

Reissner-Nordstrom 黑洞中带电粒子由隧穿导致的 Hawking 辐射的进一步讨论^{*}

胡亚鹏[†] 张靖仪 赵 峥

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2006 年 1 月 9 日收到, 2006 年 2 月 27 日收到修改稿)

以 Reissner-Nordstrom 黑洞(R-N 黑洞)为例,从黑洞热力学定律出发,对 R-N 黑洞中的带电粒子的量子隧穿效应进行了重新分析.将作用量的虚部重写成黑洞热力学定律的形式后,发现在 Parikh 工作框架下的量子隧穿效应与黑洞热力学的第一、第二定律有潜在的联系;而且,如果认为量子隧穿过程为可逆过程,则量子隧穿效应中的结果与黑洞热力学第一、第二定律是一致的.换言之,Parikh 的结论只对可逆过程成立.

关键词: Reissner-Nordstrom 黑洞, 黑洞热力学定律, 隧穿, 可逆过程

PACC: 0420, 9760L

1. 引 言

在 2000 年, Parikh 和 Wilczek 对 Hawking 辐射进行了重新考虑. 他们认为 Hawking 辐射是一种量子隧穿效应, 而势垒则是由辐射粒子本身的自引力相互作用所产生的. 由此他们计算了史瓦西黑洞、史瓦西-desitter 黑洞等, 并得到了相应的辐射修正谱. 特别是, 他们的结果与量子力学中的么正性原理是潜在一致的, 故支持了 Hawking 辐射中的信息守恒^[1-4]. 此后, 在 Parikh 的工作框架下, Parikh 的原始工作被推广到了许多其他的静态与稳态黑洞^[5-10]. 本文就是基于张靖仪等人的工作^[5], 对 Reissner-Nordstrom 黑洞(R-N 黑洞)中的带电粒子隧穿效应进行了重新分析. 众所周知, 无论是在 Parikh 的原始工作还是其推广的工作中, 黑洞热力学定律均未被提及. 而且表面上看起来, 黑洞热力学定律好像与量子隧穿效应毫无联系. 但是它们真的没有联系吗? 本文以 R-N 黑洞为例对此进行讨论. 首先, 我们对张靖仪等人的工作做了个简单的回顾; 然后, 我们从黑洞热力学定律出发重写了该工作中的作用量虚部; 最后, 我们对所得的结果做了个简单的总结, 并讨论了 Parikh 工作框架下的量子隧穿效应与黑洞热力学

定律的联系^[9].

2. 回 顾

根据文献[5], 对于 R-N 黑洞, 它的 Painleve 线元为

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

由(1)式我们可得到四维电磁势为

$$A_\mu = (A_t, 0, 0, 0), \quad (2)$$

其中 $A_t = -Q/r$. 又因为 R-N 黑洞为带电黑洞, 故我们考察的系统应由黑洞和外面的电磁场组成. 该系统的拉氏函数为

$$L = L_m + L_e, \quad (3)$$

式中 $L_e = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 是电磁场的拉氏量, 对应的广义坐标为 $A_\mu = (A_t, 0, 0, 0)$. 考虑到广义坐标 A_μ 是可遗坐标, 故作用量的表达式应为

$$S = \int_{t_i}^{t_f} (L - P_{A_t} \dot{A}_t) dt, \quad (4)$$

其中 P_{A_t} 是电磁场与 A_t 共轭的广义动量. 粒子穿透势垒的概率的表达式可写为

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10475013, 10373003)和国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号: 2003CB716300)资助的课题.

[†] E-mail: huzhengzhong2050@163.com

$$\Gamma \sim e^{-2\text{Im}S}, \quad (5)$$

利用哈密顿方程

$$r = \frac{dH}{dp_r} \Big|_{(r, i_{A_t}, i_{p_{A_t}})}, \quad (6)$$

$$A_t = \frac{dH}{dp_{A_t}} \Big|_{(A_t, i_r, i_{p_r})}, \quad (7)$$

我们可求得作用量的虚部为

$$\text{Im}S = \text{Im} \left\{ \int_{r_i}^{r_f} \left[\int_{(M, E_Q)}^{(M-\omega, E_Q-q)} \frac{1}{\dot{r}} (dH)_{r, i_{A_t}, i_{p_{A_t}}} - \frac{1}{\dot{r}} (dH)_{A_t, i_r, i_{p_r}} \right] dr \right\}, \quad (8)$$

式中 E_Q 表示电磁场能量. 而

$$(dH)_{r, i_{A_t}, i_{p_{A_t}}} = dM, \quad (9)$$

$$(dH)_{A_t, i_r, i_{p_r}} = \frac{Q}{r} dQ, \quad (10)$$

辐射出的带电粒子的径向出射速度为

$$\begin{aligned} r = \frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{g_{00}}{g_{01}} \\ &= \frac{1}{2r} \frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{\sqrt{2Mr - Q^2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

故将(9)–(11)式代入(8)式得

$$\begin{aligned} \text{Im}S &= -\pi \left[\int_{(M, Q)}^{(M-\omega, Q-q)} \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})}{\sqrt{M^2 - Q^2}} dM \right. \\ &\quad \left. - \frac{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}{\sqrt{M^2 - Q^2}} Q dQ \right] \\ &= -\frac{\pi}{2} \left[(M - \omega) + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} \right] \\ &\quad - \left[M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \Delta S_{BH}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. 量子隧穿效应与黑洞热力学定律的联系

通常, 我们分析(12)式, 可看出该结果与量子力学中的么正性原理是一致的, 故支持了 Hawking 辐射中的信息守恒. 而我们的工作也是从分析(12)式开始, 不过我们主要是从黑洞热力学定律的角度来分析它的.

我们知道, 对于 R-N 黑洞, 当一个有质量带电的粒子隧穿出事件视界时, 黑洞的质量与电荷也会随之改变. 根据黑洞热力学第一定律, 这种变化满足的微分公式为^[10]

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + V dQ. \quad (13)$$

如果我们认为隧穿过程是一个可逆过程的话, 根据热力学第二定律(13)式又可写为

$$dM = T dS + V dQ, \quad (14)$$

(14)式等价于

$$dS = \frac{dM}{T} - \frac{V}{T} dQ. \quad (15)$$

而对于 R-N 黑洞有^[6]

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})}, \\ V &= \frac{Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

将(16)式代入(15)式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dM}{T} - \frac{V}{T} dQ \\ &= \frac{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})}{\sqrt{M^2 - Q^2}} dM \\ &\quad - \frac{2\pi(Q(M + \sqrt{M^2 - Q^2}))}{\sqrt{M^2 - Q^2}} dQ. \end{aligned} \quad (17)$$

利用(17)式, 我们可将(12)式中的作用量虚部重新写为

$$\begin{aligned} \text{Im}S &= -\frac{1}{2} \int_{(M, Q)}^{(M-\omega, Q-q)} \frac{1}{T} dM - \frac{V}{T} dQ \\ &= -\frac{1}{2} \int_{S_i}^{S_f} dS = -\frac{1}{2} \Delta S_{BH}. \end{aligned} \quad (18)$$

显然(18)式的结果与(12)式的一致. 不同的是, 从(18)式里可容易看出 Parikh 工作框架下的量子隧穿效应与黑洞热力学定律是有联系的.

4. 结论与讨论

在第2与第3节的研究中, 我们从(12)(18)式里可看出, Parikh 工作框架下的量子隧穿效应与黑洞热力学定律是有潜在联系的. 具体的来说, 是与黑洞热力学的第一、第二定律有联系, 而且利用了可逆过程中的热力学第二定律形式. 换句话说, 在 Parikh 工作框架下的量子隧穿效应, 其实已经隐含假定了黑洞热力学的第一、第二定律, 并且默认粒子隧穿过程为可逆过程. 更进一步讲, Parikh 的结论只对可逆过程成立. 然而, 由于黑洞热容量为负, 一般与外界不存在稳定的热平衡, 辐射过程原则上是不可逆的, 所以 Parikh 认为此过程与量子理论的么正性一致尚为时过早.

- [1] Parikh M K , Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042
- [2] Parikh M K arXiv : hep-th/0402166
- [3] Parikh M K 2004 *Gen. Rel. Grav.* **36** 2419
- [4] Parikh M K 2002 *Phys. Lett. B* **546** 189
- [5] Zhang J Y , Zhao Z 2005 *JHEP* 0510055
- [6] Zhang J Y , Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3796 (in Chinese [张靖仪、赵 峥 2006 物理学报 **55** 3796]
- [7] Zhang J Y , Zhao Z 2005 *Nucl. Phys. B* **725** 173
- [8] Jiang Q Q , Wu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4428 (in Chinese) [蒋青权、吴双清 2006 物理学报 **55** 4428]
- [9] Zhang J Y , Hu Y P , Zhao Z 2006 *Mod. Phys. Lett. A* **21** 1865
- [10] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev. D* **7** 2333

Further discussions on the Hawking radiation of charged particles via tunneling from the Reissner-Norstrom black hole ^{*}

Hu Ya-Peng[†] Zhang Jing-Yi Zhao Zheng

(Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 , China)

(Received 9 January 2006 ; revised manuscript received 21 February 2006)

Abstract

Taking for an example the Reissner-Norstrom black hole , we reinvestigate its Hawking radiation of charged particles via tunneling , which is viewed from the laws of black hole thermodynamics . After rewriting the imaginary part of the action into the related functions of laws of black hole thermodynamics , we find that there is an underlying relation between the first and second law of black hole thermodynamics and Hawking radiation via tunneling based on Parikh and Wilczek 's original works . Moreover , if we consider the tunneling process as a reversible process , the result in Hawking radiation via tunneling is consistent with the first and second law of black hole thermodynamics . In other words , Parikh 's conclusion is only valid for the reversible process .

Keywords : Reissner-Norstrom black hole , laws of black hole thermodynamics , tunneling , reversible process

PACC : 0420 , 9760L

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10475013 , 10373003) and the State Key Program for Basic Research of China (Grant No. 2003CB716300).

[†] E-mail : huzhengzhong2050@163.com