

# 干涉理论对 bottle beam 的描述<sup>\*</sup>

曾夏辉 吴逢铁<sup>†</sup> 刘 岚

(华侨大学信息科学与工程学院, 泉州 362021)  
(2006 年 4 月 17 日收到, 2006 年 7 月 26 日收到修改稿)

对轴棱锥产生的贝塞尔光聚焦特性的描述, 我们提出一种有别于惠更斯-菲涅耳衍射积分理论的解析表达. 这种解析表达基于干涉理论的基础, 它能够模拟计算出聚焦透镜置于最大准直距离之外以及在聚焦透镜焦平面以后的光束行为, 能够更好地描述 bottle beam 的形成过程. 这些结果用衍射积分理论是得不到的. 我们还得到了与 Wei 用几何光学分析所得出的当  $z_0 < f < z_{\max}$  将产生 hollow beam 的不同结论. 所有理论计算结果都得到实验的有力验证.

关键词: bottle beam, 贝塞尔光, 轴棱锥, 光镊

PACC: 4225, 4225G, 4260K

## 1. 引 言

bottle beam 就是一道光束沿光传播方向上, 有着强度为零的区域, 而在此区域外三维空间都围绕着高强度的光<sup>[1]</sup>. 近年来, 由于这种光束在光镊方面的重要应用而受到广泛关注<sup>[1-7]</sup>. Arlt 和其他研究人员<sup>[8-10]</sup>发现用贝塞尔光聚焦后形成的 bottle beam 可作光镊, 并提出用轴棱锥(axicon)来生成贝塞尔光, 因为这种装置有转换效率高和操作简单等优点. 因此, 研究由轴棱锥产生的贝塞尔光聚焦后生成 bottle beam 很有必要.

对由轴棱锥产生的贝塞尔光聚焦特性的研究一般采用广义的惠更斯-菲涅耳衍射积分理论<sup>[11-13]</sup>. 然而, 采用这种理论来描述由轴棱锥生成的光束的聚焦行为有局限性. 首先, 衍射积分理论的描述是基于照射在聚焦透镜上的光都是理想的贝塞尔光, 而实际上, 照射在聚焦透镜上的光束只有在光轴附近很小的交叠区域内才是贝塞尔光, 而其他区域并不是贝塞尔光. 因此, 衍射积分理论仅是对光轴附近区域光束聚焦行为描述的一个好的近似而已. 其次, 衍射积分理论不能很好地描述在透镜焦平面后的光束行为. 此外, 衍射积分理论只能描述在最大准直距离以内的无衍射光束的聚焦特性.

最近 Wei 等人在他们的研究工作中<sup>[14]</sup>以几何光学理论为基础, 采用轴棱锥和正透镜对贝塞尔光的聚焦行为进行了详细的理论和实验研究. 结果指出: 当满足条件  $f < z_0 < z_{\max}$  时将产生 bottle beam, 其中  $f$  为透镜焦距,  $z_0$  为透镜到轴棱锥顶点的距离,  $z_{\max}$  为无衍射贝塞尔光的最大准直距离. 当满足条件  $z_0 < f < z_{\max}$  时将产生中空光束(hollow beam). 本文中, 我们提出一种新的基于干涉理论的解析表达. 这种解析表达对由高斯光束正入射到轴棱锥和聚焦透镜组成的光学系统后的任意位置聚焦场分布的描述均适用. 类似的干涉理论曾被用来描述高斯光束通过轴棱锥转换后的贝塞尔光束行为<sup>[15]</sup>, 取得较满意的结果, 但他们并未涉及贝塞尔光的透镜聚焦问题. 运用此干涉理论, 我们获得当  $f < z_0 < z_{\max}$  时将产生 bottle beam (与文献[14]的结论一致); 当满足条件  $z_0 < f < z_{\max}$  时, 仍将产生 bottle beam, 并非文献[14]中指出的 hollow beam. 理论模拟获得了实验的有力证实. 文中, 我们首先在干涉理论的基础上推导出了在聚焦透镜后任意位置光强分布的解析表达. 接着, 根据推导出来的解析表达并采用与实验相对应的数据作为理论模拟参数, 数值模拟了聚焦后贝塞尔光的形成以及在  $f < z_0 < z_{\max}$  和  $z_0 < f < z_{\max}$  两种情况下的光束聚焦行为, 并与实验结果进行比较, 最后, 对理论模拟和实验结果进行讨论和总结.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60477041)和福建省自然科学基金(批准号: A0410017)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: ftwu@public.qz.fj.cn

## 2. 理论分析

假设入射光是高斯光束,其场分布为

$$E(\rho) = \exp(-\rho^2/w_0^2), \quad (1)$$

式中  $w_0$  是高斯光束束腰,  $\rho$  是场的径向距离. 当入射光垂直照射到棱角为  $\gamma$  厚度为  $d$  的轴棱锥上, 聚焦透镜后的光场被认为是两个半高斯光束的干涉叠加形成的, 如图 1 所示. 那么在透镜后的光场中任意位置  $(r, z)$  的场分布是由  $E_1$  和  $E_2$  干涉叠加形成的.  $E_1$  和  $E_2$  的场分布分别为

$$E_1 = \exp[-(w_1/w_0)^2], \quad (2)$$

$$E_2 = \exp[-(w_2/w_0)^2], \quad (3)$$

其中  $w_1$  和  $w_2$  分别是光线 1 和光线 2 到光轴的距离, 光轴为  $z$  轴. 两光束在位置  $(r, z)$  处的光程差为

$$\Delta = n_1(d_1 - d_2) + (r_1 - r_2) + n_2(d_3 - d_4) + (r'_1 - r'_2), \quad (4)$$

式中  $n_1$  和  $n_2$  分别是轴棱锥和聚焦透镜的介质折射率,  $d_1, d_2, d_3, d_4, r_1, r_2, r'_1, r'_2$  所表示的距离如图 1 所示. 那么可得到在位置  $(r, z)$  处的光强分布

$$I(r, z) = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right), \quad (5)$$

式中  $\lambda$  表示波长,  $r$  是柱坐标系中径向距离,  $z$  轴被定义为传播光轴,  $z$  表示轴向距离, 其坐标原点取在透镜后表面与光轴相交处 (如图 1 所示).

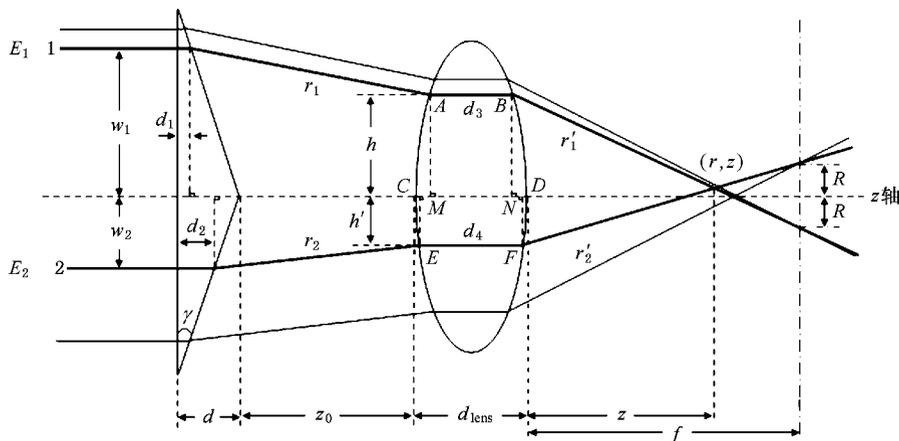


图 1 贝塞尔光聚焦几何图 高斯光通过轴棱锥转换生成贝塞尔光, 其再经薄双凸透镜聚焦

根据 ABCD 光学传输矩阵, 我们导出方程 (5) 中各参量关于  $r, z$  的表达式

$$w_1(r, z) = \frac{\theta z_0 + h + \frac{\theta h^2}{2r_0}}{1 - \gamma\theta}, \quad (6)$$

$$w_2(r, z) = \frac{\theta z_0 + h' + \frac{\theta h'^2}{2r_0}}{1 - \gamma\theta}, \quad (7)$$

$$r_1(r, z) = \frac{z_0 + h\gamma + \frac{h^2}{2r_0}}{1 - \gamma\theta}, \quad (8)$$

$$r_2(r, z) = \frac{z_0 + h'\gamma + \frac{h'^2}{2r_0}}{1 - \gamma\theta}, \quad (9)$$

$$r'_1(r, z) = \sqrt{(h - r)^2 + \left(z + \frac{h^2}{2r_0}\right)^2}, \quad (10)$$

$$r'_2(r, z) = \sqrt{(h' + r)^2 + \left(z + \frac{h'^2}{2r_0}\right)^2}, \quad (11)$$

$$d_1(r, z) = \frac{\alpha(1 - \gamma\theta) - \gamma\left(\theta z_0 + h + \frac{\theta h^2}{2r_0}\right)}{1 - \gamma\theta}, \quad (12)$$

$$d_2(r, z) = \frac{\alpha(1 - \gamma\theta) - \gamma\left(\theta z_0 + h' + \frac{\theta h'^2}{2r_0}\right)}{1 - \gamma\theta}, \quad (13)$$

$$d_3(r, z) = d_{\text{lens}} - \frac{h^2}{r_0}, \quad (14)$$

$$d_4(r, z) = d_{\text{lens}} - \frac{h'^2}{r_0}, \quad (15)$$

$$h(r, z) = \frac{Rz + rf}{f - z}, \quad (16)$$

$$h'(r, z) = \frac{Rz - rf}{f - z}, \quad (17)$$

$$R = (n - 1)\gamma f, \quad (18)$$

式中  $z_0$  是轴棱锥顶点到透镜前表面间的距离 (如图 1 所示),  $\theta$  是通过轴棱锥后的出射光与传播光轴的夹角,  $R$  是焦平面处最大空心半径,  $d_{\text{lens}}$  表示透镜的

厚度  $h, h'$  的几何意义见图 1 所示. 考虑到  $\gamma, \theta$  很小, 利用  $\sin\theta \approx \theta, \sin(\theta + \gamma) \approx \theta + \gamma$ , 由折射定律可以得到  $\theta \approx (n - 1)\gamma$ . 在上述推导过程中, 我们假定聚焦透镜为双凸透镜. 为简化推导, 设双凸透镜的前后表面曲率半径在数值上是相等的 ( $r_{\text{first}} = -r_{\text{second}} = r_0$ ). 由方程<sup>[16]</sup>

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_{\text{first}}} - \frac{1}{r_{\text{second}}} \right), \quad (19)$$

得到

$$r_0 = \mathcal{X}(n - 1)f. \quad (20)$$

由于使用的透镜为薄透镜, 其厚度可以忽略, 由此可以得到

$$\overline{AM} = \overline{BN} = h, \overline{CE} = \overline{DF} = h'. \quad (21)$$

最后, 将(2)–(4)式以及(6)–(18)(20)式代入(5)式, 可得到在聚焦光场中任意位置 ( $r, z$ ) 处的光强分布.

### 3. 实验条件

实验采用由轴棱锥和聚焦双凸透镜组成的光学系统来生成聚焦贝塞尔光的方案, 其装置如图 1 所示. 正入射到轴棱锥上的光是由 He-Ne 激光器(中心波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ )产生并经透镜系统扩束准直以获得  $w_0 = 7 \text{ mm}$  束腰的高斯光束.  $\text{K}_9$  玻璃的轴棱锥其棱角分别为  $\gamma = 2^\circ$  和  $\gamma = 1^\circ$ , 介质折射率  $n =$

1.516. 通过轴棱锥后的出射光被薄双凸透镜聚焦, 透镜焦距分别为  $f = 50 \text{ mm}$  和  $f = 150 \text{ mm}$ , 其介质折射率为  $n = 1.516$ . 轴棱锥顶点与透镜前表面间的距离均为  $z_0 = 120 \text{ mm}$ . 被聚焦的光束投影到旋转屏上, 光束强度分布图用体视显微镜(可连续放大, 最大放大倍率  $50\times$ )和 CCD 照相机(可连续放大, 最大倍率  $5\times$ ,  $2560 \times 1920$  像素)组成的系统进行拍摄得到.

### 4. 结果与讨论

图 2 3 分别给出光束经棱角  $\gamma = 2^\circ$ , 折射率  $n = 1.516$  的轴棱锥和焦距  $f = 50 \text{ mm}$ , 折射率  $n = 1.516$  的聚焦透镜所组成的光学系统的理论模拟(基于方程 5))和实验拍摄到的距离从  $z = 35 \text{ mm}$  到  $z = 70 \text{ mm}$  并垂直于传播  $z$  轴的不同横截面上的光强分布(光斑)图, 其轴棱锥顶点与透镜前表面间的距离为  $z_0 = 120 \text{ mm}$ . 理论模拟和实验结果均表明: 在聚焦透镜焦平面前, 随着距离  $z$  的增大, 光斑由圆亮斑逐渐演变成环状光斑(中心出现暗斑), 且光斑的外亮环由大变小, 内环(即中心暗斑)由小变大; 在焦平面  $z = f = 50 \text{ mm}$ , 中心暗斑最大而外亮环最小; 在焦平面后, 随着距离  $z$  的增大, 中心暗斑逐渐变小而外亮环逐渐增大, 直至中心暗斑消失. 这样就构成了中心强度为零而其四周被高强度的光包围着的 bottle

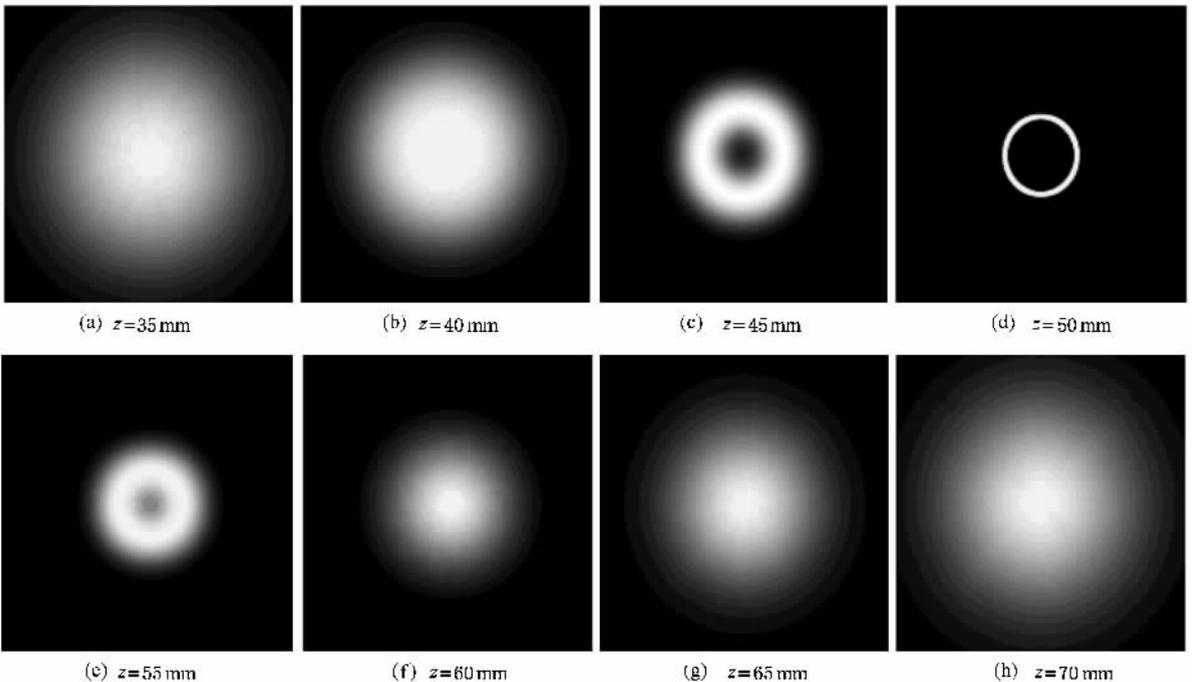


图 2 沿光轴在不同  $z$  平面内数值模拟的光束光强径向分布( $f = 50 \text{ mm}$ )

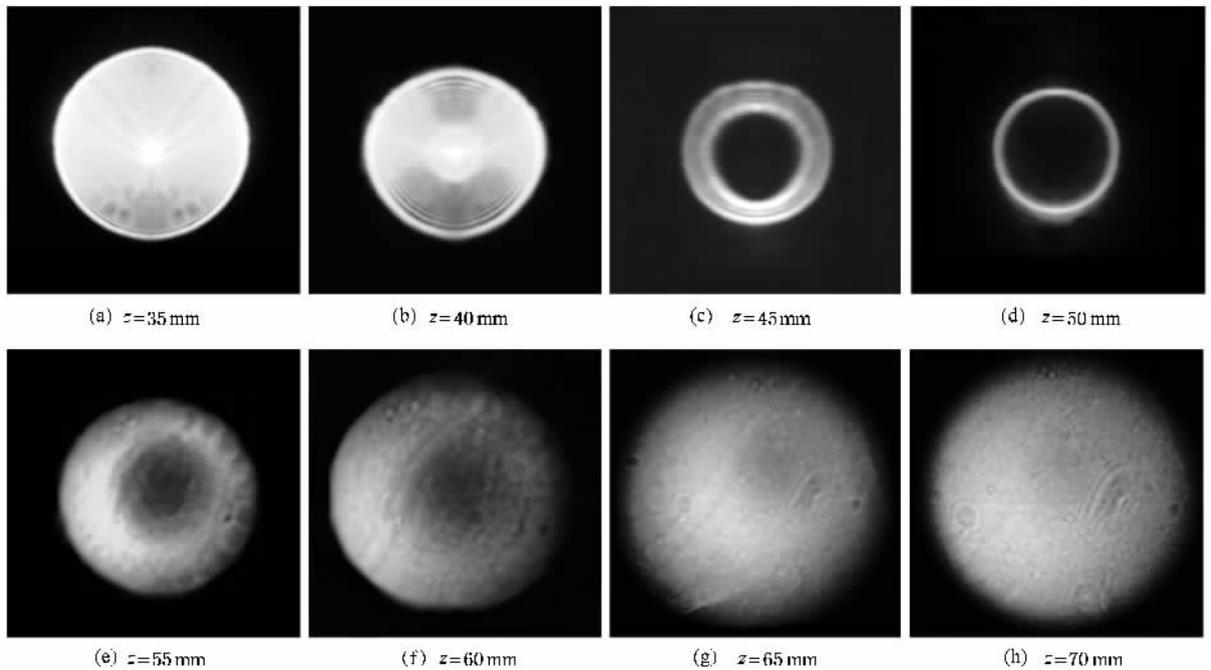


图3 实验拍摄的在不同  $z$  平面内的 bottle beam 的强度分布图像 ( $f = 50 \text{ mm}$ )

beam. 这里是属于  $f < z_0 < z_{\max}$  ( $z_{\max} \approx 389 \text{ mm}$ ) 情况下得出的理论与实验结果, 所得出的结果与用几何光学所得出的定性分析是吻合的<sup>[14]</sup>.

图4给出的是基于(5)式模拟计算的光束通过棱角  $\gamma = 1^\circ$  的轴棱锥和焦距  $f = 150 \text{ mm}$  的聚焦透镜所组成的光学系统后的纵向三维光强分布图, 轴棱锥顶点距透镜前表面的长度依然为  $z_0 = 120 \text{ mm}$ . 从图中我们可以看到此时的聚焦光束依然为 bottle beam, 根据(5)式或(18)式理论上可以计算得到其空心暗斑的最大半径  $R = 1.20 \text{ mm}$ . 为了更清楚地看到在此种情况下聚焦光束的演变过程, 根据(5)式从理论上数值模拟了距离从  $z = 110 \text{ mm}$  到  $z = 210 \text{ mm}$  在不同  $z$  平面上的横向三维光强分布, 聚焦光束的演变过程示于图5. 数值模拟的结果表明, 聚焦光束在

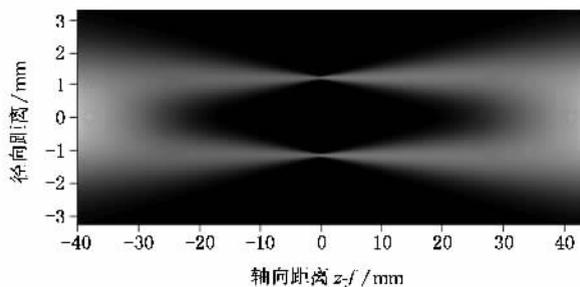


图4 数值模拟的沿光传播方向上的 bottle beam 的光强分布 ( $f = 150 \text{ mm}$ )

聚焦透镜焦平面前从  $z = 123 \text{ mm}$  到  $z = 150 \text{ mm}$  由圆亮斑逐渐演变成环状光斑, 此时中心出现暗斑, 光斑的外亮环由大变小, 内环(即中心暗斑)由小变大; 在焦平面  $z = f = 150 \text{ mm}$ , 中心暗斑最大而外亮环最小; 在焦平面后从  $z = 150 \text{ mm}$  到  $z = 178 \text{ mm}$ , 随着距离  $z$  的增大, 中心暗斑逐渐变小而外亮环逐渐增大, 直至中心暗斑消失; 从而构成了 bottle beam. bottle beam 的长度为  $55 \text{ mm}$ . 这是属于  $z_0 < f < z_{\max}$  ( $z_{\max} \approx 777 \text{ mm}$ ) 的情况, 上述结论用几何光学是得不到的, 结果同文献[14]所描述的在  $z_0 < f < z_{\max}$  产生 hollow beam 完全不同, 他们的实验仅在特定位置拍摄了三张照片, 并没有给出光束的演变过程, 同时他们也没有从理论上加以证明. 图6给出的是实验拍摄到的距离从  $z = 110 \text{ mm}$  到  $z = 210 \text{ mm}$  在不同  $z$  平面上的横向光斑图. 实验使用的轴棱锥棱角为  $\gamma = 1^\circ$ , 透镜焦距  $f = 150 \text{ mm}$ , 轴棱锥顶点距透镜前表面的长度为  $z_0 = 120 \text{ mm}$ . 从实验中我们得到: 聚焦光束在聚焦透镜焦平面前从  $z = 132 \text{ mm}$  到  $z = 150 \text{ mm}$  由圆亮斑逐渐演变成环状光斑, 这时中心出现暗斑, 光斑的外亮环由大变小, 内环(中心暗斑)由小变大; 在焦平面  $z = f = 150 \text{ mm}$ , 中心暗斑最大而外亮环最小; 在焦平面后从  $z = 150 \text{ mm}$  到  $z = 200 \text{ mm}$  环状光斑逐渐演变成圆亮光斑, 即光斑的外亮环由小变大, 中心暗斑由大变小, 直至消失, 形成 bottle beam 的长度为

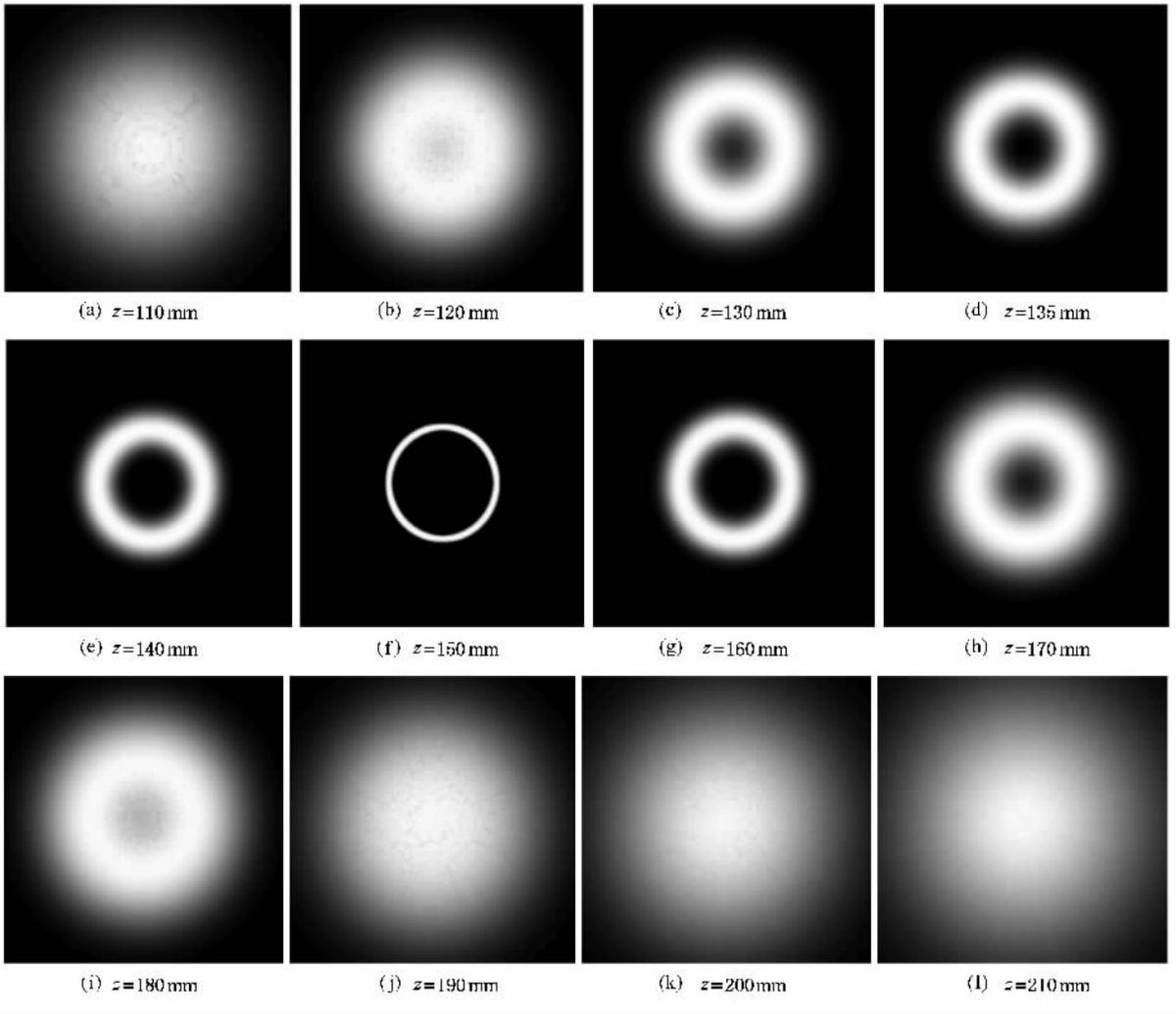


图 5 沿光轴在不同  $z$  平面内数据模拟的光束光强径向分布( $f = 150 \text{ mm}$ )

68 mm. 聚焦形成 bottle beam 的演变过程, 理论模拟与实验吻合较好, 但 bottle beam 的长度存有差异, 这可能由轴棱锥和透镜加工误差所致.

图 7 给出的是聚焦后形成的贝塞尔光. 图 7(a) 是基于(5)式模拟计算  $\gamma = 1^\circ, f = 150 \text{ mm}, z_0 = 120 \text{ mm}, z = 110 \text{ mm}$  得到的贝塞尔光斑. 图 7(b) 是相应条件下拍摄的实验光斑图. 理论与实验吻合很好.

### 5. 总 结

提出了一种有别于惠更斯-菲涅耳衍射积分理

论的解析表达, 它是基于干涉理论的. 这种解析表达对由高斯光束正入射到轴棱锥和聚焦透镜组成的光学系统后的任意位置聚焦场分布的描述均适用. 运用导出的解析表达, 数值模拟了在  $f < z_0 < z_{\max}$  和  $z_0 < f < z_{\max}$  两种情况下 bottle beam 的演变过程以及聚焦后形成的贝塞尔光, 尤其是这种理论能很好地描述透镜焦平面后的光束行为, 这用惠更斯-菲涅耳衍射积分理论是得不到的.

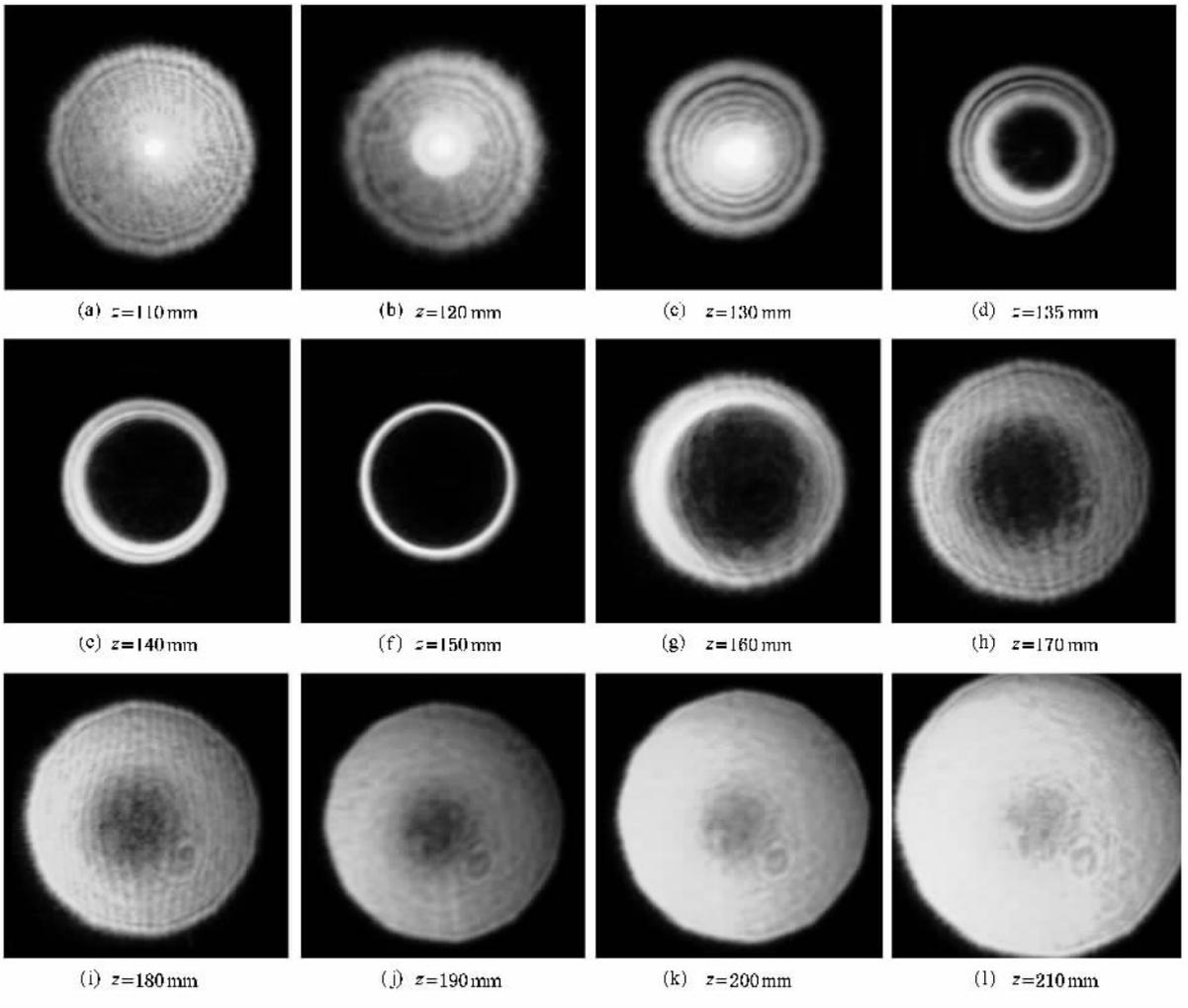


图 6 实验拍摄的在不同  $z$  平面内的 bottle beam 的强度分布图像 ( $f = 150 \text{ mm}$ )

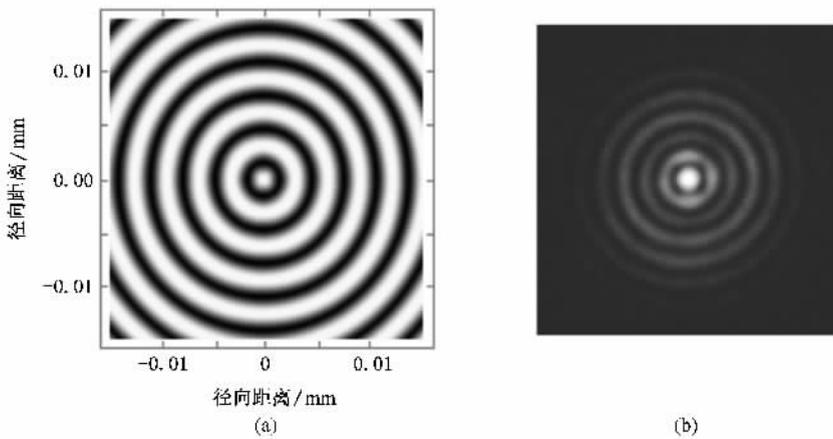


图 7 数值模拟和实验拍摄的聚焦后形成的贝塞尔光斑图 (a) 数值模拟 (b) 实验拍摄

- [ 1 ] Arlt J , Padgett M J 2000 *Opt. Lett.* **25** 191
- [ 2 ] Grier D G 2003 *Nature* **424** 810
- [ 3 ] Garces-Chavez V , McGloin D , Melville H , Sibbett W , Dholakia K 2002 *Nature* **419** 145
- [ 4 ] Yin J P , Gao W J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4157 ( in Chinese ) [ 印建平、高伟建 2004 物理学报 **53** 4157 ]
- [ 5 ] Zhang L , Cai Y J , Lu X H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1777 ( in Chinese ) [ 张 蕾、蔡阳健、陆璇辉 2004 物理学报 **53** 1777 ]
- [ 6 ] MacDonald M P , Paterson L , Volke-Sepulveda K , Arlt J , Sibbett W , Dholakia K 2002 *Science* **296** 1101
- [ 7 ] Herman R M , Wiggins T A 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 116
- [ 8 ] Arlt J , Garces-Chavez V , Sibbett W , Dholakia K 2001 *Opt. Commun.* **197** 239
- [ 9 ] Monk S , Arlt J , Robertson D A , Courtial J , Padgett M J 1999 *Opt. Commun.* **170** 213
- [ 10 ] Arlt J , Dholakia K 2000 *Opt. Commun.* **177** 297
- [ 11 ] Lü B D , Huang W L , Zhang B , Kong F L , Zhai Q 1996 *Opt. Commun.* **131** 223
- [ 12 ] Ahluwalia B P S , Yuan X C , Tao S H 2004 *Opt. Commun.* **238** 177
- [ 13 ] Angelis M de , Cacciapuoti L , Pierattini G , Tino G M 2003 *Optics and Lasers in Engineering* **39** 283
- [ 14 ] Wei M D , Shiao W L , Lin Y T 2005 *Opt. Commun.* **248** 7
- [ 15 ] Lei M , Yao B 2004 *Opt. Commun.* **239** 367
- [ 16 ] Born M , Wolf E 1980 *Principles of Optics* ( New York : Pergamon Press ) p163

## The description of bottle beam based on the interferential theory<sup>\*</sup>

Zeng Xia-Hui Wu Feng-Tie<sup>†</sup> Liu Lan

( College of Information Science and Engineering , Huaqiao University , Quanzhou 362021 , China )

( Received 17 April 2006 ; revised manuscript received 26 July 2006 )

### Abstract

For the description of the focusing properties of a Bessel beam generated by an axicon , we first deduce a type of analytic expression other than Huygens-Fresnel diffraction integral theory . Based on the interferential theory , the analytic expression can be used to calculate the focusing beam evolution behind the focal plane of the positive lens and under the circumstance of the positive lens placed beyond the maximum non-diffraction distance , and can better illustrate the formation of the optical bottle beam . These results can not be described based on the Huygens-Fresnel diffraction integral theory . In addition , we get a different result from the one ( that if  $z_0 < f < z_{\max}$  , hollow beam will be generated ) obtained by Wei adopting geometrical optics . All of our theoretical calculations are confirmed by the experimental results .

**Keywords** : bottle beam , Bessel beam , axicon , optical tweezers

**PACC** : 4225 , 4225G , 4260K

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60477041 ) and Natural Science Foundation of the Fujian Province , China ( Grant No. A0410017 ) .

<sup>†</sup> Corresponding author . E-mail : ftwu@public.qz.fj.cn