第 56 卷 第 2 期 2007 年 2 月
1000-3290/2007/56(02)/0655-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.2, February, 2007

事件空间中力学系统的微分变分原理*

张 毅†

(苏州科技学院土木工程系, 苏州 215011)

(2006 年 6 月 7 日收到; 2006 年 7 月 2 日收到修改稿)

研究事件空间中力学系统的微分变分原理. 基于 D'Alembert 原理, 建立了事件空间中力学系统的 D'Alembert-Lagrange 原理、Jourdain 原理、Gauss 原理和万有 D'Alembert 原理, 给出了这些原理的 Euler-Lagrange 参数形式、Nielsen 参数形式和 Appell 参数形式, 并导出了万有 D'Alembert 原理的 Mangeron-Deleanu 参数形式.

关键词: 分析力学, 事件空间, 微分变分原理
PACC: 0320

1. 引 言

在事件空间中研究力学系统的运动不仅具有几何意义, 而且有重要的力学意义. 由于在事件空间中广义坐标和时间处于同等地位, 因此可以灵活地选取参数, 以便建立较为简单的方程; 其次, 由事件空间中的参数方程不仅可以得到通常位形空间中的动力学方程, 而且可以直接得到能量积分. 1960 年, Synge 建立了事件空间中完整保守系统的参数运动方程[1]; 1982 年 Rumjantsev 研究了事件空间中非完整保守系统带乘子的 Lagrange 方程[2]; 梅凤翔[3—5]、罗绍凯[6—10] 建立了事件空间中非完整系统的变分原理和参数运动方程; 梅凤翔[5,11]、吕哲勤[12] 研究了其积分方法; 李元成[13—15] 给出了事件空间中单面约束系统的 Noether 理论; 梅凤翔研究了事件空间中完整系统的 Noether 对称性[16]、Lie 对称性[16]、形式不变性[17] 和 Hojman 守恒量[18]; 张宏彬等人[19] 给出了事件空间中完整系统的离散变分原理和第一积分. 但是从已查阅的文献来看, 迄今为止尚未有文献系统深入地研究事件空间中力学系统的微分变分原理.

变分原理是整个分析力学的基础和出发点, 是建立各种运动微分方程的重要依据, 在分析力学中占有十分重要的地位[20]. 本文从 D'Alembert 原理出发, 系统、深入地研究了事件空间中力学系统的微分变分原理, 建立了事件空间中的 D'Alembert-Lagrange 原理、Jourdain 原理、Gauss 原理和万有 D'Alembert 原理, 给出了这些原理的 Euler-Lagrange 参数形式、Nielsen 参数形式和 Appell 参数形式, 并导出了万有 D'Alembert 原理的 Mangeron-Deleanu 参数形式.

2. D'Alembert-Lagrange 原理

考虑由 N 个质点构成的力学系统, 第 i 个质点的质量为 m_i, 矢径为 $\boldsymbol{r}_i$, 系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s\,(s=1,\cdots,n)$ 来确定. 建立 $n+1$ 维扩充的位形空间(事件空间), 此空间中点的坐标是广义坐标 $q_s\,(s=1,\cdots,n)$ 和时间 t. 引入记号

$$x_1 = t,\ x_{s+1} = q_s \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{1}$$

那么所有变量 $x_\alpha\,(\alpha=1,\cdots,n+1)$ 可作为某参数 τ 的连续可微函数. 令 $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$ 是 c^2 类曲线, 使得

$$x'_\alpha = \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} \qquad (\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{2}$$

不同时为零. 事件空间中第 i 个质点的矢径可表为 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(x_\alpha)$.

系统的 D'Alembert 原理为

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_i^I + \boldsymbol{R}_i = 0 \qquad (i = 1,\cdots,N), \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{F}_i$, $\boldsymbol{R}_i$ 分别为作用在第 i 个质点上的主动力和约束力, $\boldsymbol{F}_i^I = -m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为加在质点上的惯性力. 将方程(3)两端点乘 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 并对 i 求和, 设事件空间中理想约束的条件为

* 江苏省高校自然科学基金(批准号: 04KJA130135)资助的课题.

† E-mail: weidiezh@pub.sz.jsinfo.net

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0, \tag{4}$$

其中

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha, \tag{5}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0, \tag{6}$$

这是事件空间中力学系统的 D 'Alembert-Lagrange 原理. 下面将原理(6)变换为参数表示的形式.

引入事件空间中的动能[6]

$$D(x_\alpha, x'_\alpha) = x'_1 T = \frac{1}{2x'_1}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}'_i, \tag{7}$$

广义力[5]

$$P_1 = -\sum_{s=1}^{n}Q_s x'_{s+1},$$

$$P_{s+1} = x'_1 Q_s \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{8}$$

其中 $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$, $Q_s = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$ 分别为系统在位形空间中的动能和广义力.

命题 1 对于事件空间中的力学系统, D 'Alembert-Lagrange原理(6)可表为 Euler-Lagrange 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_\alpha}+P_\alpha\right)\delta x_\alpha = 0. \tag{9}$$

证明 由于

$$\boldsymbol{r}'_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha}x'_\alpha, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n+1}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\beta\partial x_\alpha}x'_\beta, \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n+1}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}x'_\beta, \tag{12}$$

因此有

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial x'_\alpha} = \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha}, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial x_\alpha}, \tag{14}$$

(13),(14)式可称为事件空间中的经典 Lagrange 关系.

由(7)式,有

$$\frac{\partial D}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{15}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x'_1} = \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial x'_1}$$

$$-\frac{1}{2(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}'_i, \tag{16}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x'_{s+1}} = \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial x'_{s+1}} \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{17}$$

由(15)—(17)式,并利用关系(13)和(14),我们有

$$\frac{\partial D}{\partial x_1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_1}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_1}x'_1+\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}'_i, \tag{18}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_{s+1}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_{s+1}} = -\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_{s+1}}x'_1, \tag{19}$$

其中

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{(x'_1)^3}(\boldsymbol{r}''_i x'_1-\boldsymbol{r}'_i x''_1), \tag{20}$$

由(18)和(19)式,我们得到以下重要关系:

$$-\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$$

$$= \frac{1}{x'_1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_\alpha}\right)\delta x_\alpha$$

$$-\frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}'_i\delta x_1, \tag{21}$$

由于

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_1}\delta x_1$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_{s+1}}\delta x_{s+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_1}\delta x_1+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta x_{s+1}, \tag{22}$$

其中

$$Q_s = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_{s+1}} \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{23}$$

将 D 'Alembert 原理(3)两边点乘 $\boldsymbol{r}'_i$,并对 i 求和,有

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\boldsymbol{r}'_i = 0, \tag{24}$$

由约束的理想性,得

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\boldsymbol{r}'_i = 0, \tag{25}$$

将(25)式代入方程(24),并利用(10)式得到

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x_1} = -\frac{1}{x'_1}\sum_{s=1}^{n} Q_s x'_{s+1} + \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{r}'_i, \tag{26}$$

将(26)式代入(22)式，并注意到(8)式，我们得到又一个重要关系

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \frac{1}{x'_1}\sum_{\alpha=1}^{n+1} P_\alpha \delta x_\alpha + \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{r}'_i \delta x_1, \tag{27}$$

将(21)式和(27)式代入原理(6)便得到原理(9). 证毕.

如果将广义分成有势的 Q'_s 和非势的 Q''_s

$$Q_s = Q'_s + Q''_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s} + Q''_s, \tag{28}$$

在事件空间中可表为

$$Q_s = -\frac{\partial V}{\partial x_{s+1}} + Q''_s, \tag{29}$$

将(29)式代入(8)式，有

$$P_1 = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_{s+1}} x'_{s+1} + P''_1,$$

$$P_{s+1} = -x'_1 \frac{\partial V}{\partial x_{s+1}} + P''_{s+1}, \tag{30}$$

其中

$$P''_1 = -\sum_{s=1}^{n} Q''_s x'_{s+1},$$

$$P_{s+1} = x'_1 Q''_s, \tag{31}$$

将(30)式代入原理(9)，我们得到

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} + P''_\alpha\right)\delta x_\alpha = 0, \tag{32}$$

其中 $\Lambda = x'_1 L = x'_1 (T - V)$ 为事件空间中的 Lagrange 函数.

对于保守系统，原理(32)成为

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\right)\delta x_\alpha = 0, \tag{33}$$

这是文献[3]给出的事件空间中的 D 'Alembert-Lagrange 原理.

命题 2　对于事件空间中的力学系统，D 'Alembert-Lagrange原理(6)可表示为 Nielsen 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(2\frac{\partial D}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\tau} + P_\alpha\right)\delta x_\alpha = 0. \tag{34}$$

证明　由于

$$\boldsymbol{r}''_i = \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha} x''_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n+1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} x'_\alpha x'_\beta, \tag{35}$$

因此有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}''_i}{\partial x''_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}''_i}{\partial x'_\alpha} = 2\sum_{\beta=1}^{n+1}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} x'_\beta = 2\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial x_\alpha}, \tag{37}$$

(37)式可称为事件空间中的经典 Nielsen 关系.

由(7)式，有

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{x''_1}{2(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \cdot \boldsymbol{r}'_i + \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \cdot \boldsymbol{r}''_i, \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'_1}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\tau} = &-\frac{x''_1}{(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial x'_1} \\ &+ \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial x'_1} \cdot \boldsymbol{r}''_i \\ &+ \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}''_i}{\partial x'_1} \\ &+ \frac{x''_1}{(x'_1)^3}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \cdot \boldsymbol{r}'_i \\ &- \frac{1}{(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \cdot \boldsymbol{r}''_i,\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\tau} = &-\frac{x''_1}{(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial x'_{s+1}} \\ &+ \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial x'_{s+1}} \cdot \boldsymbol{r}''_i \\ &+ \frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}''_i}{\partial x'_{s+1}},\end{aligned} \tag{40}$$

由(15)，(39)和(40)式，并注意到(18)，(19)式，我们有

$$2\frac{\partial D}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial D}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_\alpha}, \tag{41}$$

于是由命题 1 可知(34)式成立. 证毕.

现引入事件空间中的加速度能量

$$W = (x'_1)^3 S = \frac{(x'_1)^3}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i, \tag{42}$$

其中 S 为位形空间的加速度能量[20].

命题 3　对于事件空间中的力学系统，D 'Alembert-Lagrange原理(6)可表示为 Appell 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(-\frac{\partial W}{\partial x''_\alpha} + P_\alpha\right)\delta x_\alpha = 0. \tag{43}$$

证明　将(20)式代入(42)式后，计算得到

$$\frac{\partial W}{\partial x''_1} = \frac{1}{(x'_1)^3}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}''_i}{\partial x''_1} x'_1 - \boldsymbol{r}'_i\right) \cdot (\boldsymbol{r}''_i x'_1 - \boldsymbol{r}'_i x''_1), \tag{44}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x''_{s+1}} = \frac{1}{(x'_1)^3}\sum_{i=1}^{N} m_i x'_1 \frac{\partial \boldsymbol{r}''_i}{\partial x''_{s+1}} \cdot (\boldsymbol{r}''_i x'_1 - \boldsymbol{r}'_i x''_1). \tag{45}$$

由(15),(44)和(45)式,并注意到(18),(19)式,我们有

$$\frac{\partial W}{\partial x''_\alpha} = -\frac{\partial D}{\partial x_\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_\alpha}, \tag{46}$$

由命题 1 可知(43)式成立.证毕.

3. Jourdain 原理

将方程(3)两端点乘 $\delta \boldsymbol{r}'_i$ 并对 i 求和,设事件空间中 Jourdain 意义下的理想约束条件为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}'_i = 0, \tag{47}$$

其中

$$\delta \boldsymbol{r}'_i = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha}\delta x'_\alpha, \tag{48}$$

则事件空间中力学系统的 Jourdain 原理为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}'_i = 0, \\ \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \delta \boldsymbol{r}'_i \neq 0, \end{cases} \tag{49}$$

其中 $\ddot{r}_i$ 为第 i 个质点的加速度,其参数表示如(20)式所示.

容易验证,命题 1—3 对 Jourdain 意义下的虚位移仍然成立,即有下述命题:

命题 4 对于事件空间中的力学系统,Jourdain 原理(49)可表示为 Euler-Lagrange 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial D}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_\alpha} + P_\alpha\right)\delta x'_\alpha = 0. \tag{50}$$

命题 5 对于事件空间中的力学系统,Jourdain 原理(49)可表示为 Nielsen 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(2\frac{\partial D}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\tau} + P_\alpha\right)\delta x'_\alpha = 0. \tag{51}$$

命题 6 对于事件空间中的力学系统,Jourdain 原理(49)可表示为 Appell 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(-\frac{\partial W}{\partial x''_\alpha} + P_\alpha\right)\delta x'_\alpha = 0. \tag{52}$$

4. Gauss 原理

将方程(3)两端点乘 $\delta \boldsymbol{r}''_i$ 并对 i 求和,设事件空间中 Gauss 意义下的理想约束条件为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}''_i = 0, \tag{53}$$

其中

$$\delta \boldsymbol{r}''_i = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha}\delta x''_\alpha, \tag{54}$$

则事件空间中力学系统的 Gauss 原理为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}''_i = 0, \\ \delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}'_i = 0, \delta \boldsymbol{r}''_i \neq 0. \end{cases} \tag{55}$$

命题 1—3 对 Gauss 意义下的虚位移仍然成立,即有下述命题:

命题 7 对于事件空间中的力学系统,Gauss 原理(55)可表示为 Euler-Lagrange 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial D}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_\alpha} + P_\alpha\right)\delta x''_\alpha = 0. \tag{56}$$

命题 8 对于事件空间中的力学系统,Gauss 原理(55)可表示为 Nielsen 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(2\frac{\partial D}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\tau} + P_\alpha\right)\delta x''_\alpha = 0. \tag{57}$$

命题 9 对于事件空间中的力学系统,Gauss 原理(55)可表示为 Appell 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(-\frac{\partial W}{\partial x''_\alpha} + P_\alpha\right)\delta x''_\alpha = 0. \tag{58}$$

5. 万有 D 'Alembert 原理

1962 年,Mangeron 和 Deleanu 提出了万有 D 'Alembert原理[20],它是最一般的微分变分原理.下面我们给出事件空间中力学系统的万有 D 'Alembert 原理为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i^{(m)} = 0, \\ \delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}'_i = \cdots = \delta \boldsymbol{r}_i^{(m-1)} = 0, \\ \delta \boldsymbol{r}_i^{(m)} \neq 0, \end{cases}$$

$$(m = 0,1,2,\cdots) \tag{59}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i^{(m)}$ 是点的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 对参数 τ 的 m 阶导数.原理(59)对约束的理想性限制可表示为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i^{(m)} = 0, \tag{60}$$

其中

$$\delta \boldsymbol{r}_i^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha^{(m)}. \tag{61}$$

容易得到下述命题:

命题 10 对于事件空间中的力学系统,万有 D 'Alembert原理(59)可表示为 D 'Alembert-Lagrange 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_\alpha}+P_\alpha\right)\delta x_\alpha^{(m)}=0. \tag{62}$$

命题 11　对于事件空间中的力学系统，万有 D'Alembert原理(59)可表示为 Nielsen 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(2\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\tau}+P_\alpha\right)\delta x_\alpha^{(m)}=0. \tag{63}$$

命题 12　对于事件空间中的力学系统，万有 D'Alembert原理(59)可表示为 Appell 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(-\frac{\partial W}{\partial x''_\alpha}+P_\alpha\right)\delta x_\alpha^{(m)}=0. \tag{64}$$

下面进一步将事件空间中万有D'Alembert原理(59)表示为 Mangeron-Deleanu 形式.

命题 13　对于事件空间中的力学系统，万有 D'Alembert原理(59)可表示为 Mangeron-Deleanu 参数形式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left\{\frac{1}{m}\left[(m+1)\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{(m)}}\frac{\mathrm{d}^mD}{\mathrm{d}\tau^m}\right]+P_\alpha\right\}\delta x_\alpha^{(m)}=0$$
$$(m=1,2,\cdots). \tag{65}$$

证明　将点的矢径 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(x_\alpha)$ 对参数 τ 求 m 阶导数，得到

$$\boldsymbol{r}_i^{(m)}=\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha}x_\alpha^{(m)}+m\sum_{\beta=1}^{n+1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}x_\alpha^{(m-1)}x'_\beta+\cdots, \tag{66}$$

其中未写出之项不含 $x_\alpha^{(m)}$，$x_\alpha^{(m-1)}$. 由此得到下述两个重要关系：

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(m)}}{\partial x_\alpha^{(m)}}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(m)}}{\partial x_\alpha^{(m-1)}}=m\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial x_\alpha}, \tag{67}$$

将事件空间中的动能 D 对参数 τ 求 m 阶导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^mD}{\mathrm{d}\tau^m}=&\frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}_i^{(m+1)}+\frac{m}{x'_1}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}''_i\cdot\boldsymbol{r}_i^{(m)}-\frac{mx''_1}{(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}_i^{(m)}\\&-\frac{mx_1^{(m)}}{(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}''_i+\frac{mx_1^{(m)}x''_1}{(x'_1)^3}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}'_i\\&-\frac{x_1^{(m+1)}}{2(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}'_i+\cdots,\end{aligned} \tag{68}$$

其中未写出之项不含 $\boldsymbol{r}_i^{(m)}$，$\boldsymbol{r}_i^{(m+1)}$. 由(68)式，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1^{(m)}}\frac{\mathrm{d}^mD}{\mathrm{d}\tau^m}=&\frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(m+1)}}{\partial x_1^{(m)}}+\frac{m}{x'_1}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}''_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(m)}}{\partial x_1^{(m)}}\\&-\frac{mx''_1}{(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(m)}}{\partial x_1^{(m)}}-\frac{m}{(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}''_i\\&+\frac{mx''_1}{(x'_1)^3}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}'_i,\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_{s+1}^{(m)}}\frac{\mathrm{d}^mD}{\mathrm{d}\tau^m}=&\frac{1}{x'_1}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(m+1)}}{\partial x_{s+1}^{(m)}}+\frac{m}{x'_1}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}''_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(m)}}{\partial x_{s+1}^{(m)}}\\&-\frac{mx''_1}{(x'_1)^2}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(m)}}{\partial x_{s+1}^{(m)}}.\end{aligned} \tag{70}$$

由(69)，(70)和(15)式，并注意到(18)和(19)式，我们有

$$\frac{1}{m}\left[(m+1)\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{(m)}}\frac{\mathrm{d}^mD}{\mathrm{d}\tau^m}\right]=\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial D}{\partial x'_\alpha}. \tag{71}$$

于是由命题 10 可知(65)式成立. 证毕.

事件空间中万有 D'Alembert 原理的 Mangeron-Deleanu 参数形式(65)具有普遍意义.

当 $m=1$ 时，命题 13 成为命题 5.

当 $m=2$ 时，命题 13 给出事件空间中万有 D'Alembert原理的二阶 Ценов 形式为

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left[\frac{1}{2}\left(3\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x''_\alpha}\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}\tau^2}\right)+P_\alpha\right]\delta x''_\alpha=0. \tag{72}$$

当 $m=3$ 时，命题 13 给出事件空间中万有 D'Alembert原理的三阶 Ценов 形式为

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left[\frac{1}{3}\left(4\frac{\partial D}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x'''_\alpha}\frac{\mathrm{d}^3D}{\mathrm{d}\tau^3}\right)+P_\alpha\right]\delta x'''_\alpha=0. \tag{73}$$

[1] Synge L J 1960 *Classical Dynamics* (Berlin: Springer)

[2] Rumyantsev V V 1983 *Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics* (Torino: Science Press) p697

[3] Mei F X 1988 *Acta Mech. Sin.* **20** 557(in Chinese)[梅凤翔 1988 力学学报 **20** 557]

[4] Mei F X 1988 *Acta Armamentarii* **9** 27(in Chinese)[梅凤翔 1988 兵工学报 **9** 27]

[5] Mei F X 1990 *Acta Mech. Sin.* **6** 160[梅凤翔 1990 力学学报 **6** 160]

[6] Luo S K 1991 *J. Chengdu University* (Natural Sci.) **10** 30 (in Chinese)[罗绍凯 1991 成都大学自然科学学报 **10** 30]

[7] Luo S K 1992 *J. Tianjin Educational Institute* **1** 12 (in Chinese)[罗绍凯 1992 天津教育学院学报 **1** 12]

[8] Luo S K 1993 *J. Guangxi University* **18** 52(in Chinese)[罗绍凯 1993 广西大学学报 **18** 52]

[9] Luo S K 1992 *J. Inner Mongolia Normal University* **21** 29 (in Chinese)[罗绍凯 1992 内蒙古师大学报 **21** 29]

[10] Luo S K 1990 *Huanghuai J.* **6** 23(in Chinese)[罗绍凯 1990 黄淮学刊 **6** 23]

[11] Mei F X 1988 *J. Beijing Inst. Technol.* **8** 22(in Chinese)[梅凤翔 1988 北京理工大学学报 **8** 22]

[12] Lu Z Q 1988 *J. Beijing Inst. Technol.* **8** 24 (in Chinese)[吕哲勤 1988 北京理工大学学报 **8** 24]

[13] Li Y C, Liang J H, Zhang Y, Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **20** 21(in Chinese)[李元成、梁景辉、张 毅、梅凤翔 2000 北京理工大学学报 **20** 21]

[14] Li Y C, Zhang Y, Liang J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 543

[15] Li Y C, Zhang Y, Liang J H 2001 *Acta Mech. Solida Sin.* **22** 75 (in Chinese)[李元成、张 毅、梁景辉 2001 固体力学学报 **22** 75]

[16] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[17] Mei F X 2003 *J. Jiangxi Normal University* (Natural Sci.) **27** 1 (in Chinese)[梅凤翔 2003 江西师范大学学报(自然科学版) **27** 1]

[18] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1009(in Chinese)[许学军、梅凤翔、秦茂昌 2005 物理学报 **54** 1009]

[19] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 888

[20] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)[梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京 北京理工大学出版社)]

Differential variational principles of mechanical systems in the event space*

Zhang Yi†

(*Department of Civil Engineering, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou* 215011, *China*)

(Received 7 June 2006; revised manuscript received 2 July 2006)

Abstract

In this paper, the differential variational principles of mechanical systems in the event space are studied. The D'Alembert-Lagrange principle, the Jourdain principle, the Gauss principle and the universal D'Alembert principle in the event space are established on the basis of the D'Alembert principle of the system. The parametric forms of Euler-Lagrange, Nielsen and Appell for these principles are given, and the parametric form of Mangeron-Deleanu for the universal D'Alembert principle is deduced.

Keywords: analytical mechanics, event space, differential variational principle

PACC: 0320

* Project supported by the Natural Science Foundation of High Education of Jiangsu Province, China (Grant No. 04KJA130135).

† E-mail: weidiezh@pub.sz.jsinfo.net