

# 基于近似熵测度的自适应随机共振研究\*

李 强 王太勇 冷永刚 何改云 何慧龙

(天津大学机械工程学院, 天津 300072)

(2006 年 12 月 5 日收到 2007 年 5 月 8 日收到修改稿)

变步长随机共振算法有效解决了绝热近似大参数条件下的弱信号检测问题. 基于信号近似熵测度的自适应随机共振, 实现了变步长随机共振最优输出的自适应求解. 周期信号的近似熵不受其幅值和相位变化的影响, 而只与其频率及信噪比有关. 因此, 按照原始数据的采样条件, 构造待检测频率在预定信噪比下的标准信号, 并以其近似熵为基准, 通过自动调节非线性系统的结构参数和计算步长, 求得系统输出的近似熵距离矩阵. 该矩阵中的最小值所对应的即为自适应条件下非线性动力系统的最优参数.

关键词: 自适应随机共振, 近似熵, 弱信号检测, 双稳系统

PACC: 0540, 0650

## 1. 引 言

噪声作用于系统, 通常会使系统的输出品质恶化. 然而, 随机共振(stochastic resonance)方法可以在一定程度增加噪声的同时, 不仅不会降低信噪比, 反而会在某一“共振”点处大幅度提高信噪比, 从而使原来被强噪声淹没的周期信号突现出来<sup>[1-5]</sup>. 随机共振的研究不仅表明噪声的可利用性, 而且为突破线性滤波器的检测极限提供了可能.

目前, 随机共振在信号处理方面的研究很多, 特别是针对绝热近似理论大参数条件下的随机共振研究, 大大拓宽了随机共振在工程实测信号处理中的应用<sup>[6-10]</sup>. 然而, 如何通过自适应方法确定各计算参数, 得到非线性系统的最优输出, 始终是困扰各种随机共振求解算法的难题. 文献[6-10]提出的基于 Langevin 方程的变步长(或二次采样)随机共振数值求解算法, 通过调整系统的结构参数和计算步长(或二次采样频率)可以同时实现大、小参数条件下的随机共振, 提高信号的信噪比. 在此基础上, 本文引入了信号的近似熵(approximate entropy)测度, 通过对双稳系统结构参数和计算步长的自动调节, 实现了自适应条件下获取双稳系统的最优输出, 进而得到与原始信号最为匹配的随机共振结果.

## 2. 变步长随机共振的基本原理

### 2.1. 随机共振简述

在某些非线性动力学系统中, 当输入信号不变而改变输入噪声的强度时, 会产生类似于动力学中的共振现象, 即输出的信噪比将出现一个极大值. 这一现象被称为随机共振. 可以用下面的 Langevin 方程对随机共振做近似描述. 势函数

$$U(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$$

表示非线性双稳系统, 其中  $a, b$  是非线性系统结构参数. 以单频正弦信号  $A \sin(2\pi f_0 t)$  和白噪声  $n(t)$  为输入信号, 则对应的 Langevin 方程为

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + A \sin(2\pi f_0 t) + n(t). \quad (1)$$

这里

$$E[n(t)] = 0,$$

$$E[n(t)n(t-\tau)] = 2D\delta(\tau),$$

其中  $D$  是噪声强度.

(1) 式描述了一个过阻尼的质点布朗运动. 在没有调制和噪声作用时, 质点处于双稳势阱中的任意一个势阱, 由系统的初始状态决定. 当  $A > 0$  时, 整个系统的平衡将被打破, 势阱在信号的驱动下, 按频率  $f_0$  发生周期性的倾斜变化,  $A$  只要处于临界值  $A_c$ .

\* 国家自然科学基金(批准号: 50475117, 50675153)和天津市自然科学基金(批准号: 07JCYBJC04600)资助的课题.

以下(信号驱动频率较低时,  $A_c = \sqrt{4a^3/27b}$ ), 质点仍只能在某个势阱内以相同的频率进行局域的周期性运动. 然而, 当引入噪声后, 即使在  $A < A_c$ , 甚至  $A \ll A_c$  时, 质点也可以从原来的势阱跃迁到另外一个势阱. 此时, 系统已不是双稳系统, 系统输出按信号的调制频率  $f_0$  在两个势阱之间进行切换. 当  $A > 0$  时, 信号给系统势阱的切换引入周期变化, 有效地对噪声引起的切换进行同步, 从而使系统输出  $x(t)$  中的小周期分量得到加强. 从系统输出的频谱上看, 在信号的频率  $f_0$  处出现明显的谱峰.

## 2.2. 变步长随机共振及其存在的问题

(1) 式是一种非线性随机微分方程, 事实上此类方程的解不存在精确的表达式. 变步长(或二次采样)随机共振为它的求解提供了方案. 大参数条件下, 对于  $50f_0 \leq f_s$  ( $f_0$  为待检测频率,  $f_s$  为采样频率)的弱周期信号, 运用变步长随机共振算法, 通过适当改变计算步长  $h$ , 即取  $h > 1/f_s$ , 则能拓宽随机共振系统输出的频带宽度. 同时, 结合结构参数  $a, b$  的调节, 以改善非线性系统特性, 进而得到待检测的弱周期信号<sup>[10]</sup>. 可是, 如何合理调节非线性系统的结构参数  $a, b$  和计算步长  $h$ , 获得双稳系统的最优输出, 却没有一个定量的规律可循. 因此, 随机共振的自适应求解始终是该领域研究的一个热点<sup>[11]</sup>.

## 3. 基于近似熵测度的自适应随机共振

### 3.1. 近似熵原理

20 世纪 90 年代初, Pincus<sup>[12, 13]</sup> 为了克服混沌现象中求解熵的困难, 从衡量非线性时间序列复杂性的角度提出了近似熵的概念. 此后, 近似熵在生物电信号<sup>[14, 15]</sup>、机械设备故障信号<sup>[16, 17]</sup>和电弧焊电流信号<sup>[18]</sup>等领域进行了尝试并获得了良好效果.

设采集到的原始数据为  $x(i) (i = 1, 2, \dots, N)$ , 预先给定模式嵌入维数  $m$  和相似容限  $r$  的值, 则近似熵可以通过以下步骤计算得到.

1) 将序列  $\{x(i)\}$  按顺序组成  $m$  维矢量  $O(i)$ , 即

$$O(i) = [x(i), x(i+1), \dots, x(i+m-1)] \\ (i = 1, 2, \dots, N-m+1). \quad (2)$$

2) 对每一个  $i$  值计算  $O(i)$  与其余矢量  $O(j)$  之间的距离

$$d(O(i), O(j)) = \max_{k=0, 1, \dots, m-1} |x(i+k) - x(j+k)|. \quad (3)$$

3) 按照给定的相似容限  $r (r > 0)$ , 矢量  $O(i)$  与其余矢量  $O(j) (i \neq j)$  之间的相似度可以用  $C_i^m(r)$  表示, 即

$$C_i^m(r) = \sum_{j \neq i} \Theta\{r - d(O(i), O(j))\} / (N - m + 1), \quad (4)$$

其中

$$\Theta\{x\} = \begin{cases} 1 & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \quad (5)$$

4) 先将  $C_i^m(r)$  取对数, 再求其对所有  $i$  的平均值, 记作  $\phi^m(r)$ , 即

$$\phi^m(r) = \frac{1}{N - m + 1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \ln C_i^m(r). \quad (6)$$

5) 对  $m+1$ , 重复以上过程, 得到  $\phi^{m+1}(r)$ .

6) 理论上此序列的近似熵为

$$S_a(m, r) = \phi^m(r) - \phi^{m+1}(r). \quad (7)$$

近似熵的值显然与  $m, r$  有关. 根据经验, 嵌入维数  $m$  通常取 2,  $r = ad_{TS}(x)$ , 其中  $d_{TS}(x)$  为时间序列的标准差,  $a$  为  $r$  的控制参数,  $a$  的取值范围通常为  $0.1 \leq a \leq 0.25$ . 本文均采用  $m = 2, a = 0.25$  来计算信号的近似熵.

### 3.2. 周期信号近似熵的性质

实际上, 近似熵衡量的是当维数变化时时间序列中产生新模式的概率大小, 产生新模式的概率越大, 序列越复杂, 相应的近似熵也就越大. 近似熵只是希望从统计的角度来区别时间过程的复杂性, 表征动力系统的差异或变化, 而不是描述或重建奇异吸引子的全貌, 因此只需要较短的数据就可以估计出来. 文献<sup>[16]</sup>对轴承信号近似熵的分析表明, 当采样点数大于 1000 时, 采样点数变化对信号近似熵的影响就可以被忽略. 下面对周期信号近似熵性质的定量分析, 将进一步揭示近似熵作为一种测度在描述信号特征方面所具有的普遍意义.

首先, 以时间序列  $s(t) = A \sin(2\pi ft + \theta)$  为例, 在一定的采样条件下, 分别作如下计算 (1) 当频率  $f$  一定时,  $s(t)$  的近似熵随幅值  $A$  和相位  $\theta$  的变化关系 (2) 当频率  $f$  变化时,  $s(t)$  的近似熵随频率  $f$  的变化关系.

图 1 给出了采样频率  $f_s = 10$  kHz, 点数  $n = 1024$ ,  $f = 40$  Hz 时,  $s(t)$  在幅值  $A \in [0.1, 20]$  步长

为0.1)时幅值与近似熵的关系曲线和  $s(t)$  在相位  $\theta \in [0, \pi]$  (步长为  $\pi/20$ , 幅值  $A = 1$ ) 时相位与近似熵的关系曲线. 由图 1 可见, 随着幅值和相位的不断变化, 这组周期信号的近似熵基本保持在 0.0544 不变.

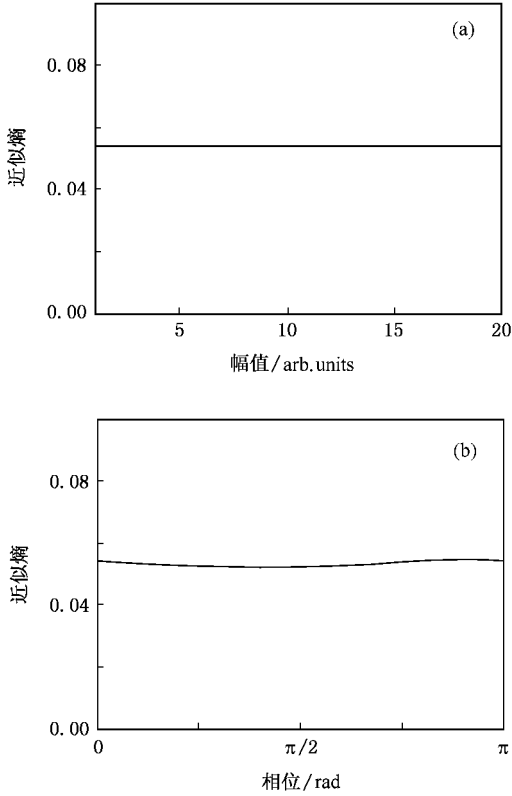


图 1 信号  $s(t)$  的幅值与近似熵关系曲线(a)和相位与近似熵关系曲线(b)

图 2 为上述采样条件下,  $s(t)$  在频率  $f \in [0, 400]$  (步长为 1 Hz, 幅值  $A = 1$ , 相位  $\theta = 0$ ) 时的频率与近似熵的关系曲线. 由图 2 可见, 当  $f \in [0, 160]$  时, 近似熵随  $f$  的增大而单调上升, 直到  $f = 160$  Hz 时取得最大值 0.3001; 当  $f \in [160, 200]$  时, 近似熵的变化较为平缓; 当  $f \in [200, 400]$  时, 近似熵随  $f$  的增大而缓慢下降. 由数据采集的相关知识可知, 在  $62.5f \leq f_s$  的区间内, 图 2 的曲线反映出  $s(t)$  的近似熵随频率  $f$  的增大而单调上升. 这一区间也正是变步长随机共振的检测条件 ( $50f_0 \leq f_s$ ) 所限定的有效频段.

根据上述分析结果, 周期信号的近似熵不受其幅值和相位变化的影响, 而只与其频率相关. 换言之, 在一定的采样条件下, 周期信号的近似熵作为一种测度, 反映的是该信号的频率特性.

其次, 以时间序列  $s'(t) = X(t) + n(t) = \sin(2\pi ft) + n(t)$  (采样条件同上,  $n(t)$  同(1)式)为例, 计算当频率  $f$  一定时,  $s'(t)$  的近似熵随信噪比的变化曲线.

图 3 所示为  $s'(t)$  的近似熵在信噪比  $R_{SN} \in [-20, 100]$  (步长为 5 dB,  $f = 40$  Hz) 时信噪比与近似熵关系曲线. 信噪比  $R_{SN}$  的计算公式如下:

$$R_{SN} = 10 \lg \frac{\|X(t)\|_2 / M}{\|n(t)\|_2 / L}, \quad (8)$$

式中

$$\|X(t)\|_2 = \sum X(t)^2,$$

$$\|n(t)\|_2 = \sum n(t)^2,$$

$M$  和  $L$  分别为  $X(t)$  和  $n(t)$  的数据长度.

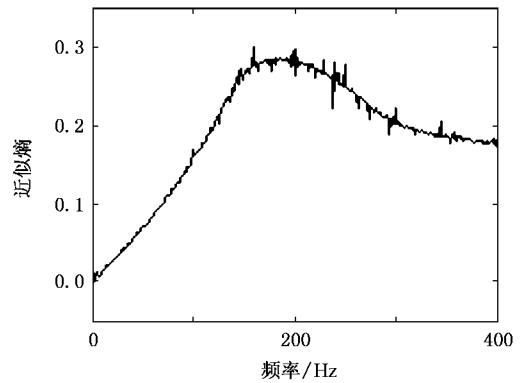


图 2 信号  $s(t)$  的频率与近似熵的关系

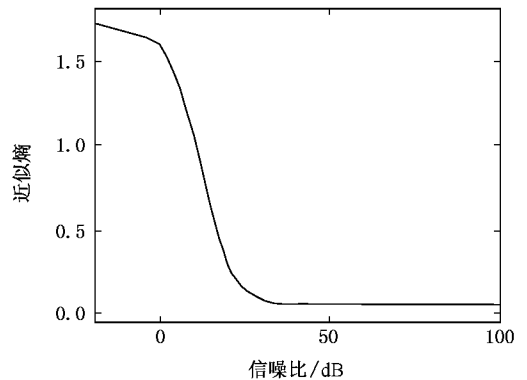


图 3 信号  $s'(t)$  的信噪比与近似熵的关系

从图 3 可以看出,  $s'(t)$  的近似熵随信噪比的逐渐变大呈非线性下降趋势, 这和近似熵作为信号复杂性测度的性质是一致的. 整个变化区间介于信噪比为  $-20$  dB 时  $s'(t)$  的近似熵值 1.6909 和  $X(t)$  ( $f = 40$  Hz 时) 的近似熵值 0.0544 之间. 特别在信噪比

$R_{SN} \in [-10, 35]$  区间, 近似熵随信噪比的增大迅速下降. 而当信噪比大于 35 dB 时所表现出来的平稳性则说明, 若时间序列内含噪声的幅度低于  $r$ , 该噪声将被抑制. 因此, 近似熵具有一定的抗噪、抗野点能力.

### 3.3. 自适应随机共振的实现步骤

下面给出基于信号近似熵测度的自适应随机共振在弱信号检测中的实现步骤.

1) 对待检测频率  $f_0$ , 计算周期信号  $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$  在预定信噪比下的参考近似熵  $S_{ar}$ . 随机共振的性质决定了其结果不可能是单一的特征频率, 所以, 只要系统输出的信噪比大于预定值, 就认为该特征频率已被检测到. 一般可预定信噪比为 20 dB.

2) 对满足变步长随机共振处理要求的工程实测数据, 初定结构参数  $a$  (为了简便, 本文取  $b = 1$ ) 和步长  $h$  的取值范围后, 分别计算出各组参数下的系统输出  $X(t)$ .

3) 计算出各组参数下系统输出  $X(t)$  的近似熵  $S_a$ , 并以各  $S_a$  与  $S_{ar}$  差的绝对值, 即  $d = |S_a - S_{ar}|$ ,

构造近似熵距离矩阵  $\kappa$ .

4) 找到近似熵距离矩阵  $\kappa$  中的最小值, 按照它所对应的势垒参数  $a, b$  和步长  $h$  计算, 求得双稳随机共振系统的最佳输出  $X(t)$ .

5) 如果所得最佳输出  $X(t)$  仍不能满足要求, 则重新设定势垒参数  $a$  和步长  $h$  的取值范围, 并重复以上步骤.

## 4. 自适应随机共振的仿真分析

基于近似熵测度的自适应随机共振通过自动调节结构参数  $a, b$  和步长  $h$ , 得到了自适应条件下双稳系统的最优输出. 下面将通过具体的仿真实例, 证明该自适应方法的有效性.

仿真信号为  $s_n(t) = 0.5\sin(2\pi 40t) + n(t)$  (采样频率  $f_s = 10$  kHz, 点数  $n = 1024$ , 噪声强度  $D = 9.1$ ), 原始波形及其幅值谱如图 4 所示. 由于特征频率在低频区, 为了更加明确地反映文中方法的有效性, 下面只给出 2000 Hz 以下部分的幅值谱. 由图 4 可见  $f_0 = 40$  Hz 的周期信号完全被强噪声所淹没, 无论从时域波形还是幅值谱上都不能获得相应特征.

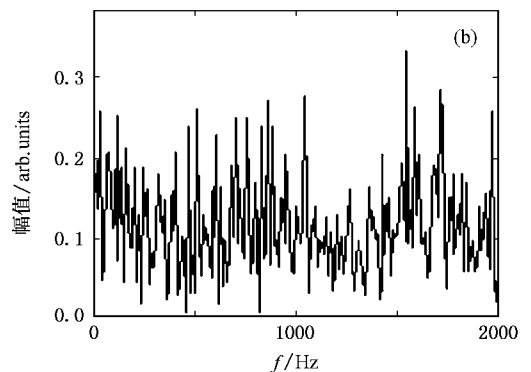
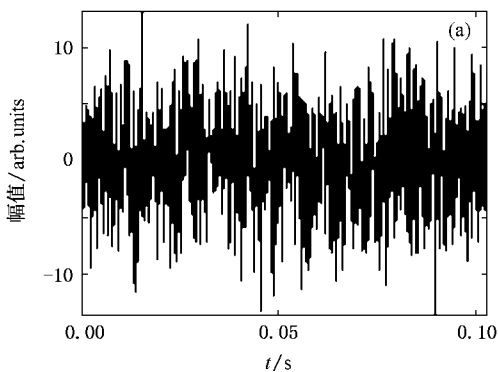


图 4 仿真信号  $s_n(t)$  的时域波形 (a) 和幅值谱 (b)

由上述分析可知,  $f_0 = 40$  Hz 属于该采样条件下近似熵测度的可识别域. 因此, 按照给出的实现步骤, 首先求得参考信号  $s(t) = \sin(2\pi 40t)$  在预定信噪比为 20 dB 时的近似熵  $S_{ar} = 0.4464$  (可参照图 3). 取  $a \in [0.1, 1]$ ,  $b = 1$ ,  $h \in [0.05, 0.25]$ , 计算得到近似熵距离矩阵  $\kappa(10, 20)$ . 该矩阵中,  $\min(d) = 0.2685$  相应的  $a = 0.5$ ,  $h = 0.05$ ;  $\max(d) = 1.1312$ , 相应的  $a = 0.1$ ,  $h = 0.25$ . 两组参数下的系统输出及其幅值谱如图 5 所示, 图 5(e)(f) 分别为图 5(c),

(d) 在 500 Hz 以下部分的幅值谱.

由图 5 可以看出 (c)(e) 图中  $f_0 = 40$  Hz 的谱线非常明显, 能量主要集中在该频率上, 高频部分被明显削弱. 而图 5(d)(f) 中虽然在  $f_0 = 40$  Hz 处也存在较为明显的谱线, 但是由于整个信号的能量分布不集中, 谱线杂乱, 仍然不能很好地提取特征频率. 由此可见, 基于近似熵测度的自适应随机共振为获得双稳系统的最优输出提供了很好的方案.

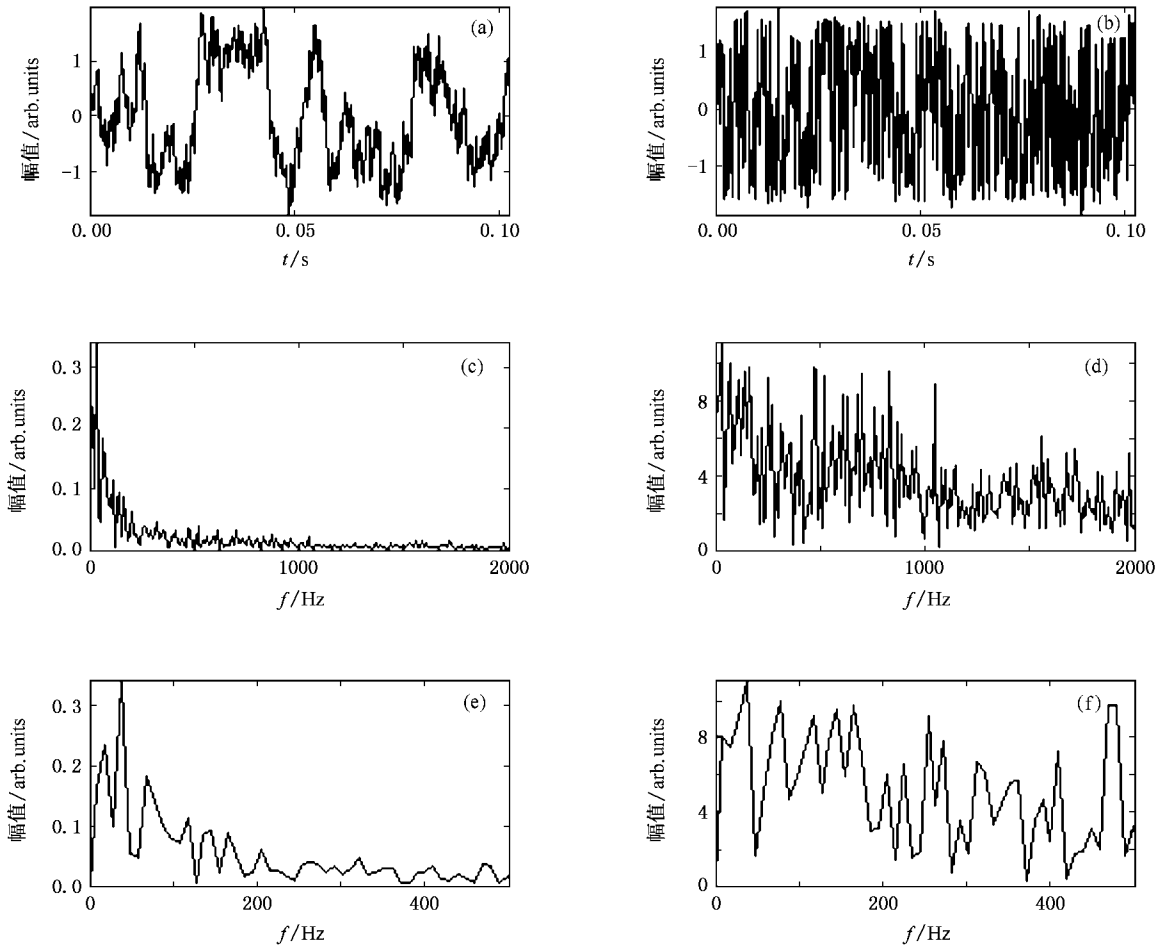


图5 两组参数下的系统输出 (a)  $d = 0.2685$  时的输出波形 (b)  $d = 1.1312$  时的输出波形 (c) 频率低于 2000 Hz,  $d = 0.2685$  时的输出幅值谱 (d) 频率低于 2000 Hz,  $d = 1.1312$  时的输出幅值谱 (e) 频率低于 500 Hz,  $d = 0.2685$  时的输出幅值谱 (f) 频率低于 500 Hz,  $d = 1.1312$  时的输出幅值谱

## 5. 结 论

为了解决双稳系统随机共振的参数优化问题, 在变步长(或二次采样)随机共振方法解决了大参数条件下, 从低信噪比信号中提取微弱特征频率问题的基础上, 本文提出了基于近似熵测度的自适应随机共振. 周期信号的近似熵不受其幅值和相位变化

的影响, 而只与其频率相关. 因此, 按照原始数据的采样条件, 以待检测频率  $f_0$  构造满足预定信噪比的周期信号并以其近似熵为参考, 通过自动调节非线性系统结构参数  $a, b$  和计算步长  $h$  求得系统输出的近似熵距离矩阵  $\kappa$ . 找到近似熵距离矩阵  $\kappa$  中的最短“距离” $d$ , 就获得自适应条件下双稳系统随机共振的最优输出. 仿真算例表明, 该方法对于在强噪声背景中提取微弱特征信号是非常有效的.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *J. Phys. A* **14** 453  
 [2] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiana A 1982 *Tellus* **34** 10  
 [3] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223  
 [4] Xu W, Jin Y F, Li W, Ma S J 2005 *Chin. Phys.* **14** 1077  
 [5] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]

- [6] Leng Y G, Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2432 (in Chinese) [冷永刚、王太勇 2003 物理学报 **52** 2432]  
 [7] Leng Y G, Wang T Y, Qin X D, Li R X, Guo Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 717 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、秦旭达、李瑞欣、郭 焱 2004 物理学报 **53** 717]  
 [8] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wang W J, Hu S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1118 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、郭 焱、

- 汪文津、胡世广 2005 物理学报 **54** 1118 ]
- [ 9 ] Leng Y G , Leng Y S , Wang T Y , Guo Y 2006 *J. Sound. Vib.* **292** 788
- [ 10 ] Li Q , Wang T Y , Leng Y G , Xu Y G 2006 *J. Tianjin Univ.* **39** 432 ( in Chinese ) [ 李 强、王太勇、冷永刚、胥永刚 2006 天津大学学报 **39** 432 ]
- [ 11 ] Leng Y G , Wang T Y , Guo Y , Wu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30 ( in Chinese ) [ 冷永刚、王太勇、郭 焱、吴振勇 2007 物理学报 **56** 30 ]
- [ 12 ] Pincus S M 1991 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **88** 2297
- [ 13 ] Pincus S M 1995 *Chaos* **5** 110
- [ 14 ] Liao W C , Hu G S , Yang F S 1996 *Chin. J. Biomed. Eng.* **15** 193 ( in Chinese ) [ 廖旺才、胡广书、杨福生 1996 中国生物医学工程学报 **15** 193 ]
- [ 15 ] Xie Y , Xu J X , Yang H J , Hu S J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 205 ( in Chinese ) [ 谢 勇、徐健学、杨红军、胡三觉 2002 物理学报 **51** 205 ]
- [ 16 ] Xu Y G , Li L J , He Z J 2002 *Inform. Contr.* **31** 547 ( in Chinese ) [ 胥永刚、李凌均、何正嘉 2002 信息与控制 **31** 547 ]
- [ 17 ] Yan R Q , Gao R X 2007 *Mech. Syst. Sig. Proc.* **21** 824
- [ 18 ] Cao B , Lü X Q , Zeng M , Wang Z M , Huang S S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1696 ( in Chinese ) [ 曹 彪、吕小青、曾 敏、王振民、黄石生 2006 物理学报 **55** 1696 ]

## Research of adaptive stochastic resonance based on approximate entropy<sup>\*</sup>

Li Qiang Wang Tai-Yong Leng Yong-Gang He Gai-Yun He Hui-Long

( School of Mechanical Engineering , Tianjin University , Tianjin 300072 , China )

( Received 5 December 2006 ; revised manuscript received 8 May 2007 )

### Abstract

Weak signal detection under the condition of adiabatic elimination in large parameters has been solved by step-changed stochastic resonance algorithm. Adaptive stochastic resonance based on approximate entropy measurement is proposed , and it can give the best result of the step-changed stochastic resonance adaptively. Because the approximate entropy of the periodic signal does not suffer from the change of its amplitude and phase , a periodic signal of frequency  $f_0$  with given signal-to-noise ratio which is to be detected can be made under the same condition as the raw data , and its approximate entropy is calculated as the criterion. By adjusting the structural parameters and calculation step automatically , a series output of the bistable system can be got , and an approximate entropy distance matrix can be constructed. After getting the minimum value of the matrix , the best parameters of the nonlinear dynamical system can be obtained.

**Keywords** : adaptive stochastic resonance , approximate entropy , weak signal detection , bistable system

**PACC** : 0540 , 0650

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 50475117 , 50675153 ) and the Natural Science Foundation of Tianjin , China ( Grant No. 07JCYBJC04600 ).