第 56 卷 第 2 期 2007 年 2 月
1000-3290/2007/56(02)/0649-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.2,February,2007


# 事件空间中非 Chetaev 型非完整约束系统的 Hojman 守恒量*

贾利群[1)†] 张耀宇[2)] 郑世旺[3)]
1)(江南大学理学院,无锡 214122)
2)(平顶山学院电气信息工程学院,平顶山 467002)
3)(商丘师范学院物理与信息工程系,商丘 476000)
(2006 年 6 月 1 日收到;2006 年 6 月 21 日收到修改稿)

研究了事件空间中非 Chetaev 型非完整约束系统由特殊的 Lie 对称性、Noether 对称性和 Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量.建立了系统的运动微分方程.给出了 Lie 对称性、Noether 对称性和 Mei 对称性的判据,研究了三种对称性间的关系.将 Hojman 定理推广并应用于事件空间中的非 Chetaev 型非完整约束系统,得到 Hojman 守恒量.并举出一例说明结论的应用.

关键词:事件空间,非 Chetaev 型非完整约束系统,对称性,Hojman 守恒量
PACC:0320

## 1.引 言

近年来,约束力学系统的对称性与守恒量的研究取得了很大进展[1—22].罗绍凯、梅凤翔等人在时间不变的特殊无限小变换下,分别从特殊的 Lie 对称性、Noether 对称性和形式不变性出发,研究了 Chetaev 型非完整系统的 Hojman 守恒量、弱 Hojman 守恒量和强 Hojman 守恒量[18—20].事件空间中完整约束系统的对称性与守恒量的研究,也取得了一些成就.许学军、梅凤翔等人在事件空间中研究了完整约束系统由特殊的 Lie 对称性、Noether 对称性和 Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量[23].然而,事件空间中非完整约束系统对称性与守恒量的研究则较少.本文把三类对称性导致 Hojman 守恒量的研究,从位形空间的 Chetaev 型非完整约束系统和事件空间的完整约束系统,推进到事件空间的非 Chetaev 型非完整约束系统,研究了事件空间中非 Chetaev 型非完整约束系统由特殊的 Lie 对称性、Noether 对称性和 Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量.

## 2.事件空间中非 Chetaev 型非完整约束系统的运动微分方程

假设双面理想非 Chetaev 型非完整约束下的力学系统的位形由 $n$ 个广义坐标 $q_s$ $(s=1,\cdots,n)$ 确定.建立由广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 和时间 $t$ 构成的 $(n+1)$ 维广义位形空间,称为事件空间.引入记号

$$x_1=t,x_{s+1}=q_s\quad(s=1,\cdots,n),\tag{1}$$

则所有的变量 $x_\alpha$ $(\alpha=1,\cdots,n+1)$ 可作为某参数 $\tau$ 的已知函数.令 $x_\alpha=x_\alpha(\tau)$ 是 $C^2$ 类曲线,使得

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=x'_\alpha\quad(\alpha=1,\cdots,n+1)\tag{2}$$

不同时为零,有

$$\dot{x}_\alpha=\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{x'_\alpha}{x'_1}\quad(\alpha=1,\cdots,n+1).\tag{3}$$

假设系统在位形空间中的 Lagrange 函数 $L=L(t,q_s,\dot{q}_s)$,非势广义力 $Q_s=Q_s(t,q_s,\dot{q}_s)$,则事件空间中的 Lagrange 函数和事件空间中的非势广义力分别定义为

$$\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)=x'_1L\left(x_\alpha,\frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right).\tag{4}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10572021,10372053)和江南大学 211 工程(批准号:0002246)资助的课题.

† E-mail:jlq0@sina.com

$$P_1 = -Q_s x'_{s+1} \quad (s = 1,\cdots,n),$$

$$P_{s+1} = x'_1 Q_s\left(x_\alpha, \frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{5}$$

假设系统在位形空间中的运动受有 $g$ 个双面理想非 Chetaev 型非完整约束，

$$f_\beta(t, q_s, \dot{q}_s) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g;s = 1,\cdots,n), \tag{6}$$

在事件空间中方程(6)可表示为

$$F_\beta(x_\alpha, x'_\alpha) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g;\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{7}$$

方程(7)为事件空间中的双面理想非 Chetaev 型非完整约束，方程(7)中

$$F_\beta(x_\alpha, x'_\alpha) = f_\beta\left(x_1,\cdots,x_{n+1};\frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right). \tag{8}$$

设约束方程(7)加在事件空间中系统的虚位移 $\delta x_\alpha$ 上的限制条件为

$$F_{\beta\alpha}(x_\alpha, x'_\alpha)\delta x_\alpha = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g;\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{9}$$

(9)式和下文均采用 Einstein 求和约定. 一般情况，$F_{\beta\alpha}$ 与 $\frac{\partial F_\beta}{\partial x'_\alpha}$ 无关，如果两者相等，则非 Chetaev 型非完整约束成为 Chetaev 型非完整约束.

引入 Lagrange 乘子 $\lambda_\beta(\beta = 1,\cdots,g)$，则事件空间中的非 Chetaev 型非完整约束系统的运动微分方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha + \lambda_\beta F_{\beta\alpha} \quad (\alpha = 1,\cdots,n+1). \tag{10}$$

设系统非奇异，则由方程(7)和(10)在方程积分之前可求出所有的 $\lambda_\beta$. 令

$$\Gamma_\alpha = \lambda_\beta F_{\beta\alpha} \quad (\beta = 1,\cdots,g;\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{11}$$

$\Gamma_\alpha$ 为事件空间中的广义非完整约束反力. 引入事件空间中的 Euler 算子

$$E_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{12}$$

则方程(10)可改写为

$$E_\alpha(\Lambda) = P_\alpha + \Gamma_\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{13}$$

方程(13)称为与事件空间中非 Chetaev 型非完整约束系统(7),(10)相应的完整约束系统的运动微分方程，它的$(n+1)$个方程相互不独立. 假设可由方程(13)解出事件空间中后面 $n$ 个广义加速度 $x''_{s+1}$，记作

$$x''_{s+1} = h_s(x_\alpha, x'_\alpha, x''_1) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{14}$$

## 3. 系统三种对称性的判据

取特殊的、群的无限小变换

$$\tau^* = \tau,$$

$$x_1^* = x_1,$$

$$x_{s+1}^* = x_{s+1} + \varepsilon\xi_{s+1}(x_\alpha, x'_\alpha) \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{15}$$

式中，$\varepsilon$ 为无限小参数，$\xi_{s+1}$ 为无限小变换生成元. 下面研究在变换(15)式下，事件空间中非 Chetaev 型非完整约束系统 Lie 对称性、Noether 对称性和 Mei 对称性的判据.

### 3.1. Lie 对称性的判据

方程(13)在变换(15)式下的 Lie 对称性的确定方程为

$$X^{(2)}[E_\alpha(\Lambda)] = X^{(1)}(P_\alpha + \Gamma_\alpha) \quad (\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{16}$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_{s+1}\frac{\partial}{\partial x_{s+1}} + \frac{\mathrm{d}\xi_{s+1}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}},$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \frac{\mathrm{d}^2\xi_{s+1}}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\partial}{\partial x''_{s+1}}. \tag{17}$$

由于方程(16)的$(n+1)$个方程不彼此独立，有如下关系：

$$\{X^{(2)}[E_\alpha(\Lambda)] - X^{(1)}(P_\alpha + \Gamma_\alpha)\}x'_\alpha = 0, \tag{18}$$

因此，可取方程(16)的后 $n$ 个方程

$$X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)] = X^{(1)}(P_{s+1} + \Gamma_{s+1}) \quad (s = 1,\cdots,n) \tag{19}$$

作为 Lie 对称性的确定方程，即 Lie 对称性的判据. 设

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau} = x'_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + x''_1\frac{\partial}{\partial x'_1} + h_s\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}. \tag{20}$$

由于方程(19)在计算时需将方程(14)代入，其结果与将算子 $X^{(1)}$ 与 $X^{(2)}$ 中的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ 换成 $\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}$ 的结果相同. 于是方程(14)在变换(15)式下的 Lie 对称性的确定方程可写为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_{s+1}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial h_s}{\partial x_{k+1}}\xi_{k+1} + \frac{\partial h_s}{\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_{k+1}}{\mathrm{d}\tau} \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{21}$$

方程(21)是 Lie 对称性的另一判据.

### 3.2. Noether 对称性的判据

方程(13)在变换(15)式下的 Noether 等式为

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{s+1}}\xi_{s+1}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{s+1}}\xi'_{s+1}+(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})\xi_{s+1}+G'_N=0, \tag{22}$$

式中 $G_N=G_N(x_\alpha,x'_\alpha)$ 为规范函数. 与 Noether 等式(22)式相应的 Killing 方程为

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{s+1}}\xi_{s+1}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\xi_{s+1}}{\partial x_{k+1}}x'_{k+1}+(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})\xi_{s+1}=-\frac{\partial G_N}{\partial x_{s+1}}x'_{s+1},$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\xi_{s+1}}{\partial x'_{k+1}}=-\frac{\partial G_N}{\partial x'_{k+1}}(k=1,\cdots,n). \tag{23}$$

(22)式或方程(23)为 Noether 对称性的判据.

### 3.3. Mei 对称性的判据

方程(13)在变换(15)式下的 Mei 对称性的判据方程为

$$E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)]=X^{(1)}(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})\quad(s=1,\cdots,n). \tag{24}$$

## 4. Noether 对称性、Mei 对称性为 Lie 对称性的条件

### 4.1. Noether 对称性为 Lie 对称性的条件

容易证明

$$E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)]-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\right)+E_{s+1}(\xi_{k+1})E_{k+1}(\Lambda)+\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\mathrm{d}E_{k+1}(\Lambda)}{\mathrm{d}\tau}=X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]\quad(s=1,\cdots,n). \tag{25}$$

注意到

$$E_{s+1}(G'_N)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\partial G_N}{\partial x'_{s+1}}\quad(s=1,\cdots,n), \tag{26}$$

将(26)式代入(25)式,并加减 $X^{(1)}(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})$ 和 $E_{s+1}[(P_{k+1}+\Gamma_{k+1})\xi_{k+1}]$,再利用方程(13)简化可得

$$\begin{aligned}
&X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)-(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})]\\
&=E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)+(P_{k+1}+\Gamma_{k+1})\xi_{k+1}+G'_N]\\
&-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}+\frac{\partial G_N}{\partial x'_{s+1}}\right)\\
&-\left(\frac{\partial(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})}{\partial x'_{k+1}}+\frac{\partial(P_{k+1}+\Gamma_{k+1})}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi'_{k+1}\\
&+\left(\frac{\partial(P_{k+1}+\Gamma_{k+1})}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})}{\partial x_{k+1}}\right.\\
&\left.-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial(P_{k+1}+\Gamma_{k+1})}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi_{k+1}(s=1,\cdots,n).
\end{aligned} \tag{27}$$

于是,有

**命题 1**　在变换(15)式下,如果事件空间非 Chetaev 型非完整约束系统的无限小变换生成元 $\xi_{s+1}$ 是 Noether 对称性的,且 $\xi_{s+1}$,$P_{s+1}$ 和 $\Gamma_{s+1}$ 满足方程

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(P_{k+1}+\Gamma_{k+1})}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})}{\partial x_{k+1}}\right.\\
&\left.-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial(P_{k+1}+\Gamma_{k+1})}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi_{k+1}-\left(\frac{\partial(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})}{\partial x'_{k+1}}\right.\\
&\left.+\frac{\partial(P_{k+1}+\Gamma_{k+1})}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi'_{k+1}=0\quad(s=1,\cdots,n),
\end{aligned} \tag{28}$$

则无限小变换生成元 $\xi_{s+1}$ 必是 Lie 对称性的. 反之,则不一定.

**证明**　如果 $\xi_{s+1}$ 是 Noether 对称性的无限小变换生成元,则(22)式和方程(23)成立. 将(22)式、方程(23)和(28)代入(27)式,可得

$$\begin{aligned}
&X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]-X^{(1)}(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})\\
&=X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)-(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})]\\
&=0\quad(s=1,\cdots,n),
\end{aligned} \tag{29}$$

由方程(19)知,$\xi_{s+1}$ 也是 Lie 对称性的. 证毕.

对事件空间中非 Chetaev 型非完整保守力学系统,有 $P_{s+1}=0$,故由方程(28)可得如下推论:

**推论**　如果事件空间中非 Chetaev 型非完整保守力学系统的无限小变换生成元 $\xi_{s+1}$ 是 Noether 对称性的,且 $\xi_{s+1}$ 和 $\Gamma_{s+1}$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial\Gamma_{k+1}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial\Gamma_{s+1}}{\partial x_{k+1}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Gamma_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi_{k+1}-\left(\frac{\partial\Gamma_{s+1}}{\partial x'_{k+1}}+\frac{\partial\Gamma_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi'_{k+1}=0\ (s=1,\cdots,n), \tag{30}$$

则 Noether 对称性必为 Lie 对称性.

### 4.2. Mei 对称性为 Lie 对称性的条件

可以证明关系式

$$\begin{aligned}
&E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)]-X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{k+1}}\right)\\
&-\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{k+1}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi'_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\right)\\
&-\frac{\partial\xi'_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\quad(s=1,\cdots,n)
\end{aligned} \tag{31}$$

成立. 于是,有

**命题 2**　在变换(15)式下,事件空间非 Chetaev 型非完整约束系统的 Mei 对称性为 Lie 对称性的充

要条件是无限小变换生成元 $\xi_{s+1}$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{k+1}}\right)-\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{k+1}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi'_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\right)-\frac{\partial\xi'_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}=0$$
$$(s=1,\cdots,n)\tag{32}$$

**证明** 如果 Mei 对称性是 Lie 对称性的，则有

$$E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)]-X^{(1)}(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})=X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]-X^{(1)}(P_{s+1}+\Gamma_{s+1})\quad(s=1,\cdots,n),\tag{33}$$

故有

$$X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]-E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)]=0\quad(s=1,\cdots,n).\tag{34}$$

由(31)和(34)式可得(32)式.反之,若(32)式成立,由(31)式知,(34)和(33)式均成立.证毕.

考虑到在计算方程(24)时，需将算子 $X^{(1)}$ 与 $E_s$ 中的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ 换成 $\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}$,则(32)式中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ 可表为 $\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}$,$\xi'_{s+1}$ 可表为 $\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}$.

## 5. 三种对称性导致的 Hojman 守恒量

在事件空间中,非 Chetaev 型非完整约束系统在特殊的 Lie 对称性、特殊的 Noether 对称性和特殊的 Mei 对称性下导致的 Hojman 守恒量,分别由下述三个命题给出.

**命题3** 若变换(15)式中的生成元 $\xi_{s+1}$ 满足方程(21),且存在某函数 $\mu=\mu(x_\alpha,x'_\alpha)$,使得

$$\frac{\partial h_s}{\partial x'_{s+1}}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\ln\mu=0\tag{35}$$

成立，则事件空间中的 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量为

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{s+1}}(\mu\xi_{s+1})+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}\right)=\mathrm{const}.\tag{36}$$

**证明** 将(36)式按方程(20)求对 $\tau$ 的导数,得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}I_{\mathrm{H}}=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_{s+1}}\xi_{s+1}\right)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\xi_{s+1}}{\partial x_{s+1}}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}+\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}\right).\tag{37}$$

容易证明如下算子运算关系

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}=\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}-\frac{\partial}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial h_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial}{\partial x'_{k+1}},$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x_{s+1}}=\frac{\partial}{\partial x_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}-\frac{\partial h_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial}{\partial x'_{k+1}}.\tag{38}$$

将(21)式对 $x'_{s+1}$ 求偏导数并对 $s$ 求和,得

$$\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}=\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\left(\frac{\partial h_s}{\partial x_{k+1}}\xi_{k+1}\right)+\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\left(\frac{\partial h_s}{\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{k+1}\right).\tag{39}$$

将(38)和(39)式代入(37)式,再利用(35)和(21)式,得

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}I_{\mathrm{H}}&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_{s+1}}\xi_{s+1}\right)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}\right)\\&\quad+\frac{\partial^2h_s}{\partial x'_{s+1}\partial x_{k+1}}\xi_{k+1}+\frac{\partial^2h_s}{\partial x'_{s+1}\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{k+1}\\&=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x'_{s+1}}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}-\frac{\partial h_s}{\partial x_{k+1}}\xi_{k+1}\right.\\&\quad\left.-\frac{\partial h_s}{\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{k+1}\right)=0.\end{aligned}\tag{40}$$

证毕.

利用命题3,可由系统的 Lie 对称性直接求出 Hojman 守恒量.

**命题4** 如果在变换(15)式下,系统的 Noether 对称性的无限小变换生成元 $\xi_{s+1}$、动力学函数 $P_{s+1}$ 和 $\Gamma_{s+1}$ 满足(18)式,且存在某函数 $\mu=\mu(x_\alpha,x'_\alpha)$,使得(35)式成立,则 Noether 对称性导致 Hojman 守恒量(36)式.

**证明** 由命题1和命题3可证得命题4.

利用命题4,可由系统的 Noether 对称性通过 Lie 对称性间接求出 Hojman 守恒量.

**命题5** 如果在变换(15)式下系统的 Mei 对称性的无限小变换生成元 $\xi_{s+1}$ 满足(32)式,且存在某函数 $\mu=\mu(x_\alpha,x'_\alpha)$ 使得(35)式成立,则 Mei 对称性导致 Hojman 守恒量(36)式.

**证明** 由命题2和命题3可证得命题5.

利用命题5,可由系统的 Mei 对称性通过 Lie 对称性而间接求出 Hojman 守恒量.

## 6. 算 例

事件空间中非 Chetaev 型非完整约束系统的 Lagrange 函数、非势广义力、约束方程以及约束加在虚位移上的限制条件分别为

$$\Lambda=x'_1\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)\right]^2+\left[\left(\frac{x'_3}{x'_1}\right)\right]^2-x_3\right\},\tag{41}$$

$$P_1=P_2=P_3=0,\tag{42}$$

$$F = x'_3 + x_1 x'_2 = 0, \tag{43}$$

$$(x'_1 - 2x'_2)\delta x_2 + x_1 x'_2 \delta x_3 = 0. \tag{44}$$

试由系统的 Lie 对称性、Noether 对称性和 Mei 对称性导出 Hojman 守恒量.

由(44)式可得

$$F_{12} = (x'_1 - 2x'_2), F_{13} = x_1 x'_2. \tag{45}$$

将(41),(45)式代入方程(10),得

$$x''_2 = \lambda_1 x'_1 (x'_1 - 2x'_2) + \frac{x'_2 x''_1}{x'_1},$$

$$x''_3 = x'_1(\lambda_1 x_1 x'_2 - x'_1) + \frac{x'_3 x''_1}{x'_1}. \tag{46}$$

由方程(43),(46)可得

$$\lambda_1 = 1/x_1. \tag{47}$$

将(47)式代入(46)式,得

$$x''_2 = \frac{x'_1(x'_1 - 2x'_2)}{x_1} + \frac{x'_2 x''_1}{x'_1} = h_2,$$

$$x''_3 = x'_1(x'_2 - x'_1) + \frac{x'_3 x''_1}{x'_1} = h_3. \tag{48}$$

由方程(21)和(48)式得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_2}{\mathrm{d}\tau} = \frac{x''_1}{x'_1}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_2}{\mathrm{d}\tau},$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_3}{\mathrm{d}\tau} = x'_1\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_2}{\mathrm{d}\tau} + \frac{x''_1}{x'_1}\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_3}{\mathrm{d}\tau}. \tag{49}$$

(49)式有如下解：

$$\xi_2 = 1, \xi_3 = 0; \tag{50}$$

$$\xi_2 = 0, \xi_3 = 1; \tag{51}$$

$$\xi_2 = \left(\frac{x'_3}{x'_1} - x_2 + x_1\right)^2, \xi_3 = 0. \tag{52}$$

由方程(35)得

$$2\frac{x''_1}{x'_1} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\ln\mu = 0, \tag{53}$$

方程(53)有解

$$\mu = (x'_1)^{-2}\left(\frac{x'_3}{x'_1} - x_2 + x_1\right), \tag{54}$$

$$\mu = (x'_1)^{-2}\left(\frac{x'_2}{x'_1} + x_3\right), \tag{55}$$

$$\mu = (x'_1)^{-2}. \tag{56}$$

利用命题 3，由(50)和(54)式、(51)和(55)式、(52)和(56)式,可分别求得系统 Lie 对称性导致的三个 Hojman 守恒量：

$$I_{\mathrm{H}} = -\left(\frac{x'_3}{x'_1} - x_2 + x_1\right)^{-1} = \mathrm{const}, \tag{57}$$

$$I_{\mathrm{H}} = \left(\frac{x'_2}{x'_1} + x_3\right)^{-1} = \mathrm{const}, \tag{58}$$

$$I_{\mathrm{H}} = -2\left(\frac{x'_3}{x'_1} - x_2 + x_1\right) = \mathrm{const}, \tag{59}$$

注意 :生成元(50)和(51)是 Noether 对称性的,并且都满足(28)式,因此利用命题 4 亦可得到 Noether 对称性导致的 Hojman 守恒量(57)和(58) 生成元(50),(51)和(52)都是 Mei 对称性的,并且都满足(32)式,因此利用命题 5 亦可得到 Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量(57),(58)和(59).

## 7. 结　　语

从本文的研究结论可看出,如果事件空间中的广义非完整约束反力 $\Gamma_\alpha = 0$,本文的研究结论则蜕变为事件空间完整非保守力学系统 Hojman 守恒量的结论 如果 $P_\alpha = \Gamma_\alpha = 0$，本文的研究结论则蜕变为事件空间完整保守系统 Hojman 守恒量的结论 如果 $F_{\beta\alpha} = \dfrac{\partial F_\beta}{\partial x'_\alpha}$,本文的研究结论则蜕变为事件空间 Chetaev 型非完整约束系统 Hojman 守恒量的结论.因此,本文的研究结论具有普遍意义.


[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad Wiss. Göttingen. Math Phys.* **KI** 235

[2] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics I* (New York：Springer Verlay) p141

[3] Vujanović B 1986 *Acta Mech.* **65** 63

[4] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207 (in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[5] Mei F X，Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔、尚　玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[6] Li Y C，Zhang Y，Liang J H，Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 376

[7] Wang S Y，Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[8] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张　毅 2002 物理学报 **51** 461]

[9] Xu Z X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2423 (in Chinese) [许志新 2002 物理学报 **51** 2423]

[10] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 140

[11] Mei F X 2003 *J. Jiangxi Normal Univ.* **27** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2003 江西师范大学学报 **27** 1]

[12] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[13] Chen X W, Li Y M 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 936
[14] Zhang Y, Mei F X 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 1058
[15] Fu J L, Chen L Q 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 695
[16] Luo S K 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 **物理学报** **52** 2941]
[17] Luo S K 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 **物理学报** **53** 5]
[18] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 **物理学报** **53** 666]
[19] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1271 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 **物理学报** **53** 1271]
[20] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2413 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 **物理学报** **53** 2413]
[21] Jia L Q, Zheng S W 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3829 (in Chinese) [贾利群、郑世旺 2006 **物理学报** **55** 3829]
[22] Zheng S W, Jia L Q, Yu H S 2006 *Chin*. *Phys* **15** 1399
[23] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1009 (in Chinese) [许学军、梅凤翔、秦茂昌 2005 **物理学报** **54** 1009]

# Hojman conserved quantities for systems with non-Chetaev nonholonomic constraints in the event space*

Jia Li-Qun[1)†] Zhang Yao-Yu[2)] Zheng Shi-Wang[3)]

1) (*College of Science, Southern Yangtze University, Wuxi* 214122, *China*)

2) (*Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan* 467002, *China*)

3) (*Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Teachers College, Shangqiu* 476000, *China*)

(Received 1 June 2006; revised manuscript received 21 June 2006)

Abstract

Hojman conserved quantities deduced by using the special Lie symmetry, the Noether symmetry and the Mei symmetry for systems with non-Chetaev nonholonomic constraints in the event space are studied. First, the differential equations of motion for the above systems are established. Second, the criterion of the Lie symmetry, the Noether symmetry, the Mei symmetry and the relation between them are obtained. Third, the conservation law obtained by Hojman is generalized and applied to the systems, and Hojman conserved quantities are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

**Keywords**: event space, non-Chetaev nonholonomic constraints system, symmetry, Hojman conserved quantity

**PACC**: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10572021, 10372053) and 211 Engineering of Southern Yangtze University, China (Grant No.0002246).

† E-mail: jlq0@sina.com