第 56 卷 第 12 期 2007 年 12 月
1000-3290/2007/56(12)/7355-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.12, December, 2007

正则黑洞熵与相变*

赵 仁[1)2)†] 张丽春[1)] 张胜利[2)]

1)(山西大同大学物理系,大同 037009)

2)(西安交通大学应用物理系,西安 710049)

(2007 年 3 月 18 日收到;2007 年 5 月 28 日收到修改稿)

应用隧道效应对黑洞 Hawking 辐射研究得到的辐射谱,对非旋转黑洞的正则熵进行讨论.所得熵遵守 Bekenstein-Hawking 面积定律,并带有修正项,主要修正项与面积的对数成正比,另有与黑洞热容量有关的修正项.利用所给出的正则熵,对黑洞的相变进行讨论,得到当黑洞的热容量出现发散时,正则熵在该处并不出现复数,由此认为此相变为二级相变.

关键词:正则系综,量子修正,黑洞相变

PACC:9530,9760L

1. 引 言

黑洞具有与事件视界面积成正比的 Bekenstein-Hawking (B-H)熵[1—3],且标准 B-H 熵公式为

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4}, \tag{1}$$

式中 A 为黑洞事件视界面积.(1)式给出的熵,是将黑洞的各参量与普通热力学量进行比较后得出的.普通热力学系统是可以用统计力学描述的,黑洞作为一个热力学系统,人们当然对它的统计力学背景感兴趣,尤其是对黑洞熵的统计起源的研究引起了人们的高度关注.首先从普通的统计力学得知,任何宏观的熵,都有微观的统计解释,它是一个衡量系统微观自由度的量.但是怎样从统计物理学的角度来理解黑洞熵产生的根源,已不是弯曲时空量子场论这门半经典的学科所能做到的.因为在这样的范围内,只有物质场是量子化的,而时空背景却依然是经典的.理解黑洞的熵,必须进一步理解时空本身的微观自由度,而这正是量子引力解决的一个中心问题.

近年来,弦理论和单圈量子引力理论对黑洞 B-H定律的统计解释都很成功[4].对这两种理论,哪一种更完美?哪一种更能反映事物的客观规律?目前尚未定论.

在普通的统计力学中,微正则熵既可以定义为系统微观状态的对数,也可以表达为态密度的对数.很多研究者分别利用不同的定义和方法对黑洞的修正值进行了计算,得到黑洞熵的对数修正项[5—23].最近人们对 AdS 黑洞相变很感兴趣[19,24—27].文献[18]在文献[6]的基础上,通过讨论黑洞熵的修正,进一步研究了黑洞相变,得到在黑洞热容量的发散点,黑洞熵的对数修正项出现虚数,由此可知此点为一级相变点.

目前人们对黑洞熵修正进行的讨论,均是建立在将黑洞看作是普通热力学系统的基础上[6].2000 年 Parikh 和 Wilczek 对 Hawking 辐射进行了重新研究[28],认为 Hawking 辐射是一种量子隧道效应,而势垒则是由辐射粒子本身的自引力相互作用所产生的.由此他们计算了 Schwarzschild 和 Reissner-Nordstrom 黑洞等,并得到了相应的辐射修正谱.特别是他们的结果与量子力学中的幺正性原理是一致的,支持了 Hawking 辐射中的信息守恒[29,30].此后,Parikh 的原始工作被推广到许多其他静态和稳态时空[31—47],得到任意黑洞辐射粒子的能量谱为[48]

$$\rho_s \propto \exp(\Delta S). \tag{2}$$

这里

$$\begin{aligned}\Delta S &= S_{\mathrm{MC}}(E - E_s) - S_{\mathrm{MC}}(E)\\ &= \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k S_{\mathrm{MC}}(E_{\mathrm{b}})}{\partial E_{\mathrm{b}}^k}\right)_{E_s=0}(-E_s)^k\end{aligned}$$

* 山西省自然科学基金(批准号 2006011012)资助的课题.

† E-mall:zhao2969@sina.com

$$= -\beta E_s + \beta_2 E_s^2 + \cdots, \tag{3}$$

式中 $E_b = E - E_s$，β 是 Hawking 辐射温度的倒数，E_s 是辐射粒子的能量，$S_{MC}(E)$是能量为 E 的微正则系综熵，

$$\beta_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k \ln\Omega}{\partial E_b}\right)_{E_s=0} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k S_{MC}}{\partial E_b}\right)_{E_s=0}. \tag{4}$$

本文应用隧道效应得出的黑洞辐射粒子能量谱(2)式，计算黑洞熵的修正项. 在计算系统的配分函数时，我们与 Majumdar[6,18] 的计算方法不同. Majumdar 等在计算配分函数的积分时，采用的是鞍点近似(saddle-point approximation)计算，而我们应用是概率积分. 利用配分函数与熵的关系得到黑洞正则熵的修正项中，不但有人们普遍接受的视界面积对数项，而且还有与黑洞热容量有关项. 而在讨论黑洞相变时，与热容量有关的对数项起到非常重要的作用，即将黑洞看作普通热力学系统时，用它来判断 AdS 黑洞发生的是一级相变还是二级相变.

2. 黑洞正则熵

将黑洞看作普通热力学系统，则由(2)式可得系统的配分函数

$$Z(\beta) = \sum_s \rho_s. \tag{5}$$

正则分布的半经典配分函数可表示为

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \exp(\Delta S)\,\mathrm{d}E\rho(E), \tag{6}$$

式中 $\rho(E)$是态密度. 由文献[12]知，

$$\rho(E) \equiv \exp(S_{MC}(E)).$$

由(3)式知，当黑洞辐射粒子的能量为 E_s 时，黑洞能量为

$$E_b = E - E_s.$$

所以，黑洞能量为 E_b 时，对应的态密度为 $\rho(E - E_s)$. 因而

$$\rho(E - E_s) = \exp[S_{MC}(E - E_s)]. \tag{7}$$

将微正则熵在能量为 E 附近作泰勒展开，

$$S_{MC}(E - E_s) = S_{MC}(E) - \beta E_s + \beta_2 E_s^2 + \cdots, \tag{8}$$

忽略高阶项后，(6)式可写为

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \exp(-\beta E_s + \beta_2 E_s^2)\,\mathrm{d}E_s \exp(S_{MC}(E - E_s))$$

$$= \exp(S_{MC}(E))\int_0^\infty \exp(-2\beta E_s + 2\beta_2 E_s^2)\,\mathrm{d}E_s$$

$$= \exp(S_{MC}(E))\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-2\beta_2}}\exp\left(\frac{\beta^2}{-2\beta_2}\right)\times\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\beta}{\sqrt{-2\beta_2}}\right)\right)\right]. \tag{9}$$

这里

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$$

是概率积分(或误差函数).

利用配分函数与熵的关系

$$S = \ln Z - \beta\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \tag{10}$$

我们可得正则系统的熵为

$$S(E) = S_{MC}(E) + \Delta, \tag{11}$$

式中

$$\Delta = \ln f(\beta) - \beta\frac{\partial \ln f(\beta)}{\partial\beta}, \tag{12}$$

$$f(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-2\beta_2}}\exp\left(\frac{\beta^2}{-2\beta_2}\right)\times\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\beta}{\sqrt{-2\beta_2}}\right)\right]. \tag{13}$$

由概率积分的渐近表达式

$$\mathrm{erf}(z) = 1 - \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{\pi}z}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2z^2)^k}\right]\quad(|z|\to\infty),$$

可得

$$f(\beta) = \frac{1}{2\beta}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k}\left(\frac{\sqrt{-2\beta_2}}{\beta}\right)^{2k}\right]. \tag{14}$$

将(14)式代入(12)式可得

$$\Delta = \ln\left[\frac{1}{2\beta} + \sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k 2\beta}\left(\frac{\sqrt{-2\beta_2}}{\beta}\right)^{2k}\right] + \frac{1 + \sum_{k=1}^\infty(-1)^k(2\sqrt{-2\beta_2})^{2k}\frac{(2k+1)(2k-1)!!}{2^k(2\beta)^{2k}}}{1 + \sum_{k=1}^\infty(-1)^k(2\sqrt{-2\beta_2})^{2k}\frac{(2k-1)!!}{2^k(2\beta)^{2k}}}. \tag{15}$$

这里

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{C}, \tag{16}$$

其中 C 是系统的热容量

$$C \equiv -\beta^2\left(\frac{\partial E}{\partial\beta}\right). \tag{17}$$

因而(15)式可表示为

$$\Delta = \ln\left[T + T\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k C^k}\right] + \frac{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k+1)(2k-1)!!}{2^k C^k}}{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k C^k}}, \quad (18)$$

式中 T 是系统的温度.

3. AdS 黑洞的相变

黑洞的热容量[16]

$$C(A) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T} = \frac{\frac{\mathrm{d}M(A)}{\mathrm{d}A}}{\frac{\mathrm{d}T(A)}{\mathrm{d}A}} = \frac{M'(A)}{T'(A)}, \quad (19)$$

式中 A 是黑洞视界面积,M 是能量.将(17)式代入(19)式可得

$$C(A) = \left[\frac{M'(A)}{T(A)}\right]^2 \frac{M'(A)}{S'_{\mathrm{MC}}(A)M''(A) - S''_{\mathrm{MC}}(A)M'(A)}. \quad (20)$$

显然,当

$$S'_{\mathrm{MC}}(A_{\mathrm{c}})M''(A_{\mathrm{c}}) = S''_{\mathrm{MC}}(A_{\mathrm{c}})M'(A_{\mathrm{c}})$$

时,$C(A_{\mathrm{c}}) \to \infty$,而由(18)式知,黑洞的正则熵在 $C(A_{\mathrm{c}})$ 点连续.

对于 d 维 AdS 黑洞,质量与面积的关系为

$$M(A) = \frac{(d-2)A}{16\pi}\left[\left(\frac{\Omega_{d-2}}{A}\right)^{\frac{1}{d-2}} + \frac{1}{l^2}\left(\frac{A}{\Omega_{d-2}}\right)^{\frac{1}{d-2}}\right], \quad (21)$$

热容量

$$C(A) = \frac{A}{4}\left[(d-2)\frac{(d-1)\frac{1}{l^2}\left(\frac{A}{\Omega_{d-2}}\right)^{\frac{2}{d-2}} + (d-3)}{(d-1)\frac{1}{l^2}\left(\frac{A}{\Omega_{d-2}}\right)^{\frac{2}{d-2}} - (d-3)}\right], \quad (22)$$

临界面积

$$A_{\mathrm{c}} = \Omega_{d-2}\left(\frac{(d-3)l^2}{d-1}\right)^{\frac{d-2}{2}}. \quad (23)$$

由(22)式知,当黑洞的视界面积

$$A > \Omega_{d-2}\left(\frac{(d-3)l^2}{d-1}\right)^{\frac{d-2}{2}} \quad (24)$$

时,热容量为正,满足热稳定条件.而当 $A < A_{\mathrm{c}}$ 时,黑洞热容量为负,不满足热稳定条件.所以,临界点是黑洞热容量的转换点,也是黑洞从稳态到非稳态的转换点.而在此临界点,黑洞的热容量发散.由黑洞的温度内能和正则熵在临界点的连续性可知,此相变是连续相变,并且是二级相变.

4. 结　论

以前人们对黑洞熵的研究是建立在 Hawking 证明黑洞具有热辐射且辐射谱为纯热谱的基础上的,然而 Hawking 辐射是在时空背景不变的前提下得到的纯热谱.在讨论此辐射过程中有明显的争议之处是信息丢失,黑洞信息丢失意味着纯量子态将衰变成混合态,这就违背了量子力学的幺正性原理.而当应用隧道效应方法研究黑洞辐射时,考虑能量守恒和视界发生改变,黑洞的辐射谱已不再是严格的纯热谱.此种方法克服了 Hawking 辐射缺陷,指出正是由于自引力作用提供了量子隧道的势垒.

本文应用黑洞量子隧道方法得出的辐射谱计算配分函数.在计算中我们采用概率积分方法,然后利用普通热力学系统配分函数与熵的关系,得到黑洞正则熵的表达式.由所得正则熵和黑洞的热容量对黑洞的相变进行讨论,得到对于 AdS 黑洞在临界点产生的相变是二级相变的结果.所得结论与文献[24]的结论一致.

---

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2333

[2] Bekenstein J D 1974 *Phys. Rev.* D **9** 3292

[3] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30

[4] Medved A J M, Vagenas E C 2004 *Phys. Rev.* D **70** 124021

[5] Ashtekar A, Baez J, Krasnov K 2000 *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** 1

[6] Chatterjee A, Majumdar P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 141301

[7] Kaul R K, Majumdar P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5255

[8] Camellia G A, Arzano M, Procaccini A 2004 *Phys. Rev.* D **70** 107501

[9] Chatterjee A, Majumdar P 2005 *Phys. Rev.* D **71** 024003

[10] Myung Y S 2004 *Phys. Lett.* B **579** 205

[11] Akbar M M, Das S 2004 *Class. Quant. Grav.* **21** 1383

[12] Das S, Majumdar P, Bhaduri R K 2002 *Class. Quant. Grav.* **19** 2355

[13] Camelia G A, Arzano M, Procaccini A 2004 *Phys. Rev.* D **70**

107501
[14] Rovelli C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3288
[15] Ashtekar A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 904
[16] Chatterjee A, Majumdar P 2005 *Phys. Rev.* D **72** 044005
[17] Chatterjee A, Majumdar P 2004 *Pramana* **63** 851
[18] Majumdar P 2007 *Class. Quantum Grav.* **24** 1747
[19] Zhao R, Zhang S L 2006 *Phys. Lett.* B **641** 318
[20] Zhang L C, Wu Y Q, Li H F 2006 *Il Nuovo Cimento* B **121** 743
[21] Zhao R, Zhang S L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3719 (in Chinese) [赵 仁、张胜利 2007 物理学报 **56** 3719]
[22] Setare M R 2006 *Int. J. Mod. Phys.* A **21** 1325
[23] More S S 2005 *Class. Quant. Grav.* **22** 4129
[24] Shen J Y, Cai R G, Wang B, Su R K 2007 *Int. J. Mod. Phys.* A **22** 11
[25] Myung Y S, Kim Y W, Park Y J 2007 *Phys. Lett.* B **645** 393
[26] Elvang H, Emparan R, Gigueras P 2007 *J. High Energy Phys.* (05) 056
[27] Myung Y S 2007 *Phys. Lett.* B **645** 369
[28] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042
[29] Parikh M K 2004 *Gen. Rel. Grav.* **36** 2419
[30] Parikh M K 2002 *Phys. Lett.* B **546** 189
[31] Liu C Z, Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Phys. Lett.* B **639** 670
[32] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Phys. Lett.* B **638** 110
[33] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett.* B **618** 14
[34] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Nucl. Phys.* B **725** 173
[35] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *J. High Energy Phys.* (10) 055
[36] Li H L, Jiang Q Q, Yang S Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 539 (in Chinese) [李慧玲、蒋青权、杨树政 2006 物理学报 **55** 539]
[37] Jiang Q Q, Wu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4428 (in Chinese) [蒋青权、吴双清 2006 物理学报 **55** 4428]
[38] Han Y W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5018 (in Chinese) [韩亦文 2005 物理学报 **54** 5018]
[39] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3795 (in Chinese) [张靖仪、赵 峥 2006 物理学报 **55** 3795]
[40] Li H L, Yang S Z, Jiang Q Q, Qi D J 2006 *Phys. Lett.* B **641** 139
[41] Kerner R, Mann R B 2006 *Phys. Rev.* D **73** 104010
[42] Angheben M, Nadalini M, Vanzo L, Zerbini S 2005 *J. High Energy Phys.* (05) 014
[43] Arzano M, Medved A J M, Vagenas E C 2005 *J. High Energy Plys.* (05) 037
[44] Medved A J M, Vagenas E C 2005 *Mod. Phys. Lett.* A **20** 2449
[45] Medved A J M, Vagenas E C 2005 *Mod. Phys. Lett.* A **20** 1723
[46] Arzano M 2006 *Mod. Phys. Lett.* A **21** 41
[47] Wu X, Gao S 2007 *Phys. Rev.* D **75** 044027
[48] Zhao R, Zhang L C, Hu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3898 (in Chinese) [赵 仁、张丽春、胡双启 2006 物理学报 **55** 3898]

Canonical entropy and phase transition of black hole *

Zhao Ren[1)2)†] Zhang Li-Chun[1)] Zhang Sheng-Li[2)]

1) (*Department of Physics, Shanxi Datong University, Datong* 037009, *China*)

2) (*Department of Applied Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049, *China*)

(Received 18 March 2007; revised manuscript received 28 May 2007)

Abstract

By applying the radiation spectrum obtained from tunnel effect, we obtain the normal canonical entropy of black hole by discussing the entropy of non-rotation black hole. The entropy satisfies the Bekenstein-Hawking area law, and contains the terms of correction whose main terms are proportional to the logarithm of the area, and the rest of the correction terms are related to the thermal capacity of black hole. With the help of the obtained normal canonical entropy, we studied the phase transition and showed that when the thermal capacity is emanative, there are no plural numbers at this point in the normal canonical entropy, which shows that the phase transition is of the second order.

Keywords: canonical ensemble, quantum correction, phase transition of black hole

PACC: 9530, 9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2006011012).

† E-mall: zhao2969@sina.com