

(2 + 1) 维 Boiti-Leon-Pempinelli 系统的混沌行为 及孤子间的相互作用*

马松华[†] 强继业 方建平

(浙江丽水学院物理系, 丽水 323000)

(2006 年 4 月 18 日收到 2006 年 7 月 8 日收到修改稿)

利用改进的变系数的 Riccati 方程映射法, 得到了 (2 + 1) 维 Boiti-Leon-Pempinelli 系统 (BLP) 的新显式精确解. 根据得到的解, 研究了 BLP 系统的混沌行为及孤子间的相互作用.

关键词: 改进的映射法, Boiti-Leon-Pempinelli 系统, 混沌行为, 相互作用

PACC: 0230, 0340, 0290

1. 引 言

混沌和孤立子是非线性科学中最重要的两个方面, 在物理学的众多领域中, 如流体力学, 非线性光学, 凝聚态物理等^[1-3], 现代孤子理论扮演了重要角色, 得到了广泛应用, 其中高维孤子系统的局域结构理论, 已引起了相关学者的极大关注. (1 + 1) 维孤子和孤波解在理论和实验方面都已得到广泛深入的研究^[4], 在 (2 + 1) 维的情况下, 许多有实际物理意义的可积模型也已在非线性物理中建立^[5-8]. (2 + 1) 维的非线性演化方程通常有着更为丰富的解, 而且从对称研究中发现 (2 + 1) 维可积模型的对称结构也远比 (1 + 1) 维可积模型丰富. 一些特殊类型的局域解, 已在许多 (2 + 1) 维可积模型中用不同的方法得到. 尤其是由 Boiti 等人^[9]首先提出的 dromion 解, 由平面孤子在其附属域上行进相互作用形成, 在所有方向上都呈指数衰减, 引起了人们的极大关注. 近年来, 随着人们对非线性理论研究的不断深入, 许多求解非线性方程的新方法也被提出, 如双线性法^[10-13]、齐次平衡法^[14]、标准的 Painlevé 截断分析法^[15, 16]、波数合并法^[17, 18]和映射法^[19]等. 前不久, Zhang 和 Fang 等人提出了拓展的 Riccati 方程映射法, 并被成功的应用于许多 (2 + 1) 维模型中^[20, 21].

2. (2 + 1) 维 BLP 系统的孤波解、周期波解和变量分离解

本文的工作是将改进的变系数的 Riccati 方程映射法运用到著名的 (2 + 1) 维 Boiti-Leon-Pempinelli (BLP) 方程

$$\begin{aligned} u_{ty} &= (u^2 - u_x)_{xy} + 2v_{xx}, \\ v_t &= v_{xx} + 2uv_x, \end{aligned} \quad (1)$$

并进一步研究其混沌现象及孤子间的相互作用. 文献 [20] 运用影射法得到了 BLP 系统的一些特殊的精确解. 文献 [22] 已证明了 BLP 系统的可积性, 文中还证明了通过适当的变换, BLP 系统可以从著名的 sin-Gordon 方程或 sinh-Gordon 方程导出. 这些方程出现在数学物理的许多分支^[23], 并被广泛地应用于原子物理、分子物理、粒子物理和浅水波模型等实际问题中^[24, 25].

改进的变系数的 Riccati 方程映射法的基本思想是对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$\begin{aligned} u &= A(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \phi^i(q(x)) \\ &\quad + C_i(x) \phi^{i-1}(q(x)) \sqrt{\sigma + \phi^2(q(x))} \end{aligned}$$

* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y604106) 和浙江丽水学院重点扶持项目 (批准号: FC06001, QN06009) 资助的课题.

[†] E-mail: msjh6209@yahoo.com.cn

$$+ \frac{D_i(x)}{\phi^{i-1}(q(x))\sqrt{\sigma + \phi^2(q(x))}}, \quad (3)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma + \phi^2, \quad (4)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m), A(x), B_i(x), C_i(x), D_i$ 和 $q(x)$ 为待定的 x 的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组 $A(x), B_i(x), C_i(x), D_i$ 和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A(x), B_i(x), C_i(x), D_i$ 和 $q(x)$, 再根据 Riccati 方程解

1) 孤波解

$$\begin{aligned} \phi &= -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma} q), \\ \phi &= -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma} q), \sigma < 0, \end{aligned}$$

2) 周期波解

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma} q), \\ \phi &= -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma} q), \sigma > 0, \end{aligned}$$

3) 变量分离解

$$\phi = \frac{-1}{q}, \sigma = 0, \quad (5)$$

就可以确定所求方程的解.

为了寻找 BLP 系统的新解, 我们将改进的变系数的 Riccati 方程映射法用于 (1) 式, 并根据 (3) 式, 设解为

$$\begin{aligned} u &= f + g\phi(q) + h\sqrt{\sigma + \phi^2} + \frac{A}{\sqrt{\sigma + \phi^2}}, \\ v &= F + G\phi(q) + H\sqrt{\sigma + \phi^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{B}{\sqrt{\sigma + \phi^2}}, \quad (6)$$

这里 f, g, h, F, G, H, A, B 和 q 是 (x, y, t) 的任意函数. 将 (6) 式和 (4) 式代入 (1) 式, 并按 ϕ 的同次幂合并, 提取 $\phi^i (i = 1, 2, \dots)$ 前的系数, 其中包含 $\sqrt{\sigma + \phi^2}$ 项, 设 $K = \sqrt{\sigma + \phi^2}$, 提取 K , 令 K 前的系数等于零, 令不含 K 的系数的代数和也等于零, 得到一系列方程, 由这些方程可求得

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \frac{q_t - q_{xx}}{q_x}, \\ g &= -\frac{1}{2} q_x, \\ h &= -\frac{1}{2} q_x, \\ F &= \frac{1}{2} \frac{q_{yt} - q_{xy}}{q_x}, \\ G &= -\frac{1}{2} q_y, \\ H &= -\frac{1}{2} q_y, \\ A &= -\frac{q_{xy}q_t + q_{xy}q_x\sigma}{q_x^2q_y}, \\ B &= \frac{1}{2} \frac{q_{yt}q_x - q_{xy}q_{xt}\sigma}{q_x^2q_y}. \end{aligned} \quad (7)$$

从所得到的方程中, 我们发现有如下形式的特解:

$$q = \chi(x, t) + \varphi(y), \quad (8)$$

其中 $\chi = \chi(x, t), \varphi = \varphi(y)$ 是关于 x, t 和 y 的任意函数.

情形 1. 设 $\sigma = -1$, 可以得到 BLP 系统的孤波解

$$u_1 = \frac{1}{2} \frac{-\chi_{xx} + \chi_t + \chi_x^2(\tanh(\chi + \varphi) - \operatorname{isech}(\chi + \varphi))}{\chi_x}, \quad (9)$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \varphi_y(\tanh(\chi + \varphi) - \operatorname{isech}(\chi + \varphi)), \quad (10)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \frac{-\chi_{xx} + \chi_t + \chi_x^2(\coth(\chi + \varphi) - \operatorname{csch}(\chi + \varphi))}{\chi_x}, \quad (11)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \varphi_y(\cosh(\chi + \varphi) - \operatorname{csch}(\chi + \varphi)), \quad (12)$$

其中 $\chi(x, t), \varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

情形 2. 设 $\sigma = 1$, 可以得到 BLP 系统的周期波解

$$u_3 = \frac{1}{2} \frac{-\chi_{xx} + \chi_t - \chi_x^2(\tan(\chi + \varphi) + \operatorname{sec}(\chi + \varphi))}{\chi_x}, \quad (13)$$

$$v_3 = -\frac{1}{2} \varphi_y(\tan(\chi + \varphi) + \operatorname{sec}(\chi + \varphi)), \quad (14)$$

$$u_4 = \frac{1 - \chi_{xx} + \chi_t + \chi_x^2(\operatorname{cof}(\chi + \varphi) - \operatorname{csd}(\chi + \varphi))}{2\chi_x}, \tag{15}$$

$$v_4 = \frac{1}{2}\varphi_y(\operatorname{cof}(\chi + \varphi) - \operatorname{csd}(\chi + \varphi)), \tag{16}$$

其中 $\chi(x, t), \varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

情形 3. 设 $\sigma = 0$, 可以得到 BLP 系统的变量分离解

$$u_5 = \frac{1}{2} \frac{\chi_t - \chi_{xx}}{\chi_x} + \frac{\chi_x}{\chi + \varphi}, \tag{17}$$

$$v_5 = \frac{\varphi_y}{(\chi + \varphi)}, \tag{18}$$

其中 $\chi(x, t), \varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

3. (2 + 1) 维 BLP 方程的势函数的 dromion 孤子结构和混沌行为

由于(9)–(18)式中都包含有任意函数 χ 和 φ , 使得系统的解变的相当丰富. 如设 $\chi = kx + ct, \varphi = ly$ 所有上述解则转化为行波解, 同时我们注意到(17)和(18)式的势函数 $U = u_y = v_x$,

$$U = -\frac{x_x \varphi_y}{(\chi + \varphi)^2}. \tag{19}$$

经过简单的变换就可转化为变量分离法的一般式^[22].

本文则是以式(11)和(12)为例, 讨论其势函数

$$U = u_{2y} = v_{2x} = \frac{1}{2} \frac{\chi_x \varphi_y}{\cosh(\chi + \varphi) + 1} \tag{20}$$

的孤子结构和混沌行为.

3.1. BLP 方程的 dromion 孤子结构

由于式(20)中的 χ 和 φ 的任意性, 取 χ 和 φ 为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi &= 1 + \operatorname{sech}(x + ct), \\ \varphi &= 1 + \operatorname{sech}(y), \end{aligned} \tag{21}$$

于是可以得到一个 dromion 孤子结构, 如图 1 所示 (取 $t = 2, c = 1, \sigma = -1$).

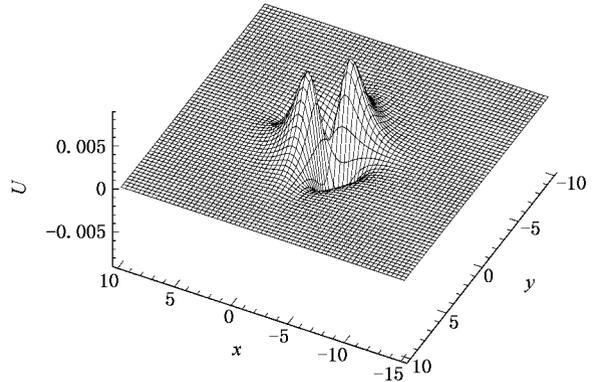


图 1 (20)式利用(21)式得到的 dromion 孤子(取 $t = 2, c = 1, \sigma = -1$)

3.2. 化学动力学混沌系统和 BLP 系统的混沌行为

(20)式中的任意函数不仅能够构建出系统的丰富局域结构, 还能够揭示系统的混沌行为, 以下利用化学动力学混沌系统来研究(2+1)维 BLP 系统的混沌现象.

化学动力学混沌系统的具体表示式为

$$\begin{aligned} m_\xi &= m(A_1 - k_1 - n - l) + k_2 n^2 + A_3, \\ n_\xi &= n(m - k_2 n - A_5) + A_2, \\ l_\xi &= l(A_4 - m - k_3 l) + A_3, \end{aligned} \tag{22}$$

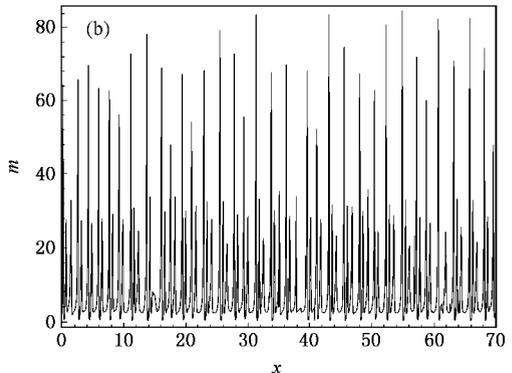
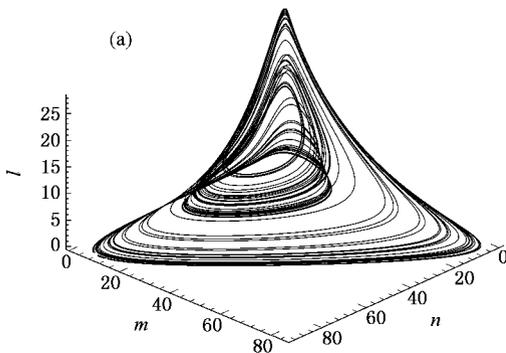


图 2 (a) (22)式利用(23)式得到的化学动力学混沌系统的解 (b) 根据(a)图描绘的混沌解 m 随 x 的变化图形

这里 m, n 和 l 是 ξ 的函数 ($\xi = x + kt$ 或 $\xi = y$) , 图 2 描绘了一个典型的化学动力学混沌系统的解 , 具体参数为

$$\begin{aligned} A_1 &= 30, A_2 = A_3 = 0.01, \\ A_4 &= 16.5, A_5 = 10, \\ k_1 &= 0.25, k_2 = 0.001, k_3 = 0.5, \\ m(0) &= 1, n(0) = 1, l(0) = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

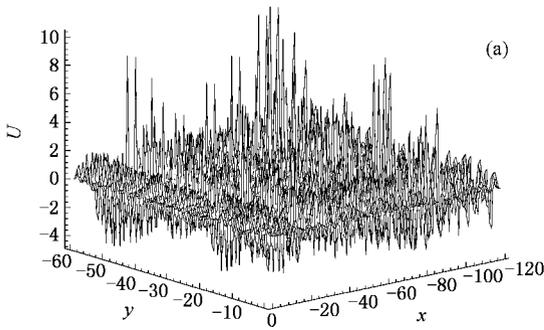
在 (20) 式中 , 利用化学动力学混沌系统 , 取任意函数为如下形式 :

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + m(x + kt), \\ \varphi(y) &= 1 + \exp(y), \end{aligned} \quad (24)$$

于是 , 可以得到如图 3 所示的混沌线孤子 (取 $t = 2, k = 1, \sigma = -1$) . 从图 3 可以看到 , 虽然在 y 方向还是局域的 , 而在 x 方向 , 函数 U 的图像中的波峰、形状都已呈现混沌行为 .

此外 , 如果利用化学动力学混沌系统 , 取任意函数为如下形式 :

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + m(x + kt), \\ \varphi(y) &= 1 + m(y), \end{aligned} \quad (25)$$



可以得到如图 4(a) 所示的混沌解 (取 $t = 0, \sigma = -1$) . 从图 4(a) 可以看到 , 函数 U 不论在 x 方向还是 y 方向都呈现混沌行为 . 为了说明图 4(a) 所示的混沌图像是大量孤子的峰值所为 , 将图 4(a) 中的中心微小部位进行放大 , 如图 4(b) 所示 . 从图中清楚的看出这是 dromion 孤子结构 .

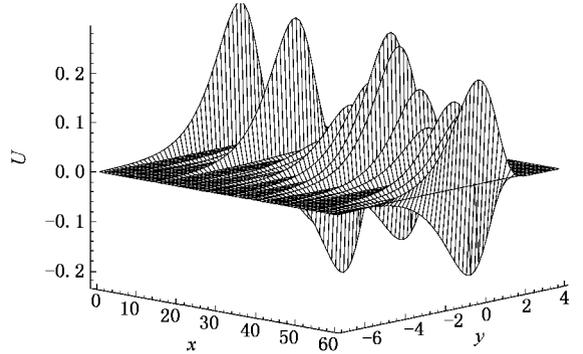


图 3 (20) 式利用 (24) 式得到的混沌线孤子 (取 $t = 2, k = 1, \sigma = -1$)

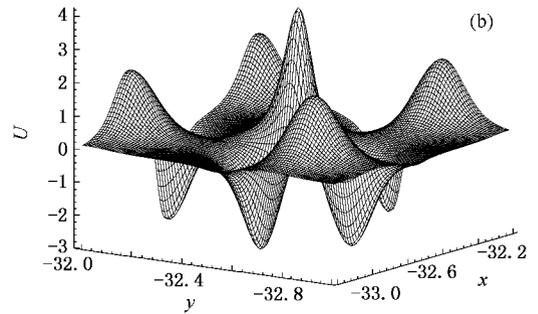


图 4 (a) (20) 式利用 (25) 式得到的混沌解 (取 $t = 0, \sigma = -1$) (b) (a) 图中中心微小部位的放大图象

4. 孤子间的相互作用

由于 (20) 式的 χ 和 φ 的任意性 , 取 χ, φ 为如下形式 :

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + \operatorname{sech}(x + t) + 2\operatorname{sech}(x - t), \\ \varphi(y) &= 1 + \operatorname{sech}(y), \end{aligned} \quad (26)$$

于是可以得到两个 dromion 孤子的相互作用情况 ,

(如图 5 所示) , 通过分析发现 , 两个孤子作用前后相位发生了改变 , 但是其振幅、波速以及形状都没有发生变化 , 是弹性作用 .

此外 , 如果取

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + 2\tanh(x + t) + \operatorname{sech}(x - t), \\ \varphi(y) &= 1 + \operatorname{sech}(y), \end{aligned} \quad (27)$$

则得到两个孤子间的非弹性相互作用 , 如图 6 所示 .

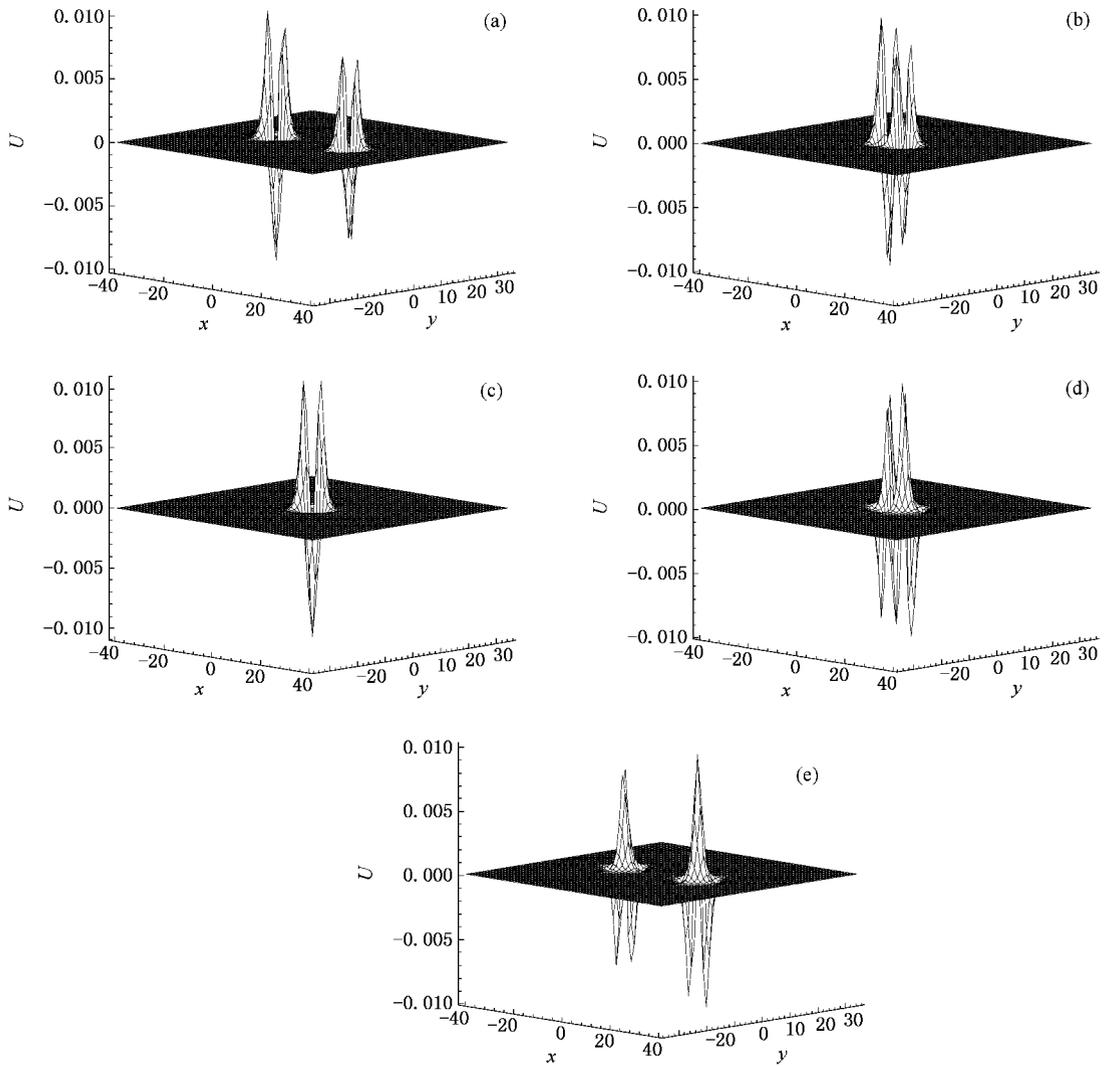


图 5 (20) 式利用 (26) 式得到的两孤子弹性作用的时间演化图 (时间分别为 (a) $t = -15$ (b) $t = -3$ (c) $t = 0$ (d) $t = 3$; (e) $t = 15$)

5. 结 论

寻找非线性方程的新的显式精确解是非线性科学的一个重要内容, 本文利用改进的变系数的 Riccati 方程映射法, 得到了 $(2+1)$ 维 BLP 系统的孤波解、周期波解和变量分离解, 并根据所得到的解, 利用化学动力学混沌系统研究了 $(2+1)$ 维 BLP 系统的混沌行为. 在研究混沌现象的过程中, 作者将混沌解(图 4(a))的中心部位放大观察, 清楚的看到混沌

行为是孤子的峰值所为. 在以往的著作中, 两孤子相互作用前后, 其相位都是不变的, 而在本文(图 5)中看到, 两孤子相互作用前后, 其相位发生了改变. 此外, 在 BLP 系统的孤波解(9)和(10)式中出现了虚数解, 据我们所知, 这在以往的著作中是很少出现的, 至于虚数解的物理意义, 有待于作进一步深入的研究.

作者对郑春龙教授的建议和指导表示感谢.

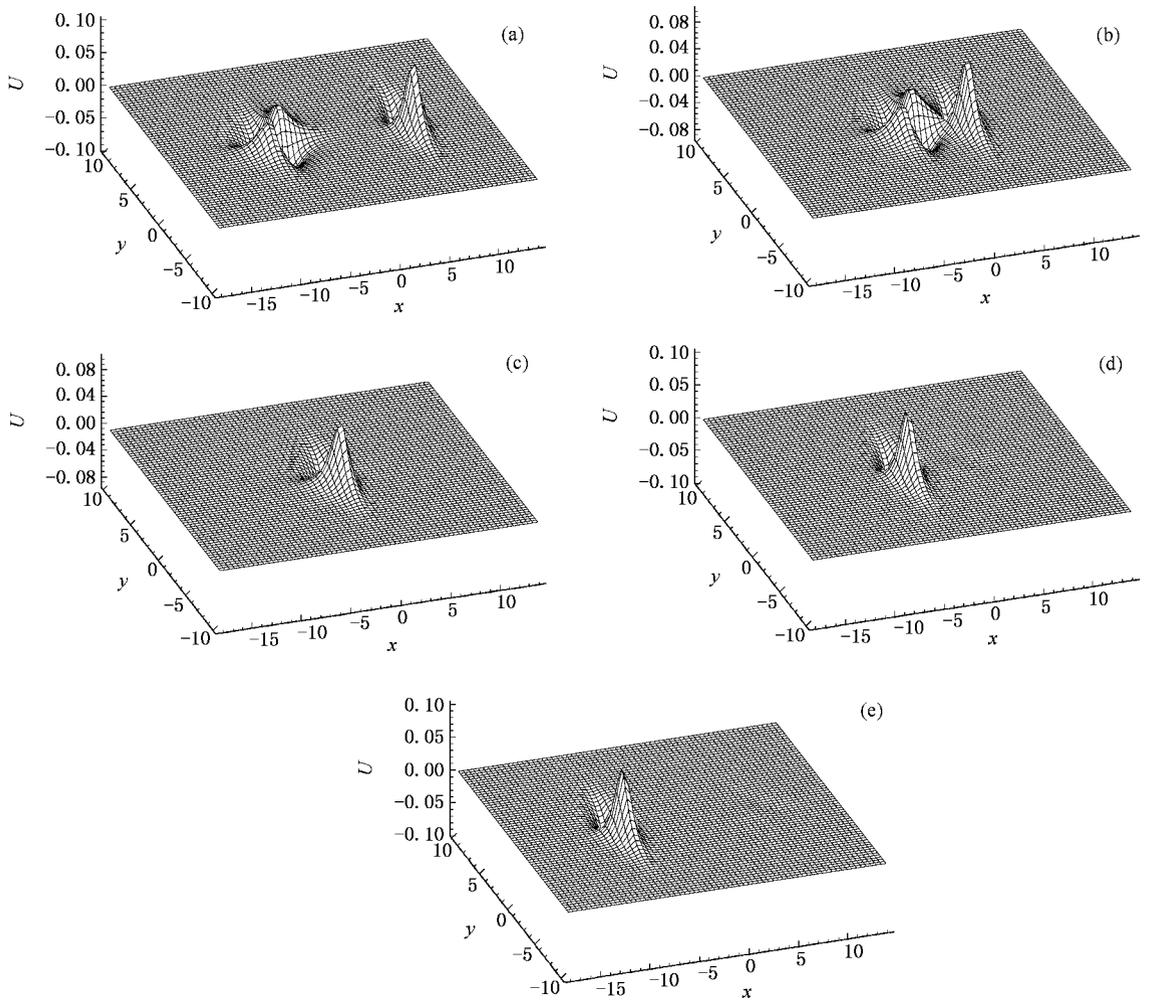


图 6 (20) 式利用(27)式得到的两孤子非弹性作用的时间演化图 (时间分别为(a) $t = -7$ (b) $t = -3$ (c) $t = 0$ (d) $t = 3$ (e) $t = 7$)

- [1] Camassa R , Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [2] Tang X Y , Lou S Y , Zhang Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046601
- [3] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
- [4] Kivshar Y S , Melonmend B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 765
- [5] Kadomtsev B B , Petviashvili V I 1970 *Sov. Phys. Dokl.* **15** 539
- [6] Davey A , Stewartson K 1974 *Proc. Roy. Soc.* **338** 17
- [7] Lou S Y 1997 *Commun. Theor. Phys.* **27** 249
- [8] Nizknik L P 1980 *Commun. Sov. Phys. Dokl.* **27** 249
- [9] Boiti M , Leon J J , Manna M , Pempinelli F 1988 *Phys. Lett. A* **132** 432
- [10] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett. A* **149** 113
- [11] Radha R , Lakshmanan M 1991 *Phys. Lett. A* **197** 7
- [12] Lou S Y 1995 *J. Phys. Math. Gen.* **A 28** 7227
- [13] Ruan H Y , Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123
- [14] Zhang J F , Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
- [15] Lou S Y 1996 *Commun. Theor. Phys.* **26** 487
- [16] Lou S Y , Tang X Y , Li J 2001 *Eur. Phys. J. B* **22** 473
- [17] Lai D W C , Chow K W 1999 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 1847
- [18] Lai D W C , Chow K W 2001 *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 666
- [19] Fang J P , Zheng C L , Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [20] Fang J P , Zheng C L , Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 [in Chinese] 方建平、郑青龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [21] Fang J P , Zheng C L 2005 *Chin. Phys. Soc.* **4** 670
- [22] Boiti M , Leon J J P , Pempinelli F 1987 *Inverse Problem.* **3** 293
- [23] Debin H 203 *Phys. Lett. A* **314** 51
- [24] Fokas A S 1995 *Phys. D* **87** 145
- [25] Matrasulov D U , Ataev S 2003 *J. Phys. A* **36** 10227
- [26] Zheng C L , Zhang J F 2003 *Chin. Phys.* **12** 0011

The interaction between solitons and chaotic behaviours of $(2 + 1)$ -dimensional Boiti-Leon-Pempinelli system^{*}

Ma Song-Hua[†] Qiang Ji-Ye Fang Jian-Ping

(Department of Physics , Zhejiang Lishui College , Lishui 323000 , China)

(Received 18 April 2006 ; revised manuscript received 8 July 2006)

Abstract

By an improved mapping approach , a series of excitations of the $(2 + 1)$ -dimensional Boiti-Leon-Pempinelli system (BLP) is derived. Based on the derived solitary wave excitation , we obtain some special chaotic solitons and the interaction between solitons .

Keywords : improved mapping approach , Boiti-Leon-Pempinelli system , chaotic solitons , the interaction between solitons

PACC : 0230 , 0340 , 0290

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province , China (Grant No. Y604106) and the Science Foundation of Zhejiang Lishui College , China (Grant Nos. FC06001 , QN06009).

[†] E-mail : msh6209@yahoo.com.cn