

抛物线性限制势量子点量子比特 及其光学声子效应*

王子武† 肖景林

(内蒙古民族大学物理与机电学院, 通辽 028043)

(2006 年 5 月 30 日收到, 2006 年 7 月 13 日收到修改稿)

在抛物量子点中电子与体纵光学声子强耦合的条件下, 应用 Peaker 变分方法得出了电子的基态和第一激发态的本征能量及基态和第一激发态本征波函数. 量子点中这样的二能级体系可作为一个量子比特. 当电子处于基态和第一激发态的叠加态时, 计算出电子在空间的概率分布作周期性振荡, 并且得出了振荡周期随受限长度及耦合强度的变化关系.

关键词: 量子点, 量子信息, 量子比特

PACC: 0367, 7138

1. 引 言

量子计算机是目前信息科学研究的热点之一, 它通过两态量子系统储存信息, 在量子力学原理的基础上实现量子计算. 近年来, 人们已经相继提出了多种实现量子计算机的方案^[1-4]. 为了显示量子计算机的优越性, 量子计算机必须由数千个量子比特组成, 而目前实验中最多也只是做到了 7 个量子比特量子逻辑门操作演示^[5]. 要想将量子比特集成大的规模, 显然采用固态量子比特体系是最可行的方案. 1998 年, 澳大利亚南威尔士大学的 Kane 提出一种著名的固态核磁共振量子计算机构造方案^[6]; 1999 年, 日本科学家 Nakamura 等人^[7]首次利用超导电荷比特从实验上验证了单量子比特的全部操作, 这是在固态量子比特研究上的重大突破. 而半导体的自组织生长量子点由于其近乎完美的晶体结构受到人们的重视, 因此利用半导体量子点来实现量子比特是固态量子信息领域最热门的研究方向之一. 对量子点方案的研究工作很多, 内容也很丰富, 但目前还只是基础研究阶段. 本文根据在抛物量子点中电子与体纵光学声子强耦合的条件下得出了电子的基态和第一激发态的本征能量及基态波函数和第一

激发态波函数. 量子点中这样的二能级体系可作为一个量子比特. 对于这样的单量子比特, Li 等人^[8,9]提出了一个参数相图方案, 定义了单量子点能作为量子比特的参数使用范围. 当电子处于基态和第一激发态的叠加态时, 我们得出电子在空间的概率分布以一定的时间作周期性变化, 分别讨论了振荡周期与耦合强度的关系, 振荡周期与受限长度的关系. 我们的结果在理论和实验上都有一定的指导意义.

2. 理论模型

电子在一个方向(设为 Z 方向)比另外两个方向强受限得多, 所以只考虑电子在 $X-Y$ 平面上运动, 设在单一量子点中电子束缚势为抛物势

$$V(\rho) = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \rho^2, \quad (1)$$

其中 m^* 为电子带质量, ρ 为二维坐标矢量, ω_0 为量子点的受限强度, 电子-声子体系的哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla_{\rho}^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \rho^2 + \sum_q \hbar \omega_{LO} b_q^+ b_q + \sum_q (V_q e^{iq \cdot r} b_q + h.c.), \quad (2)$$

为了计算的方便取 $\hbar = 2m^* = 1$, 则(2)式变为

* 国家自然科学基金(批准号: 10347004)资助的课题.

† E-mail: wangziwu211@126.com

$$H = -\nabla_{\rho}^2 + \frac{1}{4}\omega_0^2\rho^2 + \sum_q b_q^+ b_q \omega_{LO} + \sum_q (V_q e^{iq \cdot r} b_q + h.c.), \quad (3)$$

其中 ω_{LO} 是体纵光学声子的步元率, b_q^+ (b_q) 为波矢 q ($q_{//}$, q_{\perp}) 的体纵光学声子的产生(湮灭)算符, $r = (\rho, z)$ 为电子坐标矢量, 且

$$V_q = \frac{i}{q} (\omega_{LO})^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4\pi\alpha}{V} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{2} (\omega_{LO})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\epsilon_{\infty}} - \frac{1}{\epsilon_0} \right). \quad (5)$$

对哈密顿量(2)作 LLP 变换

$$U = \exp\left[\sum_q (f_q b_q^+ - f_q^* b_q) \right], \quad (6)$$

其中 f_q 是变分函数, 则

$$H' = U^{-1} H U. \quad (7)$$

在高斯函数近似下, 依据 Peakar 类型的变分方法电子-声子体系的基态尝试波函数可以选为

$$|\varphi_{e-p}\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}\right) |\xi(z)\rangle |0_{ph}\rangle, \quad (8)$$

其中 λ 是变分参量, 因为电子在 Z 方向强受限, 可将其看成只在无限薄的狭层内运动, 所以 $\xi(z) | \xi(z) = \delta(z)$, $|0_{ph}\rangle$ 为无微扰零声子态, 满足 $b_q |0_{ph}\rangle = 0$, 则电子的基态能量为

$$E_0(\lambda) = \langle \varphi_{e-p} | H' | \varphi_{e-p} \rangle = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2 l_0^4} - \frac{1}{2} (2\pi\omega_{LO})^{\frac{1}{2}} \alpha \lambda, \quad (9)$$

其中 $l_0 = \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, 则抛物量子点中电子的基态能量为

$$E_0 = \lambda_0^2 + \frac{1}{\lambda_0^2 l_0^4} - \frac{1}{2} (2\pi\omega_{LO})^{\frac{1}{2}} \alpha \lambda_0. \quad (10)$$

电子-声子体系的第一激发态尝试波函数可选为

$$|\varphi_{e-p}'\rangle = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\pi}} \rho \exp\left(-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}\right) \times \exp(\pm i\phi) |\xi(z)\rangle |0_{ph}\rangle, \quad (11)$$

满足

$$\langle \varphi_{e-p} | \varphi_{e-p}' \rangle = 0, \quad \langle \varphi_{e-p}' | \varphi_{e-p}' \rangle = 1. \quad (12)$$

由 $E_1 = \langle \varphi_{e-p}' | H' | \varphi_{e-p}' \rangle$ 可得出电子的第一激发态能量

$$E_1(\lambda) = 2\lambda^2 + \frac{2}{\lambda^2 l_0^4} - \frac{11}{32} (2\pi\omega_{LO})^{\frac{1}{2}} \alpha \lambda, \quad (13)$$

则抛物量子点中电子的第一激发态能量为

$$E_1 = 2\lambda_0^2 + \frac{2}{\lambda_0^2 l_0^4} - \frac{11}{32} (2\pi\omega_{LO})^{\frac{1}{2}} \alpha \lambda_0. \quad (14)$$

用变分法得出 λ_0 的值, 即可得出本征能级和相应的本征波函数.

这样我们得出了一个量子比特所需要的二能级体系. 当电子处于这样一个叠加态时

$$|\psi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad (15)$$

其中

$$|0\rangle = \varphi_0(\rho) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda_0^2 \rho^2}{2}\right), \quad (16)$$

$$|1\rangle = \varphi_1(\rho) = \frac{\lambda_0^2}{\sqrt{\pi}} \rho \exp\left(-\frac{\lambda_0^2 \rho^2}{2}\right) \exp(\pm i\phi). \quad (17)$$

叠加态随时间的演化可以表示为

$$\begin{aligned} \psi_{01}(t, \rho) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_0(\rho) \exp\left(-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_1(\rho) \exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

电子在空间的概率密度

$$\begin{aligned} \rho(\rho, t) = & |\psi_{01}(t, \rho)|^2 \\ = & \frac{1}{2} [|\varphi_0(\rho)|^2 + |\varphi_1(\rho)|^2 \\ & + \varphi_0^*(\rho) \varphi_1(\rho) \exp(i\omega_{01} t) \\ & + \varphi_0(\rho) \varphi_1^*(\rho) \exp(-i\omega_{01} t)] \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\omega_{01} = \frac{(E_1 - E_0)}{\hbar}. \quad (20)$$

3. 结果与讨论

为了更清楚更直观的说明抛物量子点量子比特中电子空间的概率分布及振荡周期与耦合强度 α , 受限长度 l_0 的关系, 数值结果表于下列图中. 为了文中说明的物理规律的普遍性, 本文讨论中出现的物理量采用无量纲.

图 1 描绘了在耦合强度 $\alpha = 6$, 受限长度 $l_0 = 0.5$, 位相差 $\phi = 2\pi$, 电子处于叠加态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 时, 电子的概率密度 $|\psi_{01}(t, x, y, 0)|^2$ 随时间的演化. 电子的概率密度以周期 $T_0 = \frac{\hbar}{(E_1 - E_0)}$ 在空间振荡. 时间 t 在图 1(a)(b)(c)(d)(e) 中分别是 $0, T_0, 0.25 T_0, 0.5 T_0, 0.75 T_0, 1 T_0$.

图 2 描绘了在受限长度 l_0 分别为 0.4, 0.5, 0.6 时, 振荡周期 T_0 随耦合强度的变化关系. 从图中可

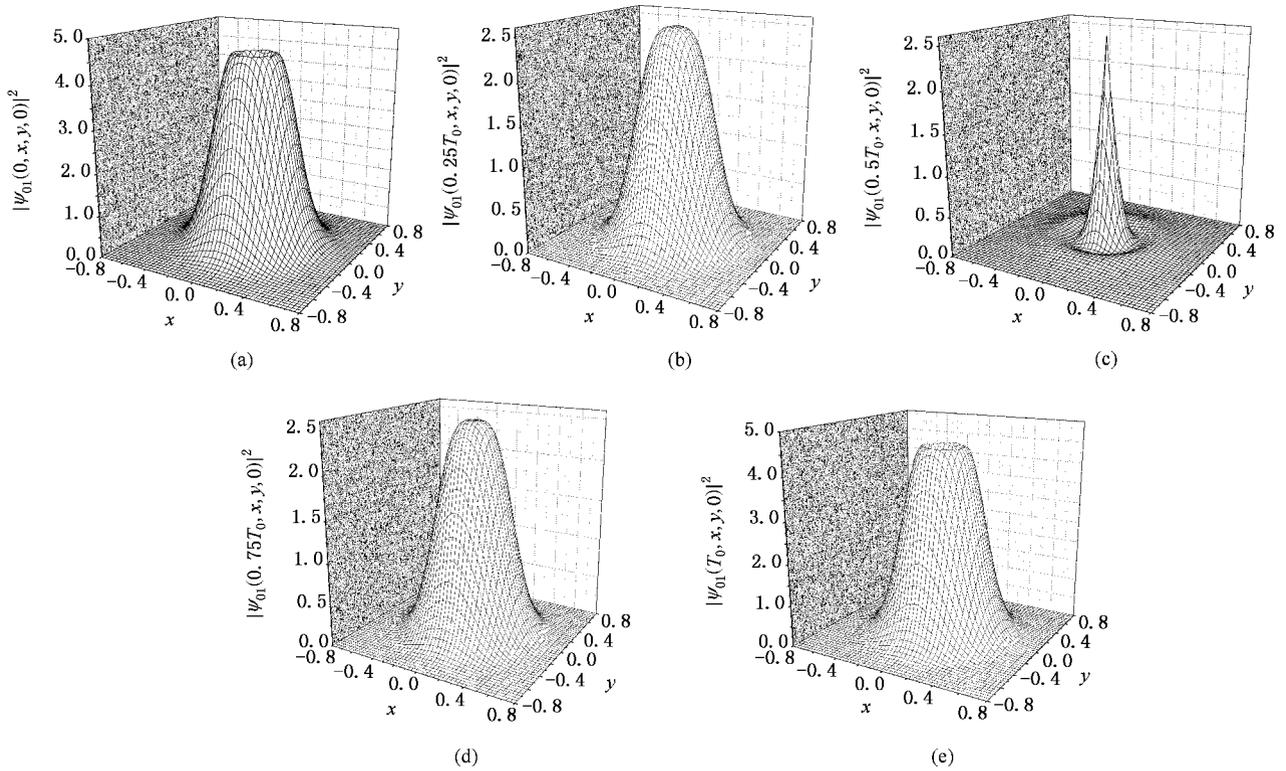


图 1 电子在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态的时间演化, 在(a)(b)(c)(d)和(e)中时间分别为 $0, T_0, 0.25 T_0, 0.5 T_0, 0.75 T_0, T_0$

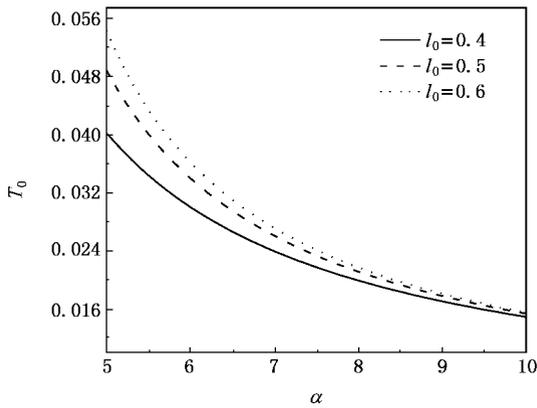


图 2 在抛物量子点中振荡周期和耦合强度的变化关系

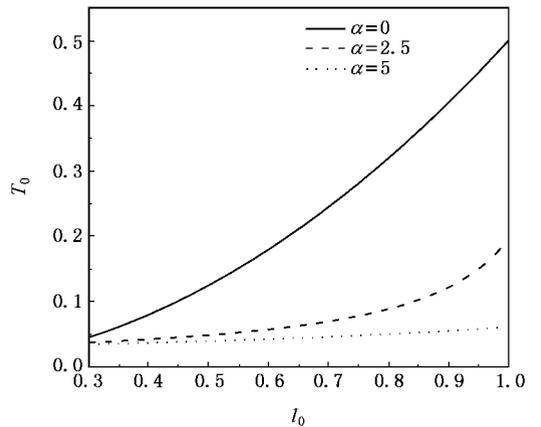


图 3 在抛物量子点中振荡周期和受限长度的变化关系

见, 振荡周期 T_0 随着耦合强度增加而减小. 这是由于随着耦合强度的增加, 由于激发态的电子-声子耦合的强度比基态的电子-声子耦合的强度弱^[10, 11], 使第一激发态与基态之间能级差增加, 而造成振荡周期 T_0 的减小. 同时从图中可以看出随着耦合强度的增加, 耦合强度对振荡周期的影响起主要作用, 而受限长度对其的影响趋于很小.

图 3 描绘了在耦合强度 α 分别为 $0, 2.5, 5$ 时, 振荡周期 T_0 随受限长度的变化关系. 对于 $\alpha = 0$, 是

电子与声子不耦合的情况. 从图中可以看出不论是耦合还是不耦合, 振荡周期 T_0 都随着受限长度的增加而增加. 受限长度对振荡周期的影响在电子与声子不存在耦合时比存在耦合时要明显的多, 图 3 同样说明了: 当电子与声子耦合时, 耦合强度对振荡周期的影响起主要作用.

在绝对温度条件下, 当 $\alpha = 0$ 时, 即晶体中电子与声子不存在耦合时, 根据文中计算的结果可知电

子的基态本征能量 $E_0 = \hbar\omega_0$, 而第一激发态本征能量 $E_1 = 2\hbar\omega_0$, 此时 $\lambda_0 = \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$. 而在实际的晶体中电子与声子的耦合都是在强区域的, 特别是晶体的尺寸受到限制时, 而正是由于电子和声子的耦合使得电子的基态本征能量和第一激发态本征能量的差值变大, 使得跃迁频率 ω_{01} 变大. 实际中量子位不能脱离环境而独立存在, 必然与环境热库^[12,13]相互作用, 这样必然导致量子位叠加态的破坏, 即消相干. 当 $\omega_{01} > \omega_{LO}$ 时, 且使环境保持低温, 热库对消相干的影响是可以忽略, 只考虑真空涨落对消相干的影响^[14], 因此我们讨论的结果有很重要的实际

意义.

4. 结 论

我们用 Peaker 变分方法, 在电子与体纵光学声子强耦合的条件下, 得出了抛物量子点中电子的基态能量和第一激发态的能量及其相应的本征波函数. 量子点中这样的二能级体系可以作为一个量子比特. 当电子处于基态和第一激发态的叠加态时, 电子的概率密度在空间作周期性振荡, 得出了振荡周期随耦合强度的增加而减小, 随受限长度的增加而增大.

- [1] Li S S , Wu X G , Zheng H Z 2004 *Physics* **33** 404(in Chinese) [李树深、吴晓光、郑厚植 2004 物理 **33** 404]
- [2] Xu C K , Xu K Z 1999 *Physics* **28** 334(in Chinese) [徐春凯、徐克尊 1999 物理 **28** 334]
- [3] Jin G S , A Hmadliz , Li S S , Niu Z C , Yang F H , Feng S L 2002 *Physics* **31** 773 (in Chinese) [金光生、艾合买提·阿不力孜、李树深、牛智川、杨富华、封松林 2002 物理 **31** 773]
- [4] Li Z X , Zou J , Cai J F , Shao B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4730 (in Chinese) [李照鑫、邹健、蔡金芳、邵彬 2006 物理学报 **55** 4730]
- [5] Vandersypen L M K 2001 *Nature* **414** 883
- [6] Kane B E 1998 *Nature* **393** 133
- [7] Nakamura Y , Pashkin Y A , Tsai J S 1999 *Nature* (London) **398** 786
- [8] Li S S , Xia J B , Yang F H , Niu Z C , Feng S L , Zheng H Z 2001 *J.*

Appl. Phys. **90** 6151

- [9] Li S S , Long G L , Bai F S , Feng S L , Zhang H Z 2001 *Pro. Natl. Acad. Sci. USA* **98** 11847
- [10] Yildirim T , Ercelebi A 1999 *J. Phys. Condensed Matter* **3** 1271
- [11] Chen S H , Xiao J L 2005 *Chin. J. Lumin.* **26** 27(in Chinese) [陈时华、肖景林 2005 发光学报 **26** 27]
- [12] Li C Z , Huang M Q , Chen P X 2000 *Quantum communication and quantum computing* (Changsha : National University of Defence Technology Press) [李承祖、黄明球、陈平形 2000 量子通信和量子计算(长沙:国防科技大学出版社)]
- [13] Xiang S H , Song K H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 529(in Chinese) [向少华、宋克慧 2006 物理学报 **55** 529]
- [14] Chen P X , Li C Z , Huang M Q 2000 *Acta Opt. Sin.* **29** 5 (in Chinese) [陈平形、李承祖、黄明球 2000 光子学报 **29** 5]

Parabolic linear bound potential quantum dot qubit and its optical phonon effect^{*}

Wang Zi-Wu[†] Xiao Jing-Lin

(*Department of Physics and Electromechanics, Inner Mongolia National University, Tongliao 028043, China*)

(Received 30 May 2006 ; revised manuscript received 13 July 2006)

Abstract

On the condition of electric-LO phonon strong coupling in parabolic quantum dot, we obtain the eigenenergy and the eigenfunctions of the ground state and the first excited state by using variational method of Peakar type. This system in quantum dot may be employed as a two-level quantum system-qubit. When the electron is in the superposition state of the ground state and the first excited state, we obtain the time evolution of the electron density. It is shown that the period of oscillation decreases with the strength of coupling increasing when the confined length is constant. And the period of oscillation increases with the confined length increasing when the strength coupling is constant.

Keywords : quantum dot, quantum information, qubit

PACC : 0367, 7138

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10347004).

[†] E-mail : wangziwu211@126.com