

单向耦合网络连接的 Lorenz 系统的追踪控制*

张 荣^{1)†} 胡爱花¹⁾ 徐振源¹⁾

1) 江南大学理学院, 无锡 214122)

2) 江南大学信息工程学院, 无锡 214122)

(2006 年 12 月 20 日收到, 2007 年 5 月 8 日收到修改稿)

基于 Lyapunov 稳定性理论, 将单个 Lorenz 系统的一种追踪控制方案用于单向耦合网络连接的 Lorenz 系统. 只对网络系统的一个节点加入控制器, 就实现了单向耦合网络连接的 Lorenz 系统的单个输出变量对任意给定参考信号的追踪. 数值仿真表明, 当网络的耦合强度足够大时, 可以实现包括同结构和异结构系统信号之间的有效追踪.

关键词: Lorenz 混沌系统, 复杂动态网络, 追踪控制, 单向耦合

PACC: 0545, 0555

1. 引 言

1990 年, 美国科学家 Ott 和 Pecora 等^[1,2]在混沌控制与同步方面作了开创性工作. 此后, 混沌控制与同步一直是非线性科学中的研究热点并取得了大量的成果^[3-5]. 在混沌控制研究中, 追踪问题即通过施加控制使受控系统的输出信号达到事先给定的参考信号更具一般性, 也更困难. 有关追踪问题已有不少研究成果, 如陈士华等^[6]对 Rössler 系统实现了对目标单一变量的跟踪; 伍维根和李国辉等^[7,8]用非线性反馈控制方法, 实现了混沌系统的全变量跟踪控制; Li 等^[9]用基于 Lyapunov 稳定性理论对一类含不确定参数的混沌系统也实现了系统的全局跟踪控制; 廖高华等^[10]开展了束晕混沌控制中的粒子跟踪模拟的研究; 最近李建芬等^[11]提出的异结构同步追踪控制方案, 使受控系统的全状态输出可收敛到任意给定的参考信号.

以上结果都是针对单个混沌系统的, 实际上复杂动态网络的控制与同步问题也一直是网络研究中的热点和难点. 当单个系统作为网络节点, 网络的边为系统之间的耦合时, 就构成了一个复杂动态网络. 在这个复杂动态网络中, 节点之间由于耦合有相互连接, 这种连接可能很弱, 但正是节点间的这种连接, 使得各个节点系统可以根据其他系统的状态

来校正自己的状态, 从而实现网络的控制和同步. 2004 年, 吕金虎等^[12]提出了一个具有一般形式的复杂动态网络. 随后, 这个复杂动态网络受到了广泛关注. 本文针对相对特殊的单向耦合动态网络研究了追踪控制问题, 只对网络系统的一个节点加入控制器, 就实现了网络的某些输出变量对任意给定的参考信号的追踪控制.

2. 追踪控制的描述

Lorenz 混沌系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(-x + y), \\ \dot{y} &= cx - y - xz, \\ \dot{z} &= bz + xy, \end{aligned} \quad (1)$$

其中参数取值为 $a = 10$, $b = 8/3$, $c = 28$.

考察含有 N 个节点的单向耦合复杂动态网络

$$\dot{u}_i = f(u_i) + K \sum_{j=1}^N G_{ij} u_j, \quad (2)$$

其中网络节点为形如 (1) 式的 Lorenz 混沌系统,

$$u_i = (x_i, y_i, z_i)^T \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

在 (2) 式中, $K = \text{diag}\{k, k, k\}$ 为耦合强度矩阵, $G = (G_{ij})_{N \times N}$ 为节点间的耦合矩阵, 当节点 i 和节点 j ($j \neq i$) 有耦合 (注意此时不认为节点 j 和节点 i 一定有耦合) 时, 令 $G_{ij} = 1$, 否则 $G_{ij} = 0$ ($j \neq i$), 矩阵 G 的对角元素满足

* 国家自然科学基金 (批准号: 30372054) 资助的课题.

† E-mail: zhr89@163.com

$$G_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij} \quad (i = 1, \dots, N).$$

本文考虑的网络耦合形式为

$$K \sum_{j=1}^N G_{ij} u_j = K(u_{i-1} - u_i) \quad (i = 2, \dots, N),$$

对应的方程组为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(-x_1 + y_1), \\ \dot{y}_1 &= cx_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= bz_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_i &= a(-x_i + y_i) + k(x_{i-1} - x_i), \\ \dot{y}_i &= cx_i - y_i - x_i z_i + k(y_{i-1} - y_i), \\ \dot{z}_i &= bz_i + x_i y_i + k(z_{i-1} - z_i), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $i = 2, \dots, N$. 对任意给定的参考信号 $r(t)$, 设计控制器 U , 使得受控的(3)式的输出 $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 能够追踪 $r(t)$, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0,$$

其中

$$e_i(t) = x_i(t) - r(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

3. 控制器的设计

本文研究只在单向耦合网络(3)式的第一个节点上加入控制器 U , 即达到追踪控制的目的. 具体方程组为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(-x_1 + y_1), \\ \dot{y}_1 &= cx_1 - y_1 - x_1 z_1 + U, \\ \dot{z}_1 &= bz_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_i &= a(-x_i + y_i) + k(x_{i-1} - x_i), \\ \dot{y}_i &= cx_i - y_i - x_i z_i + k(y_{i-1} - y_i), \\ \dot{z}_i &= bz_i + x_i y_i + k(z_{i-1} - z_i), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $i = 2, \dots, N$.

引理 1 (Barbalat 定理^[12]) 如果 $\varphi(t)$ 一致连续,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\varphi(\tau)| d\tau$ 存在且有界, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\varphi(t) \rightarrow 0$.

定理 1 若设计控制器 U 如下:

$$U = x_1 z_1 + ay_1 - (c + a - 1)x_1 + \frac{\dot{r}}{a} + \frac{\ddot{r}}{a} - ae_1, \quad (5)$$

则(4)式的输出 $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 能够追踪到任意给定的参考信号 $r(t)$.

证明 首先证明(4)式的输出 $x_1(t)$ 可追踪到信号 $r(t)$. 为此, 取 Lyapunov 函数为

$$V = e_1^2 + \left(\frac{e_1}{a} + \frac{\dot{e}_1}{a} \right)^2. \quad (6)$$

沿着(4)式的解轨线, V 的导数如下:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2e_1 \dot{e}_1 + 2 \left(\frac{e_1}{a} + \frac{\dot{e}_1}{a} \right) \left(\frac{\dot{e}_1}{a} + \frac{\ddot{e}_1}{a} \right) \\ &= 2e_1 \dot{e}_1 + 2 \left(\frac{e_1}{a} + \frac{\dot{e}_1}{a} \right) \left[(c + a - 1)x_1 - ay_1 - x_1 z_1 + U - \frac{\dot{r}}{a} - \frac{\ddot{r}}{a} \right] \\ &= 2e_1 \dot{e}_1 + 2 \left(\frac{e_1}{a} + \frac{\dot{e}_1}{a} \right) (-ae_1) \\ &= -2e_1^2. \end{aligned}$$

可以看出, Lyapunov 函数 V 为半正定, 其导数半负定, e_1 有界. 由 $\dot{V} = -2e_1^2$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t 2e_1^2 d\tau &= \int_0^t -\dot{V} d\tau \\ &= V(0) - V(t) \leq V(0), \end{aligned}$$

即 e_1 平方可积, 由 Barbalat 定理得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0.$$

再证明 $x_i(t)$ ($i = 2, \dots, N$) 追踪到信号 $x_1(t)$, 因而可以追踪到信号 $r(t)$.

设

$$e_i(t) = x_i(t) - x_1(t) \quad (i = 2, \dots, N),$$

则由(4)式有

$$\dot{e} = Ae + \phi,$$

$$e = (e_2, \dots, e_N)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} -a-k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k & -a-k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & -a-k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & k & -a-k \end{pmatrix},$$

$$\phi = a(y_2 - y_1, \dots, y_N - y_1)^T.$$

取 Lyapunov 函数为 $V = e^T e$, 则它的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T e + e^T \dot{e} \\ &= (e^T A^T + \phi^T) e + e^T (Ae + \phi) \\ &= e^T (A^T + A) e + 2\phi^T e. \end{aligned}$$

当 $\|e\| = 0$, 有 $\dot{V} = 0$. (4)式的解是有界的, 因而 ϕ 的各个分量有界, 只要耦合系数 k 足够大, 矩阵 $A^T + A$ 就是负定的, 即有 $\dot{V} < 0$. 由 Lyapunov 稳定性, 定

理1得证.

控制器为

$$U = x_1 z_1 + 10y_1 - 37x_1 + \frac{\cos t}{10} - \frac{\sin t}{10} + 10(\sin t - x_1).$$

4. 数值仿真

在以下所有仿真中,参数取值为 $a = 10, b = 8/3, c = 28, N = 20$.

正弦参考信号 $r(t)$ (4)式的输出 $x_i(t), x_i(t) (i = 2 \dots N)$ 中的一个代表以及追踪误差

$$e_i(t) = x_i(t) - r(t) \quad (i = 2 \dots N)$$

4.1. 追踪正弦信号

的仿真结果见图 1, 图中除追踪误差外的各输出信号的取值范围均为 $[-2, 2]$.

设参考信号

$$r(t) = \sin t.$$

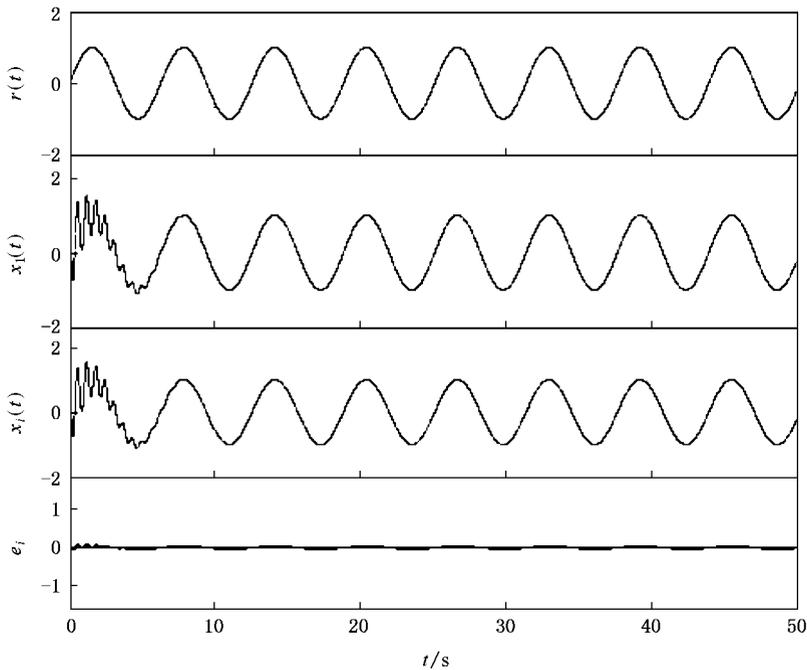


图 1 $k = 1000$ 时正弦信号 $r(t)$ 输出信号 $x_i(t)$ 误差信号 e_i 的仿真结果

4.2. 追踪同结构同参数混沌系统的输出信号

4.3. 追踪同结构异参数混沌系统的输出信号

取相同参数的 Lorenz 混沌系统

取不同参数的 Lorenz 混沌系统

$$\dot{x} = 10(-x + y),$$

$$\dot{x} = 20(-x + y),$$

$$\dot{y} = 28x - y - xz,$$

$$\dot{y} = 45.92x - y - xz,$$

$$\dot{z} = -(8/3)z + xy.$$

$$\dot{z} = -(8/3)z + xy.$$

设参考信号

设参考信号

$$r(t) = x(t).$$

$$r(t) = x(t).$$

控制器为

控制器为

$$U = x_1 z_1 + 10y_1 - 37x_1 + 37x - 10y - xz + 10(x - x_1).$$

$$U = x_1 z_1 + 10y_1 - 37x_1 + 129.84x - 40y - 2xz + 10(x - x_1).$$

与上述类似的仿真结果见图 2, 此时除追踪误差外的各输出信号取值范围均为 $[-20, 20]$.

仿真结果见图 3, 这里除追踪误差以外的各输出信号的取值范围均为 $[-50, 50]$.

4.4. 追踪异结构混沌系统的输出信号

$$r(t) = x(t).$$

控制器为

$$U = x_1 z_1 + 10y_1 - 37x_1 + 10(x - x_1) - \frac{x + 1.2y + z + x(x - 5.7) + 0.2}{10}.$$

取 Rössler 混沌系统

$$\dot{x} = -(y + z),$$

$$\dot{y} = x + 0.2y,$$

$$\dot{z} = z(x - 5.7) + 0.2.$$

仿真结果见图 4, 这里信号的取值范围均为 $[-20, 20]$.

设参考信号

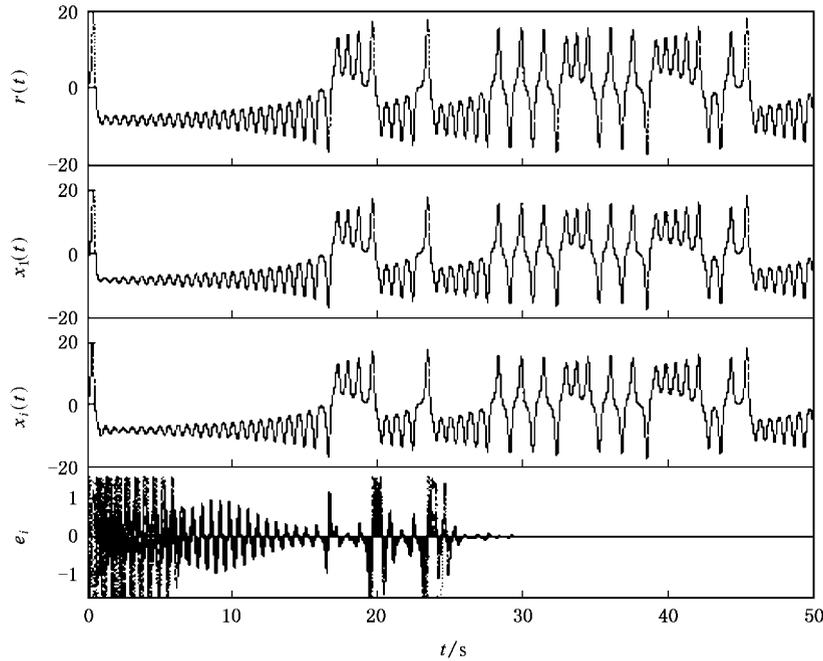


图 2 $k=3$ 时参考信号 $r(t)$ 输出信号 $x_i(t)$ 误差信号 e_i 的仿真结果

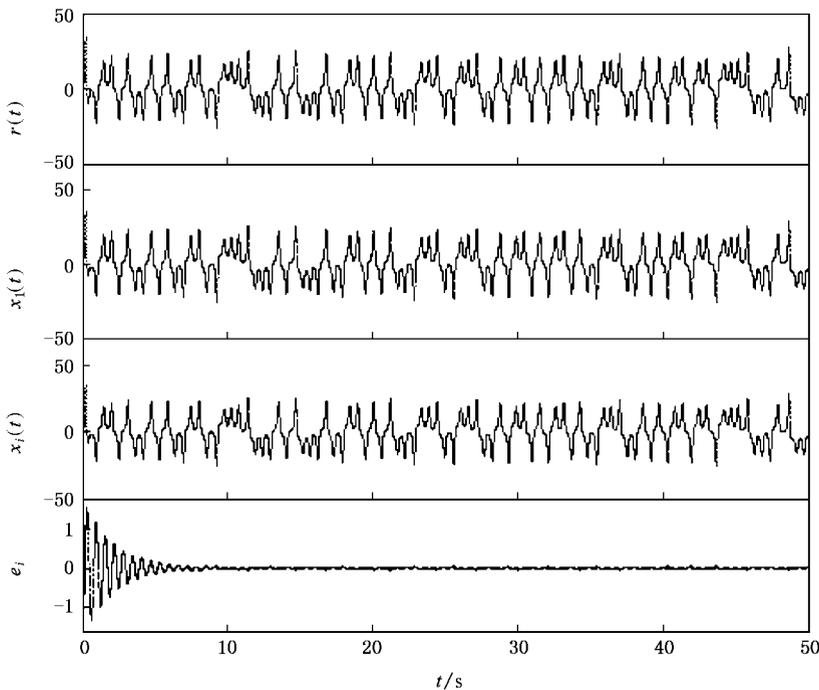


图 3 $k=4000$ 时参考信号 $r(t)$ 输出信号 $x_i(t)$ 误差信号 e_i 的仿真结果



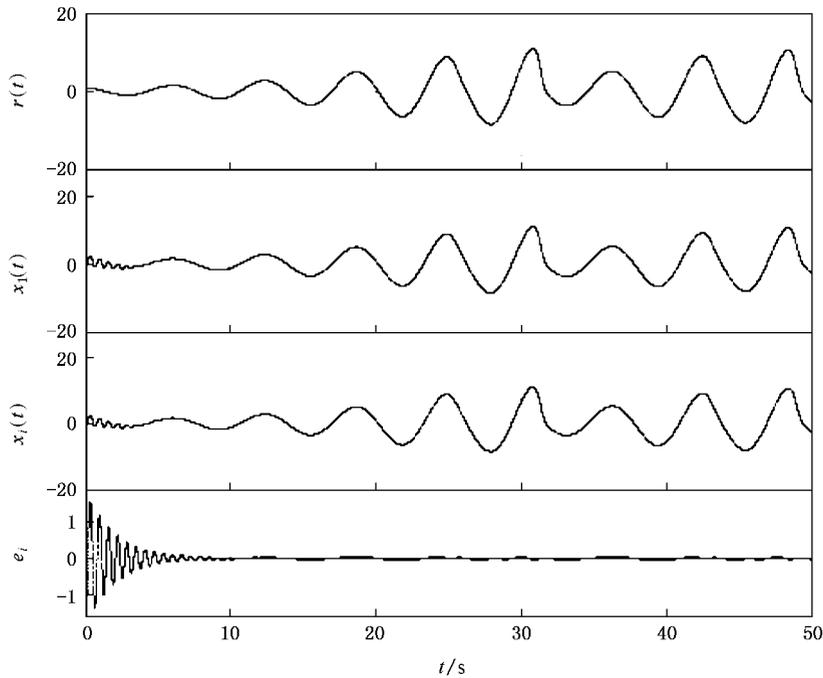


图 4 $k = 2000$ 时参考信号 $r(t)$ 输出信号 $x_i(t)$ 误差信号 e_i 的仿真结果

5. 结 论

本文将适用于单个 Lorenz 系统的一种追踪控制方案应用到一种特殊形式的动态网络系统,这种应用是成功有效的.我们只对网络系统的一个节点加入了控制器,其他节点通过耦合相互作用来校正自

己的状态.在这个追踪控制过程中,并不增加耦合的节点数,只是增加了原有耦合节点的耦合强度,即达到了整个网络的追踪控制目的.

当然,本文研究的问题有一定的局限性,具有一般形式的复杂动态网络的控制及追踪问题将是我們下一步研究的方向.

- [1] Ott E , Grebogi C , York J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [3] Chen G , Dong X 1998 *From Chaos to Order : Methodologies , Perspectives and Applications* (Singapore : World Scientific) Chap 1
- [4] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaotic Control , Synchronization and Utilizing* (Beijing : National Defence Industry Press) Chap 6 (in Chinese) [王光瑞、于熙岭、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与应用(北京:国防工业出版社)第6章]
- [5] Guan X P , Fan Z P , Chen C L , Hua C C 2002 *Chaotic Control and Its Application on Secure Communication* (Beijing : National Defence Industry Press) Chap 4 (in Chinese) [关新平、范正平、陈彩莲、华长春 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北京:国防工业出版社)第4章]
- [6] Chen S H , Xie J , Lu J A , Liu J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 749 (in Chinese) [陈士华、谢进、陆君安、刘杰 2002 物理学报 **51** 749]
- [7] Wu W G , Gu T X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1922 (in Chinese) [伍维根、古天祥 2000 物理学报 **49** 1922]
- [8] Li G H , Xu D M , Zhou S P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 181 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2003 物理学报 **52** 181]
- [9] Li Z , Chen G R , Shi S J , Han C Z 2003 *Phys. Lett. A* **310** 40
- [10] Liao G H , Weng J Q , Chen L C , Fang J Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 35 (in Chinese) [廖高华、翁甲强、成丽春、方锦清 2005 物理学报 **54** 35]
- [11] Li J F , Lin H , Li N 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3992 (in Chinese) [李建芬、林辉、李农 2006 物理学报 **55** 3992]
- [12] Lü J H , Yu X H , Chen G R 2004 *Physica A* **334** 281

Tracking control of Lorenz systems in unidirectional coupling network^{*}

Zhang Rong^{1,2)†} Hu Ai-Hua¹⁾ Xu Zhen-Yuan¹⁾

¹ *School of Science, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China*

² *School of Information Technology, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China*

(Received 20 December 2006 ; revised manuscript received 8 May 2007)

Abstract

Based on Lyapunov stability theory, a tracking control scheme for single Lorenz system is used to the tracking control of Lorenz systems in unidirectional coupling network. A controller put on one node of this network suffices to realized tracking of some output signals of this network to approach to any desired orbit. Computer simulation shows that tracking controls can be realized even for different chaotic systems as long as the unidirectional coupling strength is large enough.

Keywords : Lorenz chaotic system, complex dynamical network, tracking control, unidirectional coupling

PACC : 0545, 0555

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372054).

[†] E-mail : zhr89@163.com