第 56 卷 第 2 期 2007 年 2 月
1000-3290/2007/56(02)/0637-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.2,February,2007
©2007 Chin.Phys.Soc.

具连续分布时滞的抛物型系统的指数镇定*

罗毅平[1)2)†] 邓飞其[2)] 李安平[1)]

1)(湖南工程学院,湘潭 411101)

2)(华南理工大学系统工程研究所,广州 510640)

(2006 年 3 月 14 日收到;2006 年 7 月 13 日收到修改稿)

针对一类具分布时滞的抛物型控制系统,提出一种新的镇定设计方法.利用推广的向量 Hanalay 微分不等式、Dini 导数、结合 Green 公式及不等式分析技术,在线性反馈控制律的作用下,导出了具分布时滞的抛物型控制系统的镇定的新判据.该镇定性条件不依赖于时滞.最后给了一个算例说明所得结果的可行性.此外,该方法一个明显的优点是所得的镇定性条件容易验证,因而便于应用.

关键词:抛物型系统,Dini 导数,分布时滞,全局指数镇定

PACC:0290,0200,0340K

1. 引 言

由于许多领域提出的模型都是抛物型系统[1—9],所以,由偏微分方程所确定的系统的求解[5—9]和控制一直是人们研究的热点[10—24].然而,从客观事实来看,分布时滞更能反映事物的本质.如文献[2]提出的材料热加工与人中变迁模型都是具分布时滞的抛物型系统.而且分布时滞的抛物型系统包含了 n 个时滞的时滞控制系统[20].因此,离散时滞系统是连续分布时滞系统的特殊情形.故研究连续分布时滞的抛物型系统的控制更具有普遍意义.但由于研究分布时滞的抛物型系统的性态难度很大,无法照搬离散型时滞抛物型系统已有的方法,所以尽管提出的模型十年以前就出现了,但研究其特性的仍然很少.就我们所知,文献[22]讨论了具分布时滞的抛物型系统的振动性.文献[22]讨论了一种特殊的具分布时滞的抛物型系统的镇定性,文中假设空间变量是标量,且假设其值在实数区间[0,1]上.此外,该文是以半群算子理论为工具设计的控制器,而文献[21]指出,以半群算子理论为工具设计的控制器给实际应用带来一定的困难,原因是所要求的算子的紧性可逆性和可交换性难以验证.文献[19]给出的变结构控制也同样遇到文献[21]指出的问题.而国内许多学者提出了利用矩阵范数为工具来设计变结构控制器[19,21—28],事实上,这种控制器在实际应用中仍然难以检验.我们曾借鉴离散时滞系统的方法并结合微分不等式分析技术提出了一种变结构控制方法[29],该方法虽然避免了矩阵范数与半群算子理论,但该方法仍然不能克服变结构控制中的通病,即控制过程中的抖动现象.基于此,我们提出一种利用比较原理获得系统的镇定性条件.在给定系统是线性反馈的情形下,我们求得在反馈增益矩阵满足一定的条件下,所研究的系统是指数镇定的.该条件只要求系统的参数是一个 M-矩阵,其判别系统能稳的条件容易检验,因而对实际应用工作者有一定的指导意义.最后,我们给出了一个实例说明了结论应用的有效性.

2. 问题的描述

考虑下列具多个变时滞的分布参数系统:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial t} &= C\sum_{l=1}^{p}\frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial x_l^2}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^0 w_j(x,t)\\&+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\int_{-\tau}^{0}k_{ij}(s)w_j(x,t+s)\mathrm{d}s\\&+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}u_j(x,t),(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\quad(1)$$

* 国家自然科学基金(批准号:60374023)、湖南省教育厅自然科学基金重点项目(批准号:04A012)和湖南省自然科学基金(批准号:05JJ40093)资助的课题.

† E-mail:lyp8688@sohu.com

写成矩阵形式即为

$$\frac{\partial W}{\partial t}=C\cdot \boldsymbol{T}W(x,t)+A_0W(x,t)$$
$$+A\int_0^{\tau}K(s)W(x,t-s)\mathrm{d}s+Bu(x,t),\quad(2)$$

其中$(x,t)\in\Omega\times R_+$,满足$C>0$和$\tau>0$都是常数;$A_0=(a_{ij}^0)$,$A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})$是具有相应阶的常数矩阵;$\Omega=\{x,\|x\|<l<+\infty\}\subset R^p$是$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)^{1/2}$具有光滑边界$\partial\Omega$的有界球区域,状态函数$W(x,t)=\mathrm{col}(w_1(x,t),w_2(x,t),\cdots,w_n(x,t))\in R^n$,$\boldsymbol{T}=\sum_{l=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$为$\Omega$上的Laplace扩散算子.其中$k_{ij}(s)$为时滞核函数,表示时滞分布密度,并满足$K=(k_{ij})_{n\times n}$,其中$\int_0^{\tau}k_{ij}(s)\mathrm{d}s=k_{ij}>0$为常数.其初边值条件满足

$$W(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[-\tau,+\infty);\quad(3)$$
$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial n}=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[-\tau,+\infty);\quad(4)$$
$$W(x,t)=\varphi(x,t),(x,t)\in\Omega\times[-\tau,0];\quad(5)$$

n是$\partial\Omega$的单位外法向量,$\varphi(x,t)$是适当光滑的函数.

3. 定义和引理

为了叙述方便,我们先引进一些记号和说明.$A\geqslant B(A<B)$表示矩阵A和B的对应元素满足不等式"$\geqslant$"("$<$").特别地,若$A\geqslant 0$,则称A为非负矩阵.不失一般性地,我们总假定方程(1)的平衡点为零点,否则,我们总可以通过适当的变换使方程的平衡点为零点.

记L_2-模为

$$\|W(t)\|_2=\left(\int_{\Omega}|W(x,t)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2},\quad(6)$$

其中$|W(x,t)|$表示向量$W(x,t)$的Eucild模,并称为E-模.记$L_2(\Omega)$是Ω上的实可测函数空间且对于L_2-构成一个Banach空间.记

$$w_i(x,t)=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}w_i(x,t+s),i=1,2,\cdots,n;$$
$$w^s=\mathrm{col}(w^s(t),w^s(x,t),\cdots,w^s(x,t));$$
$$\|\varphi_j(t)\|_2^s=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|\varphi_j(x,t+s)\|_2,j=1,2,\cdots,n;$$
$$\|\varphi(t)\|_2^s=\left(\sum_{j=1}^{n}(\|\varphi(t)\|_2^s)^2\right)^{1/2};$$

$(w)^{\dagger}=\mathrm{col}(\|w_1\|,\|w_2\|,\cdots,\|w_n\|)$,$\|w_j\|_2^s=\int_{\Omega}|w_j|^s\mathrm{d}x$.设$A=(a_{ij})$,则记

$$\bar{a}_{ij}=\begin{cases}a_{ij},i=j\\0,i\neq j\end{cases},\bar{A}=(\bar{a}_{ij});\quad(7)$$
$$\tilde{a}_{ij}=\begin{cases}0,i=j\\a_{ij},i\neq j\end{cases},\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij});\quad(8)$$
$$A^+=(|a_{ij}|).$$

定义1 若存在正数δ和M,使得

$$\|W(t)\|_2\leqslant M\mathrm{e}^{-\delta t},(x,t)\in\Omega\times R,\quad(9)$$

则称边值问题(2)—(5)式的平衡点是$L_2(\Omega)$-指数渐近稳定的,简称系统(2)是$L_2(\Omega)$-指数渐近稳定的.

定义2[30] 函数$f:(\alpha,\beta)\to R,t\to f(t)$在点$t_0\in(\alpha,\beta)$的上右Dini导数$D^+f(t_0)$为

$$D^+f(t_0)=\overline{\lim_{t\to t_0^+}}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

引理1 假设向量函数

$$x(t)=\mathrm{col}(x_1(t),\cdots,x_n(t)),$$
$$y(t)=\mathrm{col}(y_1(t),\cdots,y_n(t)),$$
$$x^s:=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}x(t+s)=\mathrm{col}(x_1^s(t),\cdots,x_n^s(t)),$$
$$x_i^s=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}x_i(t+s),i=1,2,\cdots,n,$$
$$y^s:=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}y(t+s)=\mathrm{col}(y_1^s(t),\cdots,y_n^s(t)),$$
$$y_i^s=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}y_i(t+s),i=1,2,\cdots,n$$

满足下列条件:

(L1) $x(t)<y(t),t\in[t_0-\tau,t_0]$;

(L2) $D^+y(t)>F(t,y(t),y^s(t)),t\geqslant t_0\geqslant 0$,
$D^+x(t)\leqslant F(t,x(t),x^s(t)),t\geqslant t_0\geqslant 0$,

则

$$x(t)\leqslant y(t),t\geqslant t_0,\quad(10)$$

其中$F(t,x,x^s)=(A+B^+)x+C^+x^s$,$A<0$为对角阵.

我们称引理1为推广的向量Halanay不等式.

证明 如果(10)式不真,则存在$i_0(0\leqslant i_0\leqslant n)$和$t_1>t_0$,满足$x_{i_0}(t_1)>y_{i_0}(t_1)$,则由$x(t),y(t)$的连续性可知,一定存在$t_2\in(t_0,t_1)$,使得$x_{i_0}(t_2)=y_{i_0}(t_2)$,且当$t\in(t_2,t_1)$时,有$x_{i_0}(t)>y_{i_0}(t)$;显然$x_{i_0}(t)\leqslant y_{i_0}(t)$,$t_0-\tau\leqslant t<t_1$;因此,当$t_0-\tau\leqslant t<t_2$时,$x(t)\leqslant y(t)$.由Dini导数的定义可得

$$D^+x_{i_0}(t_2)\geqslant D^+y_{i_0}(t_2),\quad(11)$$

另一方面,由$x^s(t),y^s(t)$的定义及(L1)有

$$x^s(t_2)=\sup_{-\tau<s\leqslant 0}x(t_2+s)\leqslant\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}y(t_2+s)$$
$$=y^s(t_2),\quad(12)$$

所以由(L2)，我们有

$$D^+x_{i_0}(t_2) \leqslant a_{i_0 i_0} x_{i_0}(t_2) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^+ x_j(t_2) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^+ x_j^s(t_2)$$
$$\leqslant a_{i_0 i_0} y_{i_0}(t_2) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^+ y_j(t_2)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^+ y_j^s(t_2) < D^+ y_{i_0}(t_2). \quad (13)$$

因此，(11)式与(13)式矛盾，故(10)式成立.

在本文中，设反馈控制器为

$$u(t,x) = Kw(t,x). \quad (14)$$

4. 主要结果

定理 1　若 $M = -(\bar{G} + \tilde{G}^+ + \hat{A}^+)$是一个 M-矩阵，在反馈控制律(14)的作用下，系统(2)—(5)是指数稳定的.

$$G = A_0 + H, H = BK = (h_{ij}),$$
$$\hat{A} = (\hat{a}_{ij}), \hat{a}_{ij} = a_{ij}k_{ij}.$$

证明

$$\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial t} = C\sum_{l=1}^{p} \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial x_l^2} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 w_j(x,t)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\int_{-\tau}^{0} k_{ij}(s) w_j(x,(t+s))\,\mathrm{d}s$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j(x,t), i = 1,2,\cdots,n. \quad (15)$$

两边同乘以 $w_i(x,t)$，并对变量 x 在集合 Ω 上积分得

$$\int_\Omega w_i(x,t) \frac{\partial w_i(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$$
$$= C\sum_{l=1}^{p}\int_\Omega w_i(x,t) \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial x_l^2}\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 \int_\Omega w_i(x,t) w_j(x,t)\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\int_\Omega\int_0^\tau k_{ij}(s) w_i(x,t) w_j(x,(t-s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\int_\Omega w_i(x,t) u_j(x,t)\mathrm{d}x,$$
$$i = 1,2,\cdots,n. \quad (16)$$

为了求得反馈增益阵满足什么样的条件，使得系统闭环稳定的，我们将 $u = Kw$ 代入上式，并记 $H = BK = (h_{ij})$，得

$$\int_\Omega w_i(x,t) \frac{\partial w_i(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$$
$$= C\sum_{l=1}^{p}\int_\Omega w_i(x,t) \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial x_l^2}\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 \int_\Omega w_i(x,t) w_j(x,t)\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\int_\Omega\int_0^\tau k_{ij}(s) w_i(x,t) w_j(x,(t-s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\int_\Omega w_i(x,t) w_j(x,t)\mathrm{d}x,$$

则可以简记为

$$\int_\Omega w_i(x,t) \frac{\partial w_i(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$$
$$= C\sum_{l=1}^{p}\int_\Omega w_i(x,t) \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial x_l^2}\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\int_\Omega w_i(x,t) w_j(x,t)\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\int_\Omega\int_0^\tau k_{ij}(s) w_i(x,t) w_j(x,(t-s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x. \quad (17)$$

利用边界条件和 Green 公式，我们有

$$\sum_{l=1}^{p}\int_\Omega w_i(x,t) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_l^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega w_i(x,t)\, \nabla\cdot\left(\frac{\partial w_i^1}{\partial x_l}\right)_{l=1}^{p}\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega \nabla\left(w_i(x,t) \frac{\partial w_i}{\partial x_l}\right)_{l=1}^{p}\mathrm{d}x$$
$$- \int_\Omega \left(w_i(x,t) \frac{\partial w_i}{\partial x_l}\right)_{l=1}^{p} \cdot \nabla w_i(x,t)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\partial\Omega}\left(w_i(x,t)\frac{\partial w_i}{\partial x_l}\right)_{l=1}^{p}\mathrm{d}s - \sum_{l=1}^{p}\int_\Omega\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_l}\right)^2\mathrm{d}x$$
$$= -\sum_{l=1}^{p}\int_\Omega\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_l}\right)^2\mathrm{d}x, \quad (18)$$

其中$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$是梯度算子，并且

$$\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_l}\right)_{l=1}^{p} \doteq \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_1}, \frac{\partial w_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial w_i}{\partial x_p}\right).$$

又因为

$$\int_\Omega a_{ij} w_i(x,t)\int_{-\tau}^{0} k_{ij}(s) w_j(x,t+s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\tau}^{0} k_{ij}(s)\mathrm{d}s\int_\Omega a_{ij} w_i(x,t) w_j(x,t+s)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant |a_{ij}|\left(\int_0^\tau k_{ij}(s)\mathrm{d}s\int_\Omega (w_i(x,t))^2\mathrm{d}x\right.$$
$$\left.\times\int_0^\tau k_{ij}(s)\mathrm{d}s\int_\Omega (w_j(x,t-s))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant |a_{ij}|\left(\int_0^\tau k_{ij}(s)\mathrm{d}s\int_\Omega (w_i(x,t))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_0^\tau k_{ij}(s)\mathrm{d}s\int_\Omega (|w_j(x,t)|^s)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant |a_{ij}|\sqrt{k_{ij}}\ \|w_i\|_2\cdot\sqrt{k_{ij}}\ \|w_j\|_2^s$$
$$=\hat{a}_{ij}^+\ \|w_i\|_2\cdot\|w_j\|_2^s,\tag{19}$$

类似地,我们有

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}\int_\Omega w_i(x,t)w_j(x,t)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant g_{ii}^+\ \|w_i\|_2^2+\sum_{j=1}^n \tilde{g}_{ij}^+\ \|w_i\|_2\cdot\|w_j\|_2,\tag{20}$$

由文献[31]的引理 3 可知,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_i^1\|_2^2=D^+\|w_i^1\|_2^2$,从而,由(17)—(20)式得

$$D^+\ \|w_i^1\|_2^2=-2C\sum_{l=1}^p\int_\Omega\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_l}\right)^2\mathrm{d}x+2g_{ii}\ \|w_i\|_2^2$$
$$+2\sum_{j=1}^n\tilde{g}_{ij}^+\ \|w_i\|_2\cdot\|w_j\|_2$$
$$+2\sum_{j=1}^n\hat{a}_{ij}^+\ \|w_i\|_2\cdot\|w_j\|_2^s$$
$$\leqslant 2g_{ii}\ \|w_i\|_2^2+2\sum_{j=1}^n\tilde{g}_{ij}^+\ \|w_i\|_2\cdot\|w_j\|_2$$
$$+2\sum_{j=1}^n\hat{a}_{ij}^+\ \|w_i\|_2\cdot\|w_j\|_2^s,\tag{21}$$

即

$$D^+\ \|w_i\|_2\leqslant g_{ii}\ \|w_i\|_2+\sum_{j=1}^n\tilde{g}_{ij}^+\ \|w_j\|_2$$
$$+\sum_{j=1}^n\hat{a}_{ij}^+\ \|w_j\|_2^s.\tag{22}$$

另一方面,因为 $M=-(\bar{G}+\tilde{G}^++\hat{A}^+)$是一个 M-矩阵,所以存在 $\gamma=\mathrm{col}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)>0,\theta>0$ 使得[30]

$$(\bar{G}+\tilde{G}^++\hat{A}^+)\gamma<-\theta.\tag{23}$$

选取 $0<\delta\ll1$,使得

$$\delta\gamma+(\bar{G}\gamma+\tilde{G}^+\ \gamma+\hat{A}^+\ \gamma\mathrm{e}^{\delta\tau})<0.\tag{24}$$

令 $t\in[-\tau,0]$,选取 $R\gg1$,使得

$$R\gamma\mathrm{e}^{-\delta t}>\bar{E},\text{其中 }\bar{E}=\mathrm{col}(1,1,\cdots,1).\tag{25}$$

对任意的 $\varepsilon>0$,令

$$q(t)=R(\|\varphi(0)\|_2^s+\varepsilon)\gamma\mathrm{e}^{-\delta t},t\geqslant0,\tag{26}$$

直接由(24)—(26)式得

$$D^+\ q(t)=-\delta\gamma R(\|\varphi(0)\|_2^s+\varepsilon)\mathrm{e}^{-\delta t}$$
$$>(\bar{G}\gamma+\tilde{G}^+\ \gamma+\hat{A}^+\ \gamma\mathrm{e}^{\delta\tau})R(\|\varphi(0)\|_2^s+\varepsilon)\mathrm{e}^{-\delta t}$$
$$=(\bar{G}+\tilde{G}^+)q(t)+R\hat{A}^+\ \gamma\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}$$
$$\geqslant(\bar{G}+\tilde{G}^+)q(t)+\hat{A}^+\ q^s(t)$$
$$=:F(t,q(t),q^s(t)),t>0.\tag{27}$$

又

$$\|w_i(t)\|_2\leqslant\|\varphi_i(t)\|_2^s\leqslant\|\varphi(0)\|_2^s$$
$$\leqslant R\gamma_i\ \|\varphi(0)\|_2^s\mathrm{e}^{-\delta t}$$
$$<R\gamma_i(\|\varphi(0)\|_2^s+\varepsilon)\mathrm{e}^{-\delta t}=q_i(t)$$
$$(i=1,2,\cdots,n;-\tau\leqslant t\leqslant0),\tag{28}$$

即

$$(w)^\dagger<q(t),-\tau\leqslant t\leqslant0.\tag{29}$$

由(22)式,得

$$D^+\ (w)^\dagger\leqslant(\bar{G}+\tilde{G})(w)^\dagger+\sum_{k=1}^z((w)^\dagger)^s$$
$$=F(t,(w)^\dagger,((w)^\dagger)^s),t\geqslant0,\tag{30}$$

由(27),(29),(30)式及引理 1 得

$$(w)^\dagger\leqslant q(t),t\geqslant0.\tag{31}$$

令 $\varepsilon\to0^+$,则

$$(w)^\dagger\leqslant R\ \|\varphi\|_2^s\mathrm{e}^{-\delta t},t\geqslant0.\tag{32}$$

因此,由(32)式知

$$\|w\|_2=\left(\sum_{j=1}^n\|w\|_2^2\right)^{1/2}\leqslant R|\gamma|\cdot\|\varphi_1\|_2^s\mathrm{e}^{-\delta t}$$
$$=M\mathrm{e}^{-\delta t}\to0\quad(\text{当 }t\to\infty\text{ 时}).\tag{33}$$

根据 M-矩阵的性质,我们很容易得出以下的推论

推论 1 假设下列条件之一成立,则系统(2)—(5)在反馈控制律(14)的作用下是关于 $L_2(\Omega)$-模全局指数稳定的.

(1) $-g_{ii}>\frac{1}{\gamma_i}\sum_{j=1}^n\gamma_j(g_{ij}^++|\hat{a}_{ij}|),i=1,2,\cdots,n.$

(2) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{-g_{ii}}\sum_{j=1}^n(g_{ij}^++|\hat{a}_{ij}|)<1.$

(3) $\rho(P)<1$($\rho(P)$是矩阵 P 的谱半径),其中 $P=(p_{ij})_{n\times n},p_{ii}=0,p_{ij}=m_{ij}/m_{ii}$. 其中 $M=-\bar{G}-\tilde{G}^+-\hat{A}^+$ 满足 $m_{ii}>0,m_{ij}<0$.

推论 2 对于系统(2)—(5),若核函数 $k_{ij}(s)$ 满足$\int_{-\tau}^0 k_{ij}(s)\mathrm{d}s=1$,且 $M=-(\bar{G}+\tilde{G}^++A^+)$且是一个 M-矩阵,则系统(2)—(5) 在线性反馈控制作用(14) 之下是指数稳定的.

5. 举例说明

为了说明问题,同时也为了简便,对于模型(1),我们例举一个二维例子,$m=n=2$. 其中 $A_0=\begin{pmatrix}-2 & 0.7\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}$,$A=\begin{pmatrix}-1 & -0.1\\ 3 & -0.3\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. 由推论 2,可得满足条件(H1)的其中一个反馈增益矩阵为 $K=\begin{pmatrix}-0.1 & 0\\ 0 & -1.7\end{pmatrix}$. 利用推论 2 立即可得

系统(2)—(5)在反馈控制(14)的作用之下关于 L_2-模是指数稳定的.其仿真图如图1.

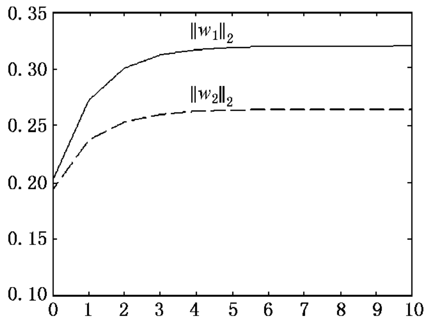

图1　例1中的 $\| w_1 \|_2$，$\| w_2 \|_2$ 的轨迹图

6. 小　　结

对分布时滞的抛物型控制系统，利用 Halanay 不等式、Dini 导数与微分不等式分析技术在状态反馈控制是一个线性矩阵的情形下，证明了所给闭环系统关于 L_2-模是指数镇定的.并给出了一个数值例子说明结果的可行性及应用方法.与变结构控制方法比较，所给判据容易检验，便于应用.本文所给方法为分布参数控制系统的新方法，所得结果为新结果.而且本文为分布参数系统的控制提供了一种新方法.

[1] Orlov Y V，Utkin V I 1987 *Automatica* **23** 753

[2] Heman R H 2001 *Systems and Control Letters* **44** 35

[3] Zheng L H，Feng S，Pan D F 1997 *J. Syst. Engineering* **12** 65(in Chinese)[郑立辉、冯　珊、潘德惠 1997 系统工程学报 **12** 65]

[4] Banks H T，Musante C J，Raye J K 2001 *Mathematical and Computer Modeling* **33** 49

[5] Zhi H Y，Wang Q，Zhang H Q 2005 *Acta Phys. Sin.* 1002 (in Chinese)[智红燕、王　琪、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 1002]

[6] Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1969(in Chinese)[楼智美 2005 物理学报 **54** 1969]

[7] Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1015(in Chinese)[楼智美 2005 物理学报 **54** 1015]

[8] Li D S，Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1939(in Chinese)[李德生、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 1939]

[9] Xie Y X，Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2828(in Chinese)[谢元喜、唐驾时 2004 物理学报 **53** 2828]

[10] Li B A，Wang M L 2005 *Chin. Phys.* **14** 1698

[11] Mo J Q，Lin Y H，Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 993 (in Chinese)[莫嘉琪、林一骅、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]

[12] Taogetusang，Sirendaoreji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 13(in Chinese)[套格图桑、斯仁道尔 2006 物理学报 **55** 13]

[13] Wang Y Y，Yang Q，Dai C Q *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1029 (in Chinese)[王悦悦、杨　琴、戴朝卿等 2006 物理学报 **55** 1029]

[14] Zheng Q，Yue P，Gong L X 2006 *Chin. Phys.* **15** 35

[15] Wang Z，Li D S，Lu H F *et al* 2005 *Chin. Phys.* **14** 2158

[16] Hastings A 1978 *J. Math. Biol.* **6** 163

[17] Sira R H 1989 *Systems & Control Letters* **13** 177

[18] Hanczyc E M，Palazodlu A 1995 *Indust. and Eng. Chem. Res.* **34** 557

[19] Hanczyc E M，Palazodlu A 1996 *Int. J. of Contr.* **63** 1116

[20] Gao C C，Yuan F S，Xiao H M 2004 *Variable Control Systems with Delays*(Beijing：Beijing Science Press)p3(in Chinese)[高存臣、袁付顺、肖会敏 2004 时滞变结构控制系统(北京：北京科学出版社)第3页]

[21] Hu Y M，Zhou Q J 1996 *The Distributed Parameter Variable Structure Systems* (Beijing：National Defense Industry Press)p163(in Chinese)[胡跃明、周其节 1996 分布参数变结构控制系统(北京：国防工业出版社)第163页]

[22] Chen Z T 1994 *Acta Math. Sci.* **14** 115[陈振韬 1994 数学物理学报 **14** 115]

[23] Liu R Q，Xie S L 1998 *Variable Structure Control and Stability of Parameter Systems with Delays*(Guangzhou：South China University of Technology Press)p105(in Chinese)[刘永清、谢胜利 1998 滞后分布参数系统的稳定性与变结构控制(广州：华南理工大学出版社)第105页]

[24] Cao W，Huang J C 1993 *IEEE Trans. On Industrial Electtronics* **12** 45

[25] Xie S L，Xie Z D，Liu R Q 1997 *Control and Decision* **12** 246 (in Chinese)[谢胜利、谢振东、刘永清 1997 控制与决策 **12** 246]

[26] Xie Z D，Xie S L，Liu R Q 1999 *Acta Automatica Sin.* **25** 805(in Chinese)[谢振东、谢胜利、刘永清 1999 自动化学报 **25** 805]

[27] Boubaker Q，Babary J P 2003 *J. of Process Control* **13** 729

[28] Cui B T，Deng F Q，Wang W *et al* 2003 *Syst. Engineering and Elect.* **25** 579(in Chinese)[崔宝同、邓飞其、王　伟等 2003 系统工程与电子技术 **25** 579]

[29] Luo Y P，Deng F Q 2005 *Syst. Engineering and Elect.* **27** 869(in Chinese)[罗毅平、邓飞其 2005 系统工程与电子技术 **27** 869]

[30] Liao X X 2000 *Theory and Application of Stability for Dynamical Systems*(Beijing：National Defense Industry Press) p5 (in Chinese)[廖晓昕 2000 动力系统的稳定性理论和应用(北京：国防工业出版社)第5页]

[31] Chen A P，Cao J D 2003 *Appl. Math. and Comput.* **134** 125

Global exponential stabilization for parabolic type systems with continuously distributed delays *

Luo Yi-Ping[1)2)†] Deng Fei-Qi[2)] Li An-Ping[1)]

1)(*Colloge of Hunan Institute of Engineering*, *Xiangtan* 411101, *China*)

2)(*Institute of System Engineering*, *South China University of Technology*, *Guangzhou* 510640, *China*)

(Received 14 March 2006; revised manuscript received 13 July 2006)

Abstract

A sort of new method is put forward which is not similar to existing methods for a class of parabolic type systems with time-varying delays. By employing generalized Halanay's inequality, Dini derivative and the technique of differential inequality, a sufficient condition for the type of stabilization are derived. The stabilization criteria are delay-independent. A computation example is given to illustrate the proposed method. In addition, the distinct advantage of the method is that the criterions in the paper are easy to be checked, and can be applied in practice easily.

Keywords: parabolic type system, Dini's derivative, distribute delay, global exponential stabilization

PACC: 0290, 0200, 0340K

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60374023), the Key Program of Natural Science Found of Education Bureau of Hunan Province China (Grant No. 04A012) and the Natural Science Fundation of Hunan Province, China (Grant No. 05JJ40093).

† E-mail: lyp8688@sohu.com