明了通过适当的变换 ANNV 系统也可以从著名的 Kadomtsev-Petviashvili 方程得到.

2. (2+1)维 ANNV 系统的新映射解

改进的 Riccati 方程映射法的基本思想如下:对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \cdots) = 0, \tag{2}$$

将原来的设解

$$u = A(x) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\phi^i[q(x)]$$

改为

$$\begin{aligned} u = {} & A(x) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\phi^i[q(x)] \\ & + C_i(x)\phi^{i-1}[q(x)]\sqrt{\sigma + \phi^2[q(x)]}, \end{aligned} \tag{3}$$

即与原来的设解相比增加了根号项,其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma + \phi^2. \tag{4}$$

---

* 浙江省自然科学基金(批准号:Y604106,Y606128)和丽水学院科研基金(批准号:FC06001,QN06009)资助的课题.
† E-mail:msh6209@yahoo.com.cn

这里 $x=(x_0=t, x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$ 为 x 的任意函数. 经过这样的改正,除了可以得到 tanh, coth, tan, cot 函数形式的解外,还可以得到 sech, csch, sec, csc 等函数形式的解,使解更加丰富. 将(3),(4)式代入(2)式就可以得到一组 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$,再根据 Riccati 方程如下的孤波解、周期波解和变量分离解就可以确定所求方程的解(这里省略了正切和双曲正切两种函数形式的解):

$$
\begin{aligned}
\phi &= -\sqrt{-\sigma}\coth(\sqrt{-\sigma}q) \quad (\sigma<0),\\
\phi &= -\sqrt{\sigma}\cot(\sqrt{\sigma}q) \quad (\sigma>0),\\
\phi &= -\frac{1}{q} \quad (\sigma=0).
\end{aligned} \tag{5}
$$

为了寻找 ANNV 系统的新解, 我们将改进的 Riccati 方程映射法用于 (1) 式, 并根据 (3) 式,设解为

$$
\begin{aligned}
u &= f + g\phi + h\phi^2 + a\sqrt{\sigma+\phi^2}\\
&\quad + b\phi\sqrt{\sigma+\phi^2},\\
v &= F + G\phi + H\phi^2 + A\sqrt{\sigma+\phi^2}\\
&\quad + B\phi\sqrt{\sigma+\phi^2}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

这里 f, g, h, a, b, F, G, H, A, B 和 q 是 (x, y, t) 的任意函数. 将(6),(4)式代入(1) 式,并按 ϕ 的同次幂合并,提取 ϕ^i $(i=1, 2, \cdots)$ 前的系数,其中包含 $\sqrt{\sigma+\phi^2}$ 项, 设

$$K=\sqrt{\sigma+\phi^2},$$

提取 K,令 K 前的系数等于零,令不含 K 的系数的代数和也等于零,得到一系列方程. 由这些方程可求得

$$
\begin{aligned}
f &= 2\sigma\frac{q_{xx}q_y - q_xq_{xy}}{q_xq_y},\\
g &= -\frac{3q_xq_{xy} + q_{xx}q_y}{q_x},\\
h &= q_xq_y,\\
a &= \frac{8q_{xx}q_y + 3q_xq_{xy}}{q_x},\\
b &= -q_xq_y,\\
F &= -\frac{q_{xx}^2q_y^2 + q_x^2q_{xy}^2 + q_xq_yq_{xx}q_{xy} - q_x^4q_y^2 + q_x^3q_y\sigma - q_xq_y^2q_t}{q_x^2q_y^2},\\
G &= \frac{3q_xq_{xy} + q_{xx}q_y}{q_y},\\
H &= q_x^2,\\
A &= -\frac{3q_xq_{xy} + 8q_{xx}q_y}{q_y},\\
B &= -q_x^2.
\end{aligned} \tag{7}
$$

从所得到的方程中,发现有如下变量分离形式的特解:

$$q=\chi(x,t)+\varphi(y), \tag{8}$$

其中 $\chi\equiv\chi(x,t)$, $\varphi\equiv\varphi(y)$ 是关于 x, t 和 y 的任意函数.

情形 1　设 $\sigma=-1$, 可以得到 ANNV 系统的孤波解

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \chi_x\varphi_y(\mathrm{csch}(\chi+\varphi)^2\\
&\quad + \mathrm{csch}(\chi+\varphi)\coth(\chi+\varphi)),
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{3}\frac{\chi_{xxx}+\chi_x^3+\chi_t}{\chi_x} - \chi_{xx}(\coth(\chi+\varphi)\\
&\quad + \mathrm{csch}(\chi+\varphi)) + \chi_x^2(\mathrm{csch}(\chi+\varphi)^2\\
&\quad + \mathrm{csch}(\chi+\varphi)\coth(\chi+\varphi)),
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中 $\chi(x,t)$, $\varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

情形 2　设 $\sigma=1$, 可以得到 ANNV 系统的周期波解

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \chi_x\varphi_y(\csc(\chi+\varphi)^2\\
&\quad + \csc(\chi+\varphi)\cot(\chi+\varphi)),
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{1}{3}\frac{\chi_{xxx}-\chi_x^3+\chi_t}{\chi_x} - \chi_{xx}(\cot(\chi+\varphi)\\
&\quad + \csc(\chi+\varphi)) + \chi_x^2(\csc(\chi+\varphi)^2\\
&\quad + \csc(\chi+\varphi)\cot(\chi+\varphi)),
\end{aligned} \tag{12}
$$

其中 $\chi(x,t)$, $\varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

情形 3　设 $\sigma=0$, 可以得到 ANNV 系统的变量分离解

$$u_3 = 2\frac{\chi_x\varphi_y}{(\chi+\varphi)^2}, \tag{13}$$

$$v_3 = \frac{1}{3}\frac{\chi_{xxx}+\chi_t}{\chi_x} - \frac{\chi_{xx}}{\chi+\varphi} + \frac{2\chi_x^2}{(\chi+\varphi)^2}, \tag{14}$$

其中 $\chi(x,t)$, $\varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

3. (2+1)维 ANNV 系统的特殊孤子结构

由于(9)—(14)式中都包含有任意函数 χ 和 φ,使得系统的解变得相当丰富. 本文仅以(9)式为例,讨论 ANNV 系统的峰孤子和分形孤子结构. 为方便起见,令

$$U = u_1 = \chi_x \varphi_y (\mathrm{csch}(\chi + \varphi)^2 + \mathrm{csch}(\chi + \varphi)\coth(\chi + \varphi)). \tag{15}$$

3.1. ANNV 系统的峰孤子结构

由于(15)式中 χ 和 φ 的任意性,不妨取 χ 和 φ 为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi &= 1 + 2\ln\left[\tanh\left(-\left|\frac{1}{2}x - ct - \frac{1}{2}\right|\right)\right], \\ \varphi &= 1 + \exp\left(-\left|\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right|\right); \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \chi &= 1 + 1.8\ln\left[\tanh\left(-\left|\frac{1}{2}x - ct - \frac{1}{2}\right|\right)\right] \\ &\quad + 0.4\ln\left[\tanh\left(-\left|\frac{1}{2}x - ct + \frac{1}{2}\right|\right)\right], \\ \varphi &= 1 + 0.8\exp\left(-\left|\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right|\right). \end{aligned} \tag{17}$$

于是,可以得到一个单峰孤子结构和一个多峰孤子结构,如图 1 所示(取 $c = 1$, $t = -2$).

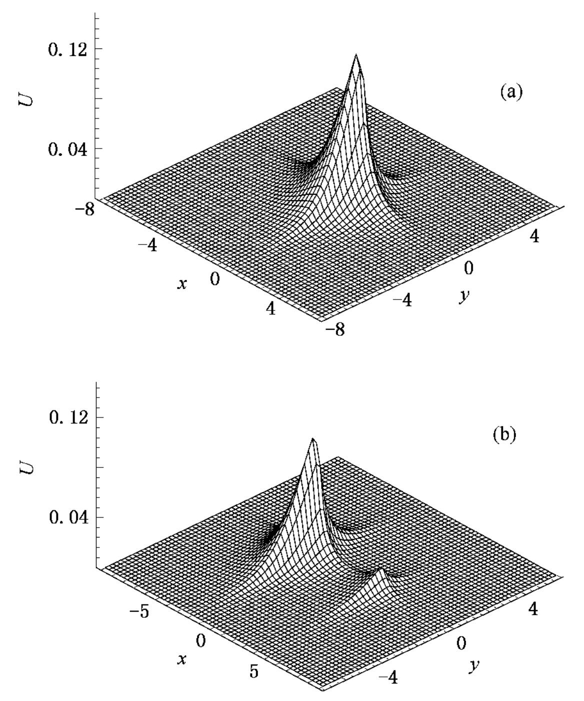

图 1 ANNV 系统的峰孤子解 (a)(15)式利用(16)式得到的单峰孤子,(b)(15)式利用(17)式得到的多峰孤子

此外,如果取 χ 和 φ 为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi &= 1 + \exp(-|x - ct - 2|), \\ \varphi &= 1 + \exp(y); \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \chi &= 1 + \tanh(-|x - ct - 1|), \\ \varphi &= 1 + \mathrm{sech}(y), \end{aligned} \tag{19}$$

则得到另外形状的单峰孤子和亮暗峰孤子结构,如图 2 所示(取 $c = 1$, $t = 0$).

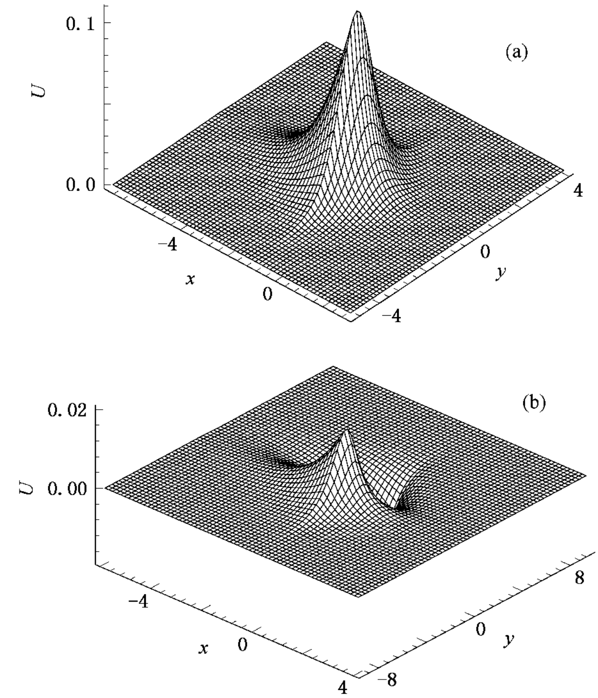

图 2 ANNV 系统的另一种形状的峰孤子解 (a)(15)式利用(18)式得到单峰孤子,(b)(15)式利用(19)式得到的亮暗峰孤子

3.2. 孤立波的'追碰'现象

以上得到了 ANNV 系统几种不同类型的峰孤子解,下面将讨论两个孤立波随时间的演化情形. 在以往所报道的孤立波的相互作用都是两个孤立波相向运动,然后发生作用[24,28—31],其作用大多是弹性的,即作用以后两个孤立波的波幅、形状 和波速保持不变[24]. 但是研究中发现也存在非弹性相互作用现象,即两个孤立波作用后变成一个或者其波幅减小的现象[28,29]. 我们讨论两个孤立波同向运动发生"追碰"的有趣现象.

在(15)式中,取 χ 和 φ 为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi &= 1 + 1.2\ln[\tanh(-|x - 2t - 1|)] \\ &\quad + 0.5\ln[\tanh(-|x - t - 1|)], \\ \varphi &= 1 + \ln[\tanh(-|y - 1|)]. \end{aligned} \tag{20}$$

于是,得到如图 3 所示的两个孤立波的'追碰'时间演化图. 时间分别为 $t = -12, -8, 0, 3, 8$. 从图 3 可以看到,两个孤立波朝同一个方向运动,由于运动速度不同,经过一定时间,后面的孤立波赶上前面的孤

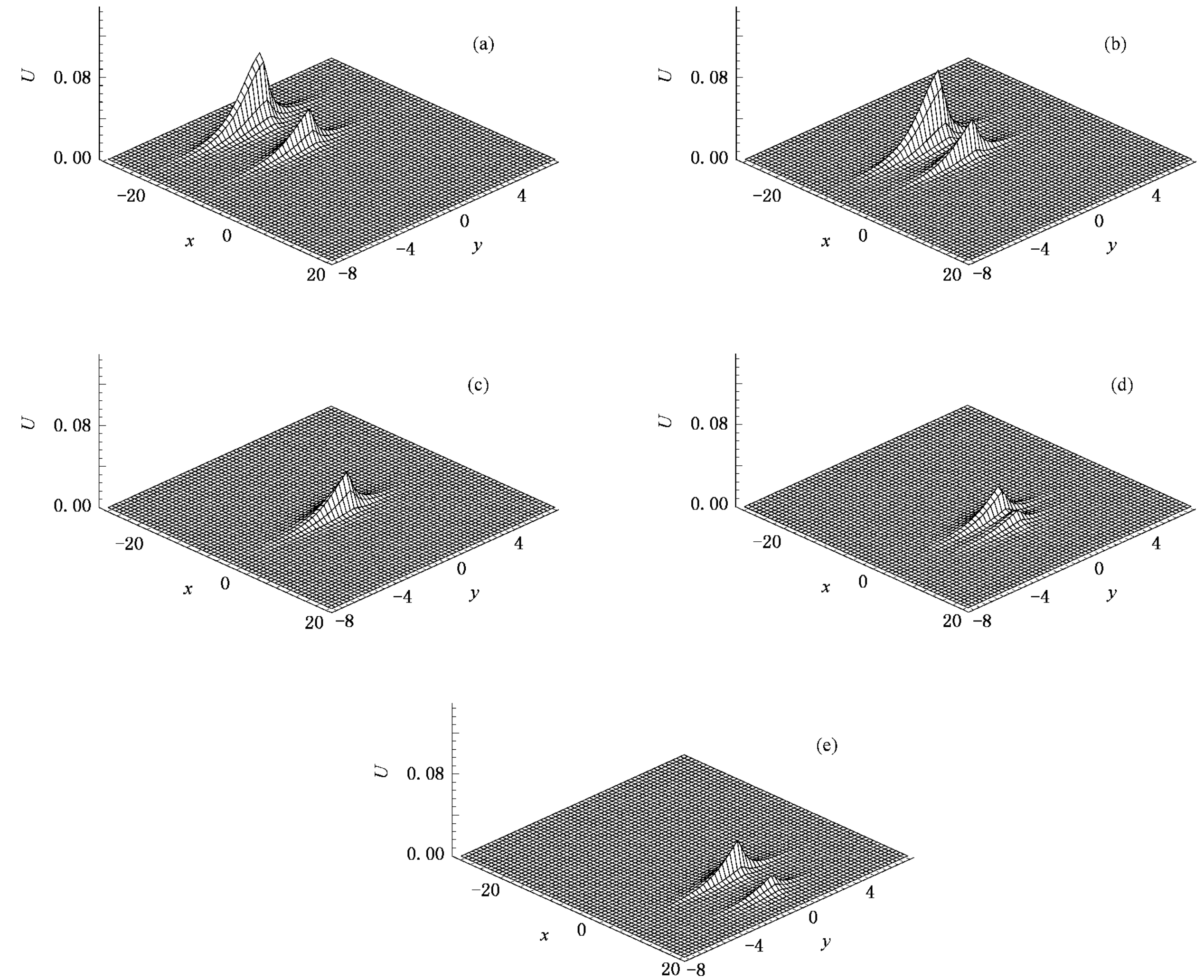

图 3　(15)式利用(20)式得到的两个孤立波的'追碰'时间演化图　(a) $t=-12$, (b) $t=-8$, (c) $t=0$, (d) $t=3$, (e) $t=8$

立波并发生相互作用. 作用后两个孤立波的峰值和形状都变小了,类似于非弹性作用.通过进一步的研究发现,两个孤立波脱开以后继续朝着原方向运动,但是它们之间的距离越离越远,其原因是前者的速度大于后者的速度.

4. (2+1)维 ANNV 系统的分形结构

分形是自然界存在的一种普遍现象,大到星系、海岸线,小到细菌群落的生长、植物的生长及视网膜上血管的分布等,其共同特点是局部与整体具有相似性,或者在标度变换下具有相似性的几何形状. 对分形的研究有利于促进对自然的理解,分形是非线性科学研究的一个重要方面. 下面我们来研究 ANNV 系统的分形行为.

4.1. 规则分形结构

在(15)式中,取 χ, φ 为如下形式:

$$\begin{aligned}\chi &= 1+\exp[-(x-ct)((x-ct) \\ &\quad + 2\mathrm{sn}(\ln x^2, 0.6))], \\ \varphi &= 1+\exp[-y(y+2\mathrm{sn}(\ln y^2, 0.6))],\end{aligned} \tag{21}$$

其中 sn 是 Jacobian 椭圆正弦函数. 图 4(a)给出了系统的局域规则分形结构(取 $c=1$, $t=0$);图 4(b)表示 x, y 在区间 $x\in[-0.002, 0.002]$, $y\in[-0.002, 0.002]$ 中分形结构的密度分布. 为了更加细致地观察其自相似结构,将 x, y 的范围取得更小,例如取 $x\in[-0.00002, 0.00002]$, $y\in[-0.00002, 0.00002]$,发现了与图 4(b)相同的密度斑图,如图 4(c)所示. 实际上, x, y 的范围一直往下取时,也有相同的结构.

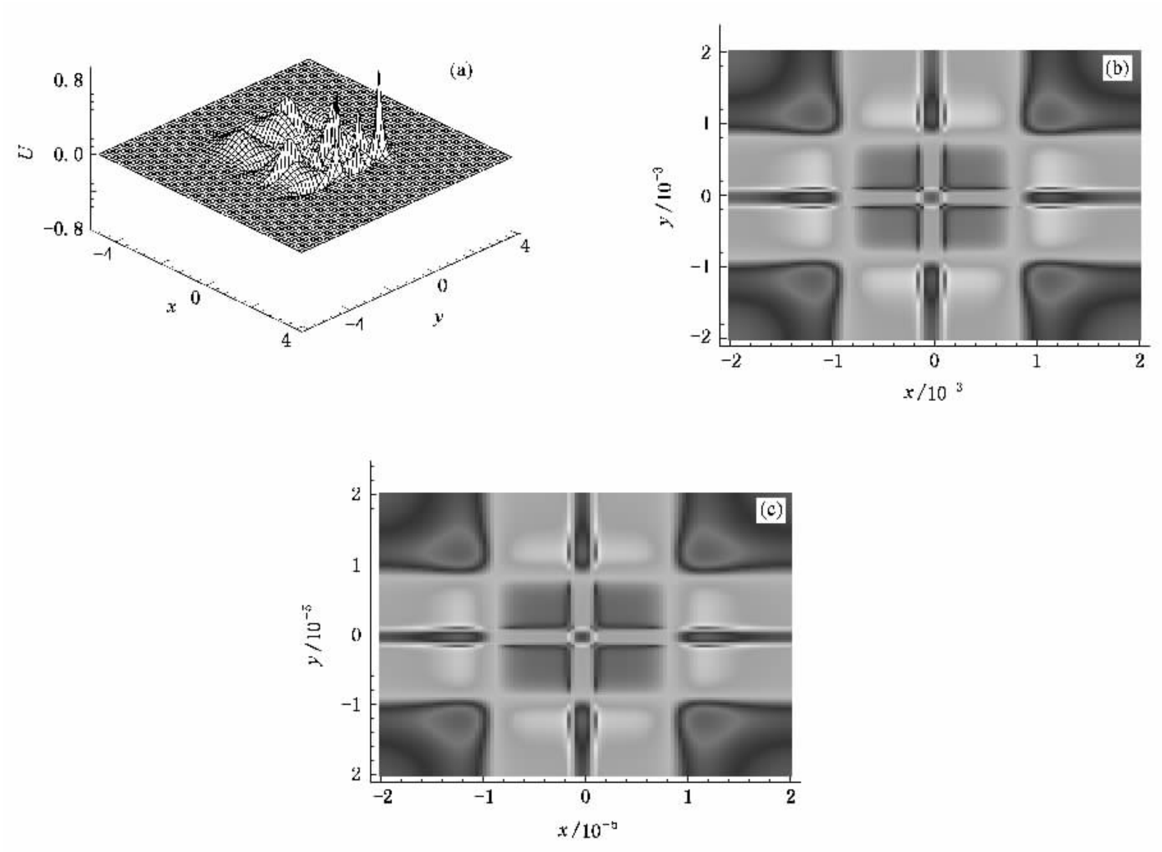

图4 局域规则分形结构和密度斑图 (a)(15)式利用(21)式得到的局域规则分形结构;(b)对应(a)图取 x,y 的范围为 $x\in[-0.002,0.002]$,$y\in[-0.002,0.002]$时的密度斑图;(c)对应(a)图取 x,y 的范围为 $x\in[-0.00002,0.00002]$,$y\in[-0.00002,0.00002]$时的密度斑图

4.2. 随机分形结构

如果取任意函数为如下形式:

$$\begin{aligned}\chi &= 1+2\exp(-(x+t)(x+t+\Re)),\\ \varphi &= 1+2\exp(-y(y+\Theta)),\end{aligned}\tag{22}$$

其中

$$\Re=\sum_{i=0}^{k}(1.5^{0.5k}\sin(1.5^{k}x)),$$

$$\Theta=\sum_{i=0}^{k}(1.5^{0.5k}\sin(1.5^{k}y)),\tag{23}$$

则得到系统的随机分形结构.图5显示的是当 $k=30$ 时的随机 dromion 分形.从图5可以看到,dromion 孤子的波峰、形状随时间 t 随机地变化.

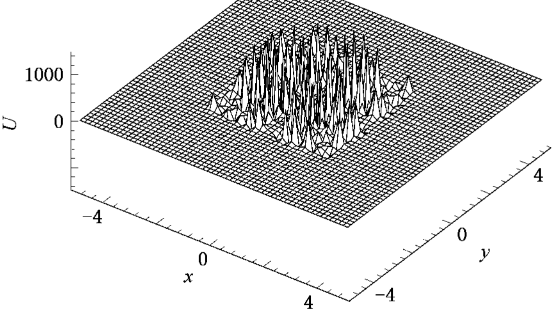

图5 (15)式利用(22),(23)式得到的局域随机分形结构

5. 结 论

本文利用改进的 Riccati 方程映射法和变量分离法,得到了(2+1)维 ANNV 系统的孤波解、周期波解和变量分离解,并根据孤波解 u_1 利用分段函数得到了系统不同类型的峰孤子解.接着,利用 Jacobi椭圆正弦函数研究了系统的自相似局域规则分形结构,进一步研究了系统的局域随机分形结构.本文还讨论了两个孤立波"追碰"的有趣现象,即两个孤立波运动方向相同,但是速度大小不同,一个孤立波追上另一个孤立波,然后发生作用,由于速度不同,作用之后两个孤立波越离越远.

映射法对求解非线性演化方程是一种非常有效的方法,已经得到了广泛的应用.这里我们进一步拓展了它的应用,这种方法对其他高维非线性物理模型的推广值得深入研究.

感谢郑春龙教授对本文工作的指导.

[1] Camassa R，Holm D D 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **71** 1661

[2] Tang X Y，Lou S Y，Zhang Y 2002 *Phys*. *Rev*. E **66** 046601

[3] Lou S Y 1998 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **80** 5027

[4] Boiti M，Leon J J P，Manna M，Pempinelli F 1988 *Phys*. *Lett*. A **132** 432

[5] Zheng C L，Zhu J M，Zhang J F 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **39** 261

[6] Zheng C L，Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **19** 1399

[7] Zheng C L 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **40** 25

[8] Zhang J F，Zheng C L，Fang J P 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 448

[9] Zhu J M，Ma Z Y，Zheng C L 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3248 (in Chinese)[朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]

[10] Hietarinta J 1990 *Phys*. *Lett*. A **149** 113

[11] Radha R，Lakshmanan M 1991 *Phys*. *Lett*. A **197** 7

[12] Lou S Y 1995 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **28** 7227

[13] Ruan H Y，Lou S Y 1997 *J*. *Math*. *Phys*. **38** 3123

[14] Zhang J F，Meng J P 2004 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **41** 655

[15] Lou S Y 1996 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **26** 487

[16] Lou S Y，Tang X Y，Li J 2001 *Eur*. *Phys*. *J*. B **22** 473

[17] Lai D W C，Chow K W 1999 *J*. *Phys*. *Soc*. *Jpn*. **65** 1847

[18] Lai D W C，Chow K W 2001 *J*. *Phys*. *Soc*. *Jpn*. **70** 666

[19] Zhang J F，Huang W H，Zheng C L 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2676 (in Chinese)[张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]

[20] Zhu J M，Ma Z Y，Zheng C L 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 483 (in Chinese)[朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **54** 483]

[21] Fang J P，Zheng C L，Chen L Q 2004 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **42** 175

[22] Fang J P，Zheng C L 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 670

[23] Fang J P，Zheng C L，Zhu J M 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2990 (in Chinese)[方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]

[24] Ma S H，Fang J P 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 5611(in Chinese)[马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]

[25] Ma S H，Wu X H，Fang J P，Zheng C L 2006 *Z*. *Naturforsch*. A **61** 249

[26] Boiti M，Leon J J P，Manan M，Penpinelli F 1986 *Inver*. *Prob*. **2** 271

[27] Hietarinta J 1990 *Phys*. *Lett*. A **149** 133

[28] Ma S H，Qiang J Y，Fang J P 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 620 (in Chinese)[马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]

[29] Wang S，Tang X Y，Lou S Y 2004 *Chaos Solitons Fract*. **19** 769

[30] Zheng C L，Zhang J F 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 0011

[31] Zheng C L，Zhang J F 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2426 (in Chinese)[郑春龙、张解放 2002 物理学报 **51** 2426]

New mapping solutions and localized structures for the (2+1)-dimensional asymmetric Nizhnik-Novikov-Veselov system *

Ma Song-Hua† Fang Jian-Ping Ren Qing-Bao

(*Department of Physics*, *Lishui University*, *Lishui* 323000, *China*)

(Received 14 December 2006; revised manuscript received 8 May 2007)

Abstract

The mapping approach is a kind of classic, efficient and well-developed method to solve nonlinear evolution equations. Its remarkable characteristic is that we can have infinitely different ansatzs and thus end up with the abundance of solutions. By an improved mapping approach and a variable separation method, a series of excitations of the (2+1)-dimensional asymmetric Nizhnik-Novikov-Veselov system is derived. Based on the derived solitary wave excitation, we obtain some special localized structures such as peakon solitons and fractal solitons, then we discuss the phenomenon of "chase and collision".

Keywords: improved mapping approach, (2+1)-dimensional asymmetric Nizhnik-Novikov-Veselov system, localized structures, "chase and collision" phenomenon

PACC: 0230, 0340, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y604106, Y606128) and the Scientific Research Foundation of Lishui University, China (Grant Nos. FC06001, QN06009).

† E-mail: msh6209@yahoo.com.cn