

两个耦合的分数阶 Chen 系统的 混沌投影同步控制*

邵仕泉[†] 高 心 刘兴文

(西南民族大学电气信息工程学院, 成都 610041)

(2006 年 12 月 22 日收到, 2007 年 6 月 4 日收到修改稿)

研究了两个耦合的分数阶 Chen 系统的混沌投影同步控制问题. 通过建立近似的整数阶模型, 使用状态误差反馈控制策略控制投影同步比例因子达到理想值. 理论上证明了该控制方法的可行性, 数值仿真进一步验证了该方法的有效性.

关键词: 分数阶, 混沌系统, 投影同步, Chen 系统

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 分数阶混沌系统的研究吸引了学者们的广泛关注. 许多普通混沌系统都被实验证明存在对应的分数阶混沌系统, 如分数阶临界混沌系统^[1]、分数阶混沌电子振荡器^[2,3]、分数阶 Chen 系统^[4]以及其他各种分数阶混沌系统^[5-7]. 这些研究完成了如何将一个普通混沌系统用分数阶系统表示以及对所建立的分数阶混沌系统的特性分析.

自从 Pecora 和 Carroll^[8,9]做出关于耦合混沌系统同步性质研究的开创性工作以来, 混沌系统的同步研究掀起了一轮热潮^[10-14]. 最近, 一种新的同步现象在研究部分线性混沌系统中被观察到^[15-20], 这就是投影同步, 其特性表现为在一定的条件下耦合的主从系统状态的输出不仅相位是锁定的, 而且各对应状态的振幅还会最终保持某一固定的比例因子关系.

分数阶混沌系统中的同步研究取得了大量成果^[1-7]. 对于投影同步, 分数阶 Chen 系统也被实验证明可以实现^[21]. 但据我们所知, 由于分数阶混沌系统理论分析的困难性, 现阶段的工作大都局限于数值实验阶段, 缺乏较为具体的理论分析. 为了解决这个问题, 我们把分数阶混沌系统转换为一个近似

的等效整数阶模型, 然后在这个等效的整数阶模型基础上, 使用状态误差反馈策略实现了主从系统的投影同步. 理论分析和实验仿真证明了该方法的可行性与有效性.

2. 耦合的分数阶 Chen 系统及其逼近

2.1. 分数阶算子的定义与实现

分数阶微分的基本定义是基于 Grunwald-Letnikov 定义和 Riemann-Liouville 定义^[22]:

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau. \quad (1)$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数, $n-1 \leq \alpha < n$. 设初始条件为零, 则 (1) 式的 Laplace 变换为

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\}. \quad (2)$$

显然, 阶数为 α 的分数积分算子在频域内可以表示为

$$F(s) = \frac{1}{s^\alpha}.$$

通常, 这样的分数阶算子是使用标准的整数阶算子来逼近^[23], 文献[24]中用以下形式给出了逼近公式:

* 西南民族大学科研计划和国家民族事务委员会自然科学基金(批准号: 05XN07, 07XN05)资助的课题.

[†] E-mail: watershao@sohu.com

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{c_1 s^2 + c_2 s + c_3}{s^3 + c_4 s^2 + c_5 s + c_6}, \quad (3)$$

式中 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 为常数, 它们的值可以由文献 [24] 中的表 1 查得, $c_1 = 1.766, c_2 = 38.27, c_3 = 4.914, c_4 = 36.15, c_5 = 7.789, c_6 = 0.01$.

2.2. 耦合的分数阶 Chen 系统的逼近

分数阶 Chen 系统可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= a(y - x), \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (4)$$

同整数阶的定义, 可以得到耦合的分数阶 Chen 系统

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_m}{dt^\alpha} &= a(y_m - x_m), \\ \frac{d^\alpha y_m}{dt^\alpha} &= (c - a)x_m - x_m z + cy_m, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= x_m y_m - bz, \\ \frac{d^\alpha x_s}{dt^\alpha} &= a(y_s - x_s), \\ \frac{d^\alpha y_s}{dt^\alpha} &= (c - a)x_s - x_s z + cy_s, \end{aligned} \quad (5)$$

式中下标 m 表示主系统, s 表示从系统.

下面我们主要分析 $\alpha = 0.9$ 时的情况, 其他阶次的特性可以类似得到. 对 (5) 式做 Laplace 变换,

$$\begin{aligned} X_m(s) &= \frac{1}{s^{0.9}} I(a(y_m - x_m)), \\ Y_m(s) &= \frac{1}{s^{0.9}} I((c - a)x_m - x_m z + cy_m), \\ Z(s) &= \frac{1}{s^{0.9}} I(x_m y_m - bz), \\ X_s(s) &= \frac{1}{s^{0.9}} I(a(y_s - x_s)), \end{aligned}$$

$$Y_s(s) = \frac{1}{s^{0.9}} I((c - a)x_s - x_s z + cy_s). \quad (6)$$

将 (3) 式代入 (6) 式, 并设

$$\begin{aligned} x_m &= x_{1m}, \\ \dot{x}_m &= \dot{x}_{1m} = x_{2m}, \\ \ddot{x}_m &= \dot{x}_{2m} = x_{3m}, \\ y_m &= x_{4m}, \\ \dot{y}_m &= \dot{x}_{4m} = x_{5m}, \\ \ddot{y}_m &= \dot{x}_{5m} = x_{6m}, \\ z &= x_7, \\ \dot{z} &= \dot{x}_7 = x_8, \\ \ddot{z} &= \dot{x}_8 = x_9, \\ x_s &= x_{1s}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \dot{x}_{1s} = x_{2s}, \\ \ddot{x}_s &= \dot{x}_{2s} = x_{3s}, \\ y_s &= x_{4s}, \\ \dot{y}_s &= \dot{x}_{4s} = x_{5s}, \\ \ddot{y}_s &= \dot{x}_{5s} = x_{6s}; \\ \mathbf{x}_m &= \text{co}(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}, x_{4m}, x_{5m}, x_{6m}), \\ z &= \text{co}(x_7, x_8, x_9) \\ \mathbf{x}_s &= \text{co}(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}). \end{aligned} \quad (8)$$

于是, 可以得到 (5) 式的一阶微分方程组时域表达式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{A}x_m + B_m Z, \\ \dot{z} &= \mathbf{C}z + D, \\ \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}x_s + B_s z. \end{aligned} \quad (9)$$

这里

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m &\in R^{6 \times 1}, \\ z &\in R^{3 \times 1}, \\ \mathbf{x}_s &\in R^{6 \times 1}, \end{aligned}$$

且

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_6 & -c_5 & -c_4 & -c_3 & -c_2 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_3 & c_2 & c_1 & ac_2 - c_6 & ac_3 - c_5 & ac_1 - c_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 B_m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_3 x_{1m} - c_2 x_{2m} - c_1 x_{3m} & -c_2 x_{1m} - 2c_1 x_{2m} & -c_1 x_{1m} \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc_3 - c_6 & -bc_2 - c_5 & -bc_1 - c_4 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 x_{1m} x_{4m} + c_2(x_{1m} x_{5m} + x_{2m} x_{4m}) + c_1(x_{3m} x_{4m} + x_{1m} x_{6m} + 2x_{2m} x_{5m}) \end{bmatrix}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

显然(9)式是(5)式的一个近似,我们对(9)式这个一阶微分方程组的分析就可以认为是等效地分析其对应的分数阶 Chen 系统.换言之,我们对这个一阶微分方程组的分析就等效于分析其对应的分数阶微分方程组.

3. 两个耦合的分数阶 Chen 系统的投影同步

为了使两个耦合系统达到投影同步,在(9)式的从系统分量中加入控制量 $u(t)$ 就有

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_m &= Ax_m + B_m z, \\
 \dot{z} &= Cz + D, \\
 \dot{x}_s &= Ax_s + B_s z + u.
 \end{aligned} \quad (11)$$

现在的问题是转化为什么样的控制量 $u(t)$ 能够使系统(11)达到投影同步.

定理 1 如果控制量 $u(t)$ 具有如下形式:

$$u = (\beta B_m - B_s)z + K(\beta x_m - x_s), \quad (12)$$

且

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

满足条件

$$A - K < 0, \quad (14)$$

那么(9)式表征的整数阶系统和它对应的分数阶系统能够达到投影同步.这里 β 是比例因子.

证明 定义(9)式的投影误差矢量为

$$e = \beta x_m - x_s. \quad (15)$$

构造 Lyapunov 函数

$$v = e^T e / 2,$$

那么

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= e^T \dot{e} = e^T (\beta \dot{x}_m - \dot{x}_s) \\
 &= e^T (\beta Ax_m + \beta B_m z - Ax_s - B_s z \\
 &\quad - \beta B_m z + B_s z - K(\beta x_m - x_s)) \\
 &= e^T (A - K)e.
 \end{aligned} \quad (16)$$

由(14)式,所以有 $\dot{v} < 0$.那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0,$$

这意味着

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_s = \beta x_m,$$

(9)式中主、从系统达到投影同步.又因为(9)式是(5)式的近似系统,所以(5)式也达到了投影同步.证毕.

4. 数值仿真分析

因为 A 是一个常数阵,所以我们可以很容易找到一个矩阵 K 满足(14)式.本文中我们仅展示 0.9 阶系统的仿真结果,对于其他阶次的系统,可以使用同样的方法得到.当 $\beta = 0.2$ 时,相应的仿真结果如图 1 所示(控制量在 0.1 s 的时候加入).

上述仿真结果证明了使用本文提出的方法可以使得两个耦合的分数阶 Chen 系统达到投影同步.

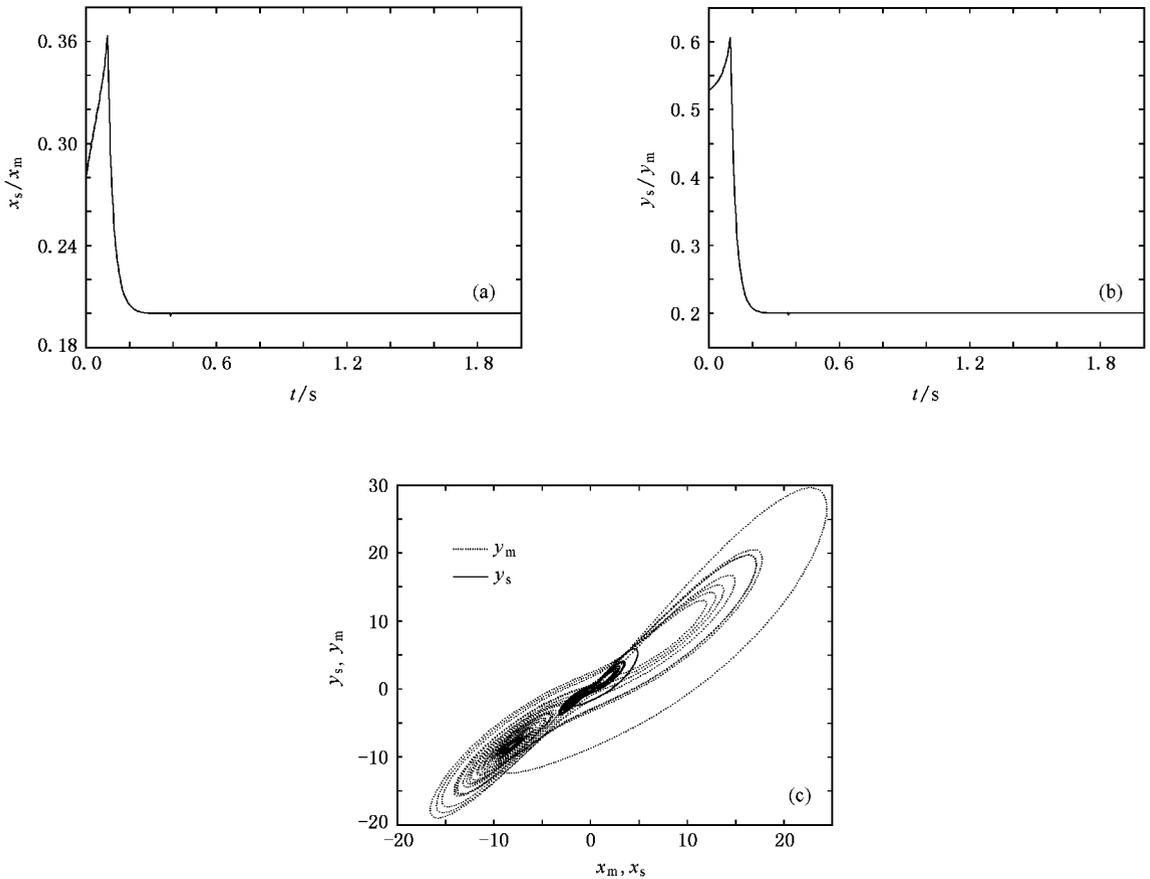


图 1 数值仿真结果 $\beta = 0.2$. (a) x_s/x_m (b) y_s/y_m (c) 主、从系统在 $x-y$ 坐标系统中的投影效果图

5. 结 论

本文通过建立两个耦合的分数阶 Chen 系统的等价整数阶模型, 把对分数阶的分析、控制、转换到整数阶系统中去分析, 通过以状态误差作为系统的

控制输入, 实现了两个系统的投影同步. 给出了该方法的相关定理. 相应的理论证明和数值仿真证明了该方法的可行性与有效性. 可以预见, 该方法应该可以为其他分数阶混沌系统的投影同步控制提供理论借鉴.

[1] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese)
[王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3392]

[2] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908

[3] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 1522

[4] Zhang H B, Li C G, Chen G R, Gao X 2005 *Mod. Phys. C* **16** 815

[5] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55

[6] Lu J G 2006 *Chin. Phys.* **15** 301

[7] Lu J G 2005 *Chin. Phys.* **14** 1517

[8] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[9] Pecora L M, Carroll T L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2374

[10] Zhang X Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 274

[11] Li F 2006 *Chin. Phys.* **15** 507

[12] Wang F Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 1971

[13] Li Z 2004 *Chin. Phys.* **13** 996

[14] Hua C C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1391

[15] Liang F 2006 *J. Northwestern Polytechnical Univ.* **24** 10 (in Chinese)[梁峰 2006 西北工业大学学报 **24** 10]

[16] Zou Y L, Zhu J 2006 *Chin. Phys.* **15** 1965

[17] Xu D 2002 *Phys. Lett. A* **305** 167

[18] Mainieri R, Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042

[19] Xiao Q Y, Zou Y L, Luo X S 2005 *J. Guangxi Normal Univ. (Natural Ed.)* **23**(2) 5 (in Chinese)[肖前勇、邹艳丽、罗晓曙 2005 广西师范大学学报(自然科学版) **23**(2) 5]

- [20] Liu J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘 杰 2003 物理学报 **52** 1595]
- [21] Li C G 2006 *Progr. Theor. Phys.* **115** 661
- [22] Bagley R L , Calico R A 1991 *J. Guid. Cont. Dyn.* **14** 304
- [23] Charef A , Sun H H , Tsao Y Y , Onaral B 1992 *IEEE Trans. Aut. Contr.* **37** 1465
- [24] Ahmad W M , Harb A M 2003 *Chaos Solitons Fract.* **18** 693

Controlling projective synchronization in coupled fractional order chaotic Chen system^{*}

Shao Shi-Quan[†] Gao Xin Liu Xing-Wen

(School of Electrical and Information Engineering , Southwest University for Nationalities , Chengdu 610041 , China)

(Received 22 December 2006 ; revised manuscript received 4 June 2007)

Abstract

In this paper , we study the projective synchronization in two coupled fractional order chaotic Chen systems . An approximate integer order system model for the fractional order Chen system is constructed . A wellknown state error feedback control method is utilized to control the scaling factor to a desired value . Mathematical analysis proves the feasibility and the numerical simulation shows the effectiveness of the proposed method .

Keywords : fractional order , chaotic system , projective synchronization , Chen system

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Scientific Research Program of Southwest University for Nationalities and the Natural Science Foundation of the State Nationalities Affairs Commission of China (Grant Nos. 05XN07 , 07XN05).

[†] E-mail : watershao@sohu.com