第 56 卷 第 4 期 2007 年 4 月
1000-3290/2007/56(04)/1870-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.4, April, 2007

一种修正 Volterra 链的精确解*

张善卿†

(上海交通大学数学系,上海 200240)
(杭州电子科技大学图形图像研究所,杭州 310018)

(2006 年 5 月 24 日收到;2006 年 12 月 26 日收到修改稿)

给出一种构造非线性微分差分方程精确解的方法.利用该方法并借助计算机代数系统 Maple,获得了一种修正的 Volterra 链的形式丰富的精确解.该方法也可应用于其他的微分差分方程(组).

关键词:微分差分方程, 精确解, 符号计算
PACC:0340K, 0290

1. 引 言

寻找非线性微分方程精确解在非线性问题的研究中占有很重要的地位.近些年来,人们提出了许多方法,如双曲正切法[1,2]、齐次平稳法[3,4]、混合指数法[5]、Jacobi 椭圆函数展开法[6—10] 以及其他方法[11—14],并给出了一些具体的实现软件包.但这些方法能否推广应用到非线性微分差分方程(NDDE)却少有报道.最近,Baldwin 等[15] 将双曲正切方法推广应用到了微分差分方程,并给出了具体的实现软件包 DDESpecialSolutions.m,他们的工作是一种突破.后来,谢等[16,17] 将扩展的双曲正切法及其改进形式推广应用到微分差分方程,并获得了微分差分方程更为丰富的精确解,包括孤立波解和周期解,极大地推动了此方面的研究工作.作者受文献[16,17]的启发,进一步改进解的形式假设,给出了一种改进的算法,借助计算机代数系统 Maple 可构造出微分差分方程形式丰富的精确解.为了说明该算法的有效性,我们研究如下的一种修正的 Volterra 链[18]:

$$\frac{\mathrm{d}q_n(t)}{\mathrm{d}t} = q_n(1+\alpha q_n)(q_{n+1}-q_{n-1}). \qquad (1)$$

这是著名的非线性可积链方程.当参数 $\alpha=0$ 时,方程(1)退化为著名的 Volterra 链

$$\frac{\mathrm{d}q_n(t)}{\mathrm{d}t} = q_n(q_{n+1}-q_{n-1}). \qquad (2)$$

方程(2)也称为 Lotka-Volterra 系统、离散 Korteweg-de Vries(KdV)方程、Langmuir 链、Kac-van Moerbecke 链等等[19,20].对形如方程(1),(2)的离散链系统的数学结构和物理应用的研究,例如双哈密顿结构、Bäcklund 变换和非线性叠加公式、孤立子解以及 master 对称等,可参见文献[21—24].

2. 算法描述

假定所研究的非线性微分差分方程具有如下形式:

$$P(u_{n+p_1}(t), u_{n+p_2}(t), \cdots, u'_{n+p_1}(t), u'_{n+p_2}(t), \cdots, u'_{n+p_s}(t), \cdots, u^{(r)}_{n+p_1}(t), u^{(r)}_{n+p_2}(t), \cdots, u^{(r)}_{n+p_s}(t)) = 0, \qquad (3)$$

其中 $u_n(t)=u(n,t)$ 是函数变量,t 是连续变量,而 $n, p_i \in Z$.

第一步 变换

我们寻找方程(3)如下形式的行波解:

$$u_n(t) = u(\xi_n) = \sum_{i=0}^{m} a_i f^{i}(\xi_n) + \sum_{j=1}^{m} b_j f^{-j}(\xi_n) + \sum_{k=1}^{m} c_k f^{k-1}(\xi_n)\, g(\xi_n), \qquad (4)$$

其中

* 杭州电子科技大学科研启动基金(批准号:KYS071505001)资助的课题.

† E-mail:zhangsq71@126.com

$$\xi_n = nd + ct + \xi_0, \tag{5}$$

而

$$f(\xi_n) = \frac{\sinh(\xi_n)}{A\sinh(\xi_n) + \cosh(\xi_n)},$$
$$g(\xi_n) = \frac{1}{A\sinh(\xi_n) + \cosh(\xi_n)}. \tag{6}$$

这里 d, c, a_i, b_j, c_k, A 及 ξ_0 均是常数.

像连续情形一样,通过平衡方程(3)的最高阶非线性项和最高阶导数项,可确定(4)式中 m 的阶数.

第二步 导出非线性代数方程组

注意到如下一些重要的性质和公式:

$$\xi_{n+p_i} = (n + p_i)d + ct + \xi_0 = \xi_n + dp_i, \tag{7}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y), \tag{8}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y). \tag{9}$$

利用这些公式可获得 u_{n+p_i} 的具体形式,只需将(4)式中的 ξ_n 替换为 ξ_{n+p_i} 即可.

将(4)式以及 u_{n+p_i} 的具体形式代回到原来的方程(3),并利用

$$\sinh^2(\xi_n) = \cosh^2(\xi_n) - 1 \tag{10}$$

进行简化,取出分子并提取出 $\cosh^p(\xi_n)\sinh^l(\xi_n)$ 的系数,可得到一个关于未知变量 a_i, b_j, c_k, c 的一个非线性代数方程组.借助计算机代数系统 Maple 可求解此非线性代数方程组.

第三步 获得精确解并代回原方程验证

将第二步获得的非线性代数方程组的解代回到(4)式中,可获得非线性微分差分方程(3)的精确解.当然,为了保证结论的正确性,需代回原方程(3)中进行必要的验证.

使用该方法可获得非线性微分差分方程更多形式的精确解,特别地,也包含了双曲正切、双曲余切、双曲正切-双曲余切以及双曲正割等多项式形式的解.

下面,我们以一种修正的 Volterra 链方程(1)为例对上述算法进行说明.

3. 方程(1)的精确解

为了将以上介绍的算法应用到方程(1),通过平衡其最高阶导数项和最高阶非线性项,可得 $m = 1$. 于是,可假定方程(1)具有如下形式的行波解:

$$u(\xi_n) = a_0 + \frac{a_1\sinh(\xi_n)}{A\sinh(\xi_n) + \cosh(\xi_n)} + \frac{a_2(A\sinh(\xi_n) + \cosh(\xi_n))}{\sinh(\xi_n)} + \frac{a_3}{A\sinh(\xi_n) + \cosh(\xi_n)}, \tag{11}$$

其中 a_0, a_1, a_2, a_3 均是待定的未知常数.

将(11)式以及 u_{n-1} 和 u_{n+1} 的具体形式(利用(7)—(9)式可获得)代入方程(1)中,并利用(10)式进行必要简化.随后,提取出分子并令 $\cosh^p(\xi_n) \times \sinh^l(\xi_n)$ $(k = 0, \cdots, 7; l = 0, 1)$ 的系数为零,可以获得关于未知常数 a_0, a_1, a_2, a_3 的一个非线性代数系统(共有 15 个方程组成且相当冗长,这里不再具体列出).借助计算机代数系统 Maple,可获得其下述形式的解.

情形 1

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2\alpha} \mp \frac{A}{2\alpha}\tanh(d), \\ a_1 &= \pm\frac{A^2 - 1}{2\alpha}\tanh(d), \\ a_2 &= a_3 = 0, \\ c &= -\frac{1}{2\alpha}\tanh(d). \end{aligned} \tag{12}$$

情形 2

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2\alpha} \pm \frac{A}{2\alpha}\tanh\left(\frac{d}{2}\right), \\ a_1 &= \mp\frac{A^2 - 1}{2\alpha}\tanh\left(\frac{d}{2}\right), \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= \pm\frac{\sqrt{A^2 - 1}}{2\alpha}\tanh\left(\frac{d}{2}\right), \\ c &= -\frac{1}{\alpha}\tanh\left(\frac{d}{2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

情形 3

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2\alpha}, \\ a_1 &= a_2 = 0, \\ a_3 &= \pm\frac{\sqrt{A^2 - 1}}{2\alpha}\sinh(d), \\ c &= -\frac{1}{2\alpha}\sinh(d). \end{aligned} \tag{14}$$

情形 4

$$a_0 = \mp\frac{1}{2\alpha}[A\tanh(d) \pm 1] \times [2A^2\sinh^2(d) \mp A\sinh(2d) + 1],$$

$$a_1 = \pm \frac{A^2-1}{2\alpha}\tanh(d)[A^2\sinh^2(d)-\cosh^2(d)],$$
$$a_2 = \pm \frac{1}{2\alpha}\tanh(d)[A^2\sinh^2(d)-\cosh^2(d)],$$
$$a_3 = 0,$$
$$c = \frac{1}{2\alpha}\tanh(d)[A^2\sinh^2(d)-\cosh^2(d)]. \tag{15}$$

情形5

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2\alpha} \mp \frac{A\tanh(d)}{2\alpha},\\ a_1 &= a_3 = 0,\\ a_2 &= \pm\frac{\tanh(d)}{2\alpha},\\ c &= -\frac{\tanh(d)}{2\alpha}. \end{aligned} \tag{16}$$

于是,可得修正的 Volterra 链(1)的如下形式的解:

$$q_n(t) = -\frac{1}{2\alpha} \mp \frac{A\tanh(d)}{2\alpha} \pm \frac{(A^2-1)\tanh(d)}{2\alpha} \times \frac{\sinh(\eta_n)}{A\sinh(\eta_n)+\cosh(\eta_n)}, \tag{17}$$

其中

$$\eta_n = nd - \frac{\tanh(d)}{2\alpha}t + \xi_0.$$

$$\begin{aligned} q_n(t) = &-\frac{1}{2\alpha} \pm \frac{A\tanh(d/2)}{2\alpha} \\ &\mp \frac{(A^2-1)\tanh(d/2)}{2\alpha} \times \frac{\sinh(\eta_n)}{[A\sinh(\eta_n)+\cosh(\eta_n)]} \\ &\pm \frac{\sqrt{A^2-1}\tanh(d/2)}{2\alpha[A\sinh(\eta_n)+\cosh(\eta_n)]}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\eta_n = nd - \frac{\tanh(d/2)}{\alpha}t + \xi_0.$$

$$q_n(t) = -\frac{1}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{A^2-1}\sinh(d)}{2\alpha[A\sinh(\eta_n)+\cosh(\eta_n)]}, \tag{19}$$

其中

$$\eta_n = nd - \frac{\sinh(d)}{2\alpha}t + \xi_0.$$

$$\begin{aligned} q_n(t) = &\mp \frac{[A\tanh(d)\pm 1][2A^2\sinh^2(d) \mp A\sinh(2d)+1]}{2\alpha} \\ &\pm \frac{(A^2-1)\tanh(d)[A^2\sinh^2(d)-\cosh^2(d)]}{2\alpha}\,\frac{\sinh(\eta_n)}{[A\sinh(\eta_n)+\cosh(\eta_n)]} \\ &\pm \frac{\tanh(d)[A^2\sinh^2(d)-\cosh^2(d)]}{2\alpha}[A+\coth(\eta_n)], \end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\eta_n = nd + \frac{\tanh(d)[A^2\sinh^2(d)-\cosh^2(d)]}{2\alpha}t + \xi_0.$$

$$q_n(t) = -\frac{1}{2\alpha} \pm \frac{\tanh(d)}{2\alpha}\coth(\eta_n), \tag{21}$$

其中

$$\eta_n = nd - \frac{\tanh(d)}{2\alpha}t + \xi_0.$$

如果令解(17)—(20)式中的参数 $A=0$,可得方程(1)的双曲正切、双曲余切多项式形式的解.需要说明的是,对于解(17)—(20)式作者尚未见报道.

4. 结 论

本文给出了构造非线性微分差分方程精确解的一种方法.利用该方法获得了一种修正的 Volterra 链的各种形式的精确解,表明了该方法在寻找非线性微分差分方程精确解方面的有效性和实用性.该方法也可用于其他的非线性微分差分方程的求解.顺便指出,如果将(6)式中的双曲正弦和双曲余弦函数用一般的正弦函数和余弦函数替代,即

$$f(\xi_n) = \frac{\sin(\xi_n)}{A\sin(\xi_n)+\cos(\xi_n)},$$

$$g(\xi_n) = \frac{1}{A\sin(\xi_n) + \cos(\xi_n)},$$

利用类似的过程可获得方程(1)的周期解，只不过(8)—(10)式应做相应调整. 至于如何将连续情形下的各种构造非线性微分方程精确解的方法推广应用到半离散的微分差分方程，这值得深入研究.

[1] Li Z B，Zhang S Q 1997 *Acta Math*. *Sin*. **17** 81 (in Chinese)［李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81］

[2] Li Z B，Yao R X 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2062 (in Chinese)［李志斌、姚若侠 2001 物理学报 **50** 2062］

[3] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[4] Fan E G，Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353 (in Chinese)［范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353］

[5] Xu G Q，Li Z B 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 946 (in Chinese)［徐桂琼、李志斌 2002 物理学报 **51** 946］

[6] Liu S K，Fu Z T，Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068 (in Chinese)［刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068］

[7] Liu S K，Fu Z T，Liu S D *et al* 2001 *Phys*. *Lett*. A **289** 69

[8] Chen Y，Li B，Zhang H Q 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 6

[9] Lü D Z 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 4501 (in Chinese)［吕大昭 2005 物理学报 **54** 4501］

[10] Zheng Q，Yue P，Gong L X 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2996 (in Chinese)［郑　强、岳　萍、龚伦训 2005 物理学报 **54** 2966］

[11] Li D S，Zhang H Q 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 1565 (in Chinese)［李德生、张鸿庆 2006 物理学报 **55** 1565］

[12] Shi Y R，Xu X J，Wu Z X *et al* 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 1561 (in Chinese)［石玉仁、许新建、吴枝喜等 2006 物理学报 **55** 1561］

[13] Zha Q L，Sirendaoreji 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 475

[14] Liu C S 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5606 (in Chinese)［刘成仕 2005 物理学报 **54** 5606］

[15] Baldwin D，Göktas Ü，Hereman W 2004 *Comput*. *Phys*. *Commun*. **162** 203

[16] Xie F D，Wang J Q 2006 *Chaos Soltions Fract*. **27** 1067

[17] Xie F D，Lü Z S，Wang D K 2006 *Chaos Soltions Frac*. **27** 217

[18] Suris Y B 1999 *Rev*. *Math*. *Phys*. **11** 727

[19] Manakov S V 1974 *Zh*. *Exp*. *Theor*. *Phys*. **67** 543

[20] Kac M，van Moerbecke P 1975 *Adv*. *Math*. **16** 160

[21] Hu X B，Tam H W 2000 *Phys*. *Lett*. A **276** 65

[22] Tam H W，Hu X B 2003 *J*. *Phys*. *Soc*. *Jpn*. **72** 265

[23] Ma W X，Fuchssteiner B 1999 *J*. *Math*. *Phys*. **40** 2400

[24] Tu G Z 1990 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **23** 3903

The exact solutions of a modified Volterra lattice*

Zhang Shan-Qing†

(*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China*)

(*Institute of Graphics and Image, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China*)

(Received 24 May 2006; revised manuscript received 26 December 2006)

Abstract

An expanded method for constructing nonlinear differential-difference equation is presented. With this method and computer algebra system Maple, many exact solutions of a modified Volterra lattice have been obtained. The method can also be used for other nonlinear differential-difference equations.

Keywords: differential-difference equation, exact solution, symbolic computation

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Scientific Research Foundation of Hangzhou Dianzi University, China (Grant No. KYS071505001).

† E-mail: zhangsq71@126.com