第 56 卷 第 4 期 2007 年 4 月
1000-3290/2007/56(04)/1928-10
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56, No.4, April, 2007

二维静态时空中 Dirac 场的重正化能动张量和 Casimir 效应*

刘成周[1)2)†]　张昌平[1)]
1)(滨州学院物理与电子科学系，滨州　256600)
2)(北京师范大学物理系，北京　100875)
(2006 年 7 月 28 日收到；2006 年 10 月 30 日收到修改稿)

在一般渐近平直的二维静态黑洞时空中，利用重正化能动张量的一般性质，对位于两‘平行板’间满足 Dirichlet 条件的无质量 Dirac 场的重正化能动张量的真空期待值进行了分析和计算，得到了一般表达式. 利用该表达式可以给出各种具体渐近平直二维静态黑洞时空中的相应 Casimir 力. 对于重正化能动张量及 Casimir 力与真空态定义(包括 Boulware 真空态、Hartle-Hawking 真空态和 Unrum 真空态三种情况)、Hawking 辐射和反常迹的关系分别进行了讨论，给出了相应的表达式和计算结果.

关键词：能动张量，Casimir 效应，黑洞，真空态
PACC：0370，0470

1. 引　言

Casimir 效应是边界引起的真空极化效应的宏观体现[1,2]. 1948 年，Casimir[3] 通过计算两平行导体板间的电磁场能量发现了导体板间出现吸引力现象的 Casimir 效应. 人们对这一效应已进行了多方面的研究[4—6]，包括不同类型的场、不同的背景时空、不同的边界、不同的温度等情况. 研究 Casimir 效应对于认识真空、发展重正化方法、实验应用等方面都具有重要意义.

要计算作为量子场中真空能最有意义体现之一的 Casimir 效应需要计算能动张量的真空期待值. 在量子场中，为了得到有限的重正化能动张量已发展了多种正规化方法[7,8]，比如维数正规化方法[9]、格林函数方法[10]、zeta 函数方法[11]、点分离方法[12]、Pauli-Villars 正规化方法[13] 和热核方法[14] 等. 另外，利用能动张量的一般性质，特别是它的反常迹[15,16] 和它所满足的 5 个基本公理[17]，可以对特定条件下的能动张量给出许多限制，进而给出它的许多信息和与之有关的许多物理性质.

对于具有共型不变拉格朗日的经典理论，能动张量是无迹的. 但在量子化理论中，通过重正化的能动张量可以有不为零的反常迹 $\langle T_\alpha^\alpha \rangle_{\rm ren}$，而且在二维时空中该反常迹正比于里奇标量 R[18,19].

Wald 指出[17] 重正化的能动张量应当满足以下 5 个基本公理：(1) 能动张量的期待值守恒. (2) 在闵氏时空中可以得到标准结果. (3) 对于非对角元素可以得到标准结果. (4) 满足因果律. (5) 能动张量是度规的非局域函数，它仅依赖于度规和曲率张量.

通过利用上述 Wald 公理和能动张量的反常迹，文献[20,21] 分别在二维 Schwarzschild 黑洞、弦黑洞背景时空中，对于具有 Dirichlet 边界条件的两‘平行导体板’间无质量标量场的重正化能动张量进行了计算，得到了上述‘平行板’间的 Casimir 力；文献[22] 在二维 Reissner-Nordstrom 黑洞时空中，对于具有 Dirichlet 边界条件的两‘平行导体板’间无质量 Dirac 场的重正化能动张量进行了计算，得到了“平行板’间的 Casimir 力. 为了进一步分析 Dirac 场中 Casimir 力和重正化能动张量的关系以及不同背景时空对 Dirac 场的能动张量和 Casimir 力的影响，本文在一般二维静态时空中，利用能动张量的迹和 Wald 公理，对两‘平行导体板’间具有 Dirichlet 边界条件的无质量 Dirac 场的重正化能动张量和 Casimir

* 国家自然科学基金(批准号：10375008)和国家重点基础研究发展规划(批准号：2003CB716302)资助的课题.
† E-mail：czlbj20@yahoo.com.cn

力进行计算，得到了计算各种二维渐近平直静态时空中总重正化能动张量和 Casimir 力的一般表达式. 把所得表达式应用于已知六种渐近平直的球对称静态时空，均可得到两‘平行板’间的 Casimir 力. 同时，对 Boulware 真空态、Hartle-Hawking 真空态和 Unrum 真空态三种情况进行了分别计算和讨论，并对重正化能动张量与 Hawking 辐射和反常迹的关系进行了讨论，给出了相应的表达式和计算结果.

2. 一般二维静态时空中的能动张量

一般球对称静态黑洞外部度规为

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1}$$

对(1)式进行二维约化，得到一般二维静态时空线元

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2. \tag{2}$$

为便于应用平直时空中的结论，对(2)式进行共型变换，得到

$$\mathrm{d}s^2 = f(r)(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}R^2), \tag{3}$$

其中 $f(r)$ 为共型因子，且

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}R} = f(r).$$

下面讨论上述时空中重正化能动张量的一般形式，其中考虑到(3)式所表示的时空中重正化能动张量的反常迹 $\langle T^\alpha_\alpha\rangle_{\mathrm{ren}}$. 度规(3)式的非零 Christoffel 符为

$$\Gamma^R_{tt} = \Gamma^t_{Rt} = \Gamma^R_{RR} = \Gamma^t_{tR} = \frac{1}{2}\frac{\partial f(r)}{\partial r}. \tag{4}$$

据 Wald 公理(1)可知，重正化能动张量满足守恒方程

$$\nabla_\nu\langle T^{\ \nu}_{\mu}\rangle_{\mathrm{ren}} = 0. \tag{5}$$

该方程展开为

$$\partial_R\langle T^R_t\rangle_{\mathrm{ren}} + \Gamma^t_{tR}\langle T^R_t\rangle_{\mathrm{ren}} - \Gamma^R_{tt}\langle T^t_R\rangle_{\mathrm{ren}} = 0, \tag{6}$$

$$\partial_R\langle T^R_R\rangle_{\mathrm{ren}} + \Gamma^t_{tR}\langle T^R_R\rangle_{\mathrm{ren}} - \Gamma^t_{tR}\langle T^t_t\rangle_{\mathrm{ren}} = 0. \tag{7}$$

这里

$$\begin{aligned}\langle T^t_R\rangle_{\mathrm{ren}} &= -\langle T^R_t\rangle_{\mathrm{ren}},\\ \langle T^t_t\rangle_{\mathrm{ren}} &= \langle T^\alpha_\alpha\rangle_{\mathrm{ren}} - \langle T^R_R\rangle_{\mathrm{ren}}.\end{aligned} \tag{8}$$

在二维静态时空中，对于无质量的 Dirac 场，可知[18, 19]

$$\langle T^{\ \alpha}_{\alpha}\rangle_{\mathrm{ren}} = -\frac{R}{24\pi}. \tag{9}$$

根据(3)式计算得到曲率标量 R 为

$$R = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}, \tag{10}$$

则有

$$\langle T^{\ \alpha}_{\alpha}\rangle_{\mathrm{ren}} = -\frac{1}{24\pi}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}. \tag{11}$$

将(4)，(8)式代入(6)式得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(f(r)T^t_R) = 0,\\ &T^t_R = \alpha f^{-1}(r),\end{aligned} \tag{12}$$

其中 α 为积分常数. 由(7)式得

$$T^R_R = [H(r) + \beta]f^{-1}(r), \tag{13}$$

其中

$$H(r) = \frac{1}{48\pi}\int_{r_H}^{r}\frac{\partial f(r')}{\partial r'}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r'^2}\mathrm{d}r'. \tag{14}$$

这里，r_H 为事件视界位置，β 为积分常数. 这样，由(12)，(13)式，可以得到在二维静态时空中无质量 Dirac 场的重正化能动张量的一般形式为

$$\begin{aligned}\langle T^{\ \mu}_{\nu}\rangle_{\mathrm{ren}} &= \begin{pmatrix}\langle T^{\ \alpha}_{\alpha}\rangle_{\mathrm{ren}} - [H(r)+\beta]f^{-1}(r) & -\alpha f^{-1}(r)\\ \alpha f^{-1}(r) & [H(r)+\beta]f^{-1}(r)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\langle T^{\ \beta}_{\alpha}\rangle_{\mathrm{ren}} - f^{-1}(r)H(r) & 0\\ 0 & f^{-1}(r)H(r)\end{pmatrix} + f^{-1}\begin{pmatrix}-\beta & -\alpha\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{15}$$

令 $r\to\infty$，此时 $f(r)=1$，$\langle T^\alpha_\alpha\rangle_{\mathrm{ren}}=0$，则(15)式变成

$$\langle T^{\ \mu}_{\nu}\rangle_{\mathrm{ren}} = \begin{pmatrix}-H(\infty)-\beta & -\alpha\\ \alpha & H(\infty)+\beta\end{pmatrix}. \tag{16}$$

考虑(2)式的时空在无穷远处是渐近平直的情况，则(16)式所表示的能动张量在无穷远处的量值就应与二维平直时空的能动张量相同. 这样根据平直时空中 Dirac 粒子的相应重正化能动张量值就可以确定(15)式中的积分常数 α 和 β. 文献[23]给出了 D 维平直时空中处于两‘平行板’间满足 Dirichlet 边界条件的 Dirac 粒子的 Casimir 能量. 当 D 为偶数时，重正化能动张量的 $\langle T^t_t\rangle_{\mathrm{ren}}$ 分量为

$$\varepsilon_D(L) = -\frac{f(D)}{L^{D-1}}\Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right)(2^{1-D})\frac{B_D}{D}, \tag{17}$$

其中 L 为两‘平行板’间的距离. 显然，在二维时空

中有

$$\varepsilon_2(L) = -\frac{\pi}{24L}. \tag{18}$$

而相应的 Casimir 能量密度为

$$\rho_C = \frac{\varepsilon_2(L)}{L} = -\frac{\pi}{24L^2}. \tag{19}$$

这样就可以得到二维平直时空中处于两‘平行板’间满足 Dirichlet 边界条件的重正化能动张量为

$$\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{\rm ren} = \frac{\pi}{24L^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

3. 三种真空态下的重正化能动张量和 Casimir 力

弯曲时空量子场论中没有唯一确定的粒子定义,相应地真空也有不同的定义.文献[20—22]表明,在特定的黑洞背景下,标量粒子和 Dirac 粒子的重正化能动张量在不同的真空中有不同的值.下面我们讨论不同的真空(Boulware 真空态、Hartle-Hawking 真空态和 Unrum 真空态)下无质量 Dirac 粒子在一般二维静态时空中的重正化能动张量和 Casimir 力.

Boulware 真空态[24]是一种在无穷远处没有任何粒子的量子态,在该真空态下处于两‘平行板’间满足 Dirichlet 边界条件的重正化能动张量具有(20)式所示的量值.这样,令(16)式与(20)式一致,可以得到

$$\alpha = 0, \tag{21}$$

$$\beta = \frac{\pi}{24L^2} - H(\infty). \tag{22}$$

将(21),(22)式代入(15)式,得到一般二维静态时空中无质量 Dirac 场在 Boulware 真空态下的重正化能动张量

$$\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{\rm B} = \begin{pmatrix} T^{\alpha}_{\alpha} - f^{-1}(r)[H(r) - H(\infty)] & 0 \\ 0 & f^{-1}(r)[H(r) - H(\infty)] \end{pmatrix} + f^{-1}(r)\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{24L^2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{24L^2} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Hartle-Hawking 真空态[25]是一种与具有 Hawking 温度的大热源处于平衡的热平衡态,其对应的真空态在无边界约束下也会有粒子存在.在一维空间内,能量间隔 $\varepsilon \to \varepsilon + {\rm d}\varepsilon$ 内的粒子数为(采用 $\hbar = G = k = c = 1$ 的自然单位制)

$${\rm d}n = n_\varepsilon D(\varepsilon){\rm d}\varepsilon = \frac{D(\varepsilon){\rm d}\varepsilon}{{\rm e}^{\beta\varepsilon} + 1}, \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} D(\varepsilon){\rm d}\varepsilon &= g_{\rm s}\frac{1}{2\pi}\frac{{\rm d}\sum(\varepsilon)}{{\rm d}\varepsilon}{\rm d}\varepsilon \\ &= g_{\rm s}\frac{1}{2\pi}\frac{\rm d}{{\rm d}\varepsilon}\left(\int {\rm d}x{\rm d}p\right){\rm d}\varepsilon \\ &= g_{\rm s}\frac{L}{2\pi}\left(\frac{\rm d}{{\rm d}\varepsilon}\int {\rm d}\varepsilon\right){\rm d}\varepsilon \\ &= g_{\rm s}\frac{L}{2\pi}{\rm d}\varepsilon. \end{aligned} \tag{25}$$

这样,可以得到一维空间内处于热平衡的量子场的能量分布律为

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon, T){\rm d}\varepsilon &= \frac{\varepsilon{\rm d}n}{L} = g_{\rm s}\frac{1}{2\pi}\frac{{\rm d}\varepsilon}{{\rm e}^{\beta\varepsilon} + 1} \\ &= \frac{g_{\rm s}}{2\pi}\frac{\omega{\rm d}\omega}{{\rm e}^{\omega/T} + 1}. \end{aligned} \tag{26}$$

总能量密度为

$$\begin{aligned} \langle T_{tt}\rangle &= \frac{g_{\rm s}}{2\pi}\int \frac{\omega{\rm d}\omega}{{\rm e}^{\omega/T} + 1} = \int \frac{g_{\rm s}}{2\pi}\frac{\omega{\rm d}\omega}{{\rm e}^{\omega/T} + 1} \\ &= \frac{g_{\rm s}}{2\pi}T^2\Gamma(2)f_2(1) \\ &= \frac{g_{\rm s}\pi}{24}T^2 = \frac{\pi}{12}T^2. \end{aligned} \tag{27}$$

又考虑到热平衡态没有粒子流,这样处于热平衡态的无质量自由 Dirac 粒子的能动张量为

$$\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle = -\frac{\pi}{12}T^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

将(28)式与(20)式结合,得到二维平直时空中无质量 Dirac 场在 Hartle-Hawking 真空态下处于两‘平行板’间满足 Dirichlet 边界条件的重正化能动张量为

$$\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{\rm H} = \frac{\pi}{24L^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\pi}{12}T^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

令(16)式与(29)式一致,则有

$$\alpha = 0, \tag{30}$$

$$\beta = \frac{\pi}{24L^2} - \frac{\pi}{12}T^2 - H(\infty). \tag{31}$$

将(30),(31)式代入(15)式,得到一般二维静态时空中无质量 Dirac 场在 Hartle-Hawking 真空态下的重正化能动张量为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} T^{\alpha}_{\alpha} - f^{-1}(r)[H(r) - H(\infty)] & 0 \\ 0 & f^{-1}(r)[H(r) - H(\infty)] \end{pmatrix} + f^{-1}(r)\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{24L^2} + \frac{\pi}{12}T^2 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{24L^2} - \frac{\pi}{12}T^2 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Unrum 真空态[26]是一个热态,在无穷远处的观察者既能观察到粒子也能观察到粒子流. 在这种真空态下的能动张量不仅有能量密度分量,还有相应的动量密度分量,它可以视为黑洞稳定到 Hawking 辐射的状态. 由于无质量黑体辐射的能量密度是 Hartle-Hawking 真空态的一半,而动量 $p = \varepsilon$,这样,根据(28)式可得到处于 Unrum 真空态中无质量自由 Dirac 粒子的能动张量为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle = -\frac{\pi}{24}T^2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

将(33)式与(20)式相结合,得到约束于两' 平行板"间满足 Dirichlet 边界条件的无质量 Dirac 粒子重正化能动张量为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\mathrm{U}} = \frac{\pi}{24L^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\pi}{24}T^2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

令(16)式与(34)式一致,则在 Unrum 真空态下有

$$\alpha = -\frac{\pi}{24}T^2, \tag{35}$$

$$\beta = \frac{\pi}{24L^2} - \frac{\pi}{24}T^2 - H(\infty). \tag{36}$$

将(35),(36)式代入(15)式,得到一般二维静态时空中约束于两' 平行板 '间满足 Dirichlet 边界条件的无质量 Dirac 场在 Unrum 真空态下的重正化能动张量为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\mathrm{U}} = \begin{pmatrix} T^{\alpha}_{\alpha} - f^{-1}(r)[H(r) - H(\infty)] & 0 \\ 0 & f^{-1}(r)[H(r) - H(\infty)] \end{pmatrix} + f^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{24L^2} + \frac{\pi}{24}T^2 & \frac{\pi}{24}T^2 \\ -\frac{\pi}{24}T^2 & \frac{\pi}{24L^2} - \frac{\pi}{24}T^2 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

这样,(23),(32)和(37)式分别给出了在 Boulware 真空态、Hartle-Hawking 真空态和 Unrum 真空态下,二维静态时空中约束于两' 平行板 '间满足 Dirichlet 边界条件的无质量 Dirac 场的重正化能动张量的一般形式. 分析这些公式可以看出,三种真空态下来自边界引起的零点能变化对重正化能动张量的贡献均为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\mathrm{boundary}} = \frac{\pi}{24L^2}f^{-1}(r)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

而来自引力背景的贡献均为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\mathrm{gravitation}} = \begin{pmatrix} T^{\alpha}_{\alpha} - f^{-1}(r)[H(r) - H(\infty)] & 0 \\ 0 & f^{-1}(r)[H(r) - H(\infty)] \end{pmatrix}. \tag{39}$$

在 Hartle-Hawking 真空态下来自热平衡态的贡献为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\mathrm{bath}} = -\frac{\pi T^2}{12}f^{-1}(r)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

在 Unrum 真空态下来自热辐射的贡献为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\mathrm{radiation}} = -\frac{\pi T^2}{24}f^{-1}(r)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

就像热平衡态和热辐射一样,由于引力背景(包括重正化能动张量的反常迹)施加于' 平行板 '两侧

的压力相等,因此只有边界约束引起的‘平行板’受力对 Casimir 力有贡献.这样,在二维静态时空中,对处于无质量 Dirac 场且满足 Dirichlet 边界条件的两“平行板”,可以得到其所受到的压力为

$$P_{\mathrm{b}}(r) = -\langle T^{r}_{r}\rangle_{\mathrm{bounary}} = -\frac{\pi}{24L^2}f^{-1}(r), \quad (42)$$

其中 r 取 r_1 或 r_2,而 r_1 和 r_2 分别为两‘平行板’的位置坐标,且可取任意 r 值.(42)式中的负号表明两“平行板”互相吸引.

4.具体静态时空中的 Casimir 力计算

(42)式以及(23),(32),(37)—(40)式适用于一般渐近平直球对称静态黑洞中的二维时空.下面对几种黑洞做具体的计算.

4.1. Schwarzschild 黑洞

Schwarzschild 黑洞度规为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-2M/r} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \quad (43)$$

这里 M 为黑洞的质量.此时有

$$f(r) = 1-\frac{2M}{r}, \quad (44)$$

$$T = \frac{1}{8\pi M}, \quad (45)$$

$$R = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} = -\frac{4M}{r^3}, \quad (46)$$

$$H(r) = \frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4}-\frac{1}{r^4}\right). \quad (47)$$

这样,就得到两‘平行板’的 Casimir 压力为

$$P_{\mathrm{b}}(r) = -\langle T^{r}_{r}\rangle_{\mathrm{bounary}} = -\frac{\pi}{24L^2}\frac{r}{r-2m}. \quad (48)$$

而且可以得到三种真空态下重正化能动张量分别为

$$\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \frac{4mr-7m^2}{24\pi(r-2m)r^3} & 0 \\ 0 & -\frac{m^2}{24\pi(r-2m)r^3}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{24L^2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{24L^2}\end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \frac{4mr-7m^2}{24\pi(r-2m)r^3} & 0 \\ 0 & -\frac{m^2}{24\pi(r-2m)r^3}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{24L^2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{24L^2}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} \frac{1}{768\pi m^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{768\pi m^2}\end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{\mathrm{U}} = \begin{pmatrix} \frac{4mr-7m^2}{24\pi(r-2m)r^3} & 0 \\ 0 & -\frac{m^2}{24\pi(r-2m)r^3}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{24L^2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{24L^2}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} \frac{1}{1536\pi m^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1536\pi m^2}\end{pmatrix}. \quad (51)$$

(49)—(51)各式等号右端第一项均为引力背景的贡献,其中包括了反常迹

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha}\rangle_{\mathrm{ren}} = \frac{4M}{24\pi r^3};$$

等号右端第二项为边界约束引起的真空能变化的贡献;(50)式等号右端第三项为热气体的贡献;(51)式等号右端第三项为 Hawking 辐射的贡献.

4.2. Reissner-Nordstrom 黑洞

Reissner-Nordstrom 黑洞度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r + Q^2/r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{52}$$

这里 M 和 Q 分别是黑洞的质量和电荷. 此时有

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \tag{53}$$

$$T = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}, \tag{54}$$

$$R = \frac{6Q^2 - 4Mr}{r^4}, \tag{55}$$

$$H(r) = \frac{1}{24\pi}\left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{2MQ^2}{r^5} + \frac{Q^4}{r^6}\right) + \frac{1}{24\pi}\left[\frac{m^2}{(m + \sqrt{m^2 - Q^2})^4} - \frac{2mQ^2}{(m + \sqrt{m^2 - Q^2})^5} + \frac{Q^4}{(m + \sqrt{m^2 - Q^2})^6}\right]. \tag{56}$$

这样，就得到两‘平行板’的 Casimir 压力为

$$P_b(r) = -\langle T^r_r\rangle_{\text{bounary}} = -\frac{\pi}{24L^2}\frac{r^2}{r^2 - 2mr + Q^2}. \tag{57}$$

而且可以得到三种真空态下重正化能动张量分别为

$$\langle T^\mu_\nu\rangle_B = \begin{pmatrix} -\frac{7m^2r^2 - 4mr^3 - 14mQ^2r + 6Q^2r + 5Q^4}{24\pi(r^2 - 2mr + Q^2)r^4} & 0 \\ 0 & -\frac{m^2r^2 - 2mQ^2r + Q^4}{24\pi(r^2 - 2mr + Q^2)r^4} \end{pmatrix} + \frac{r^2}{r - 2mr + Q^2}\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{24L^2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{24L^2} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

$$\langle T^\mu_\nu\rangle_H = \begin{pmatrix} -\frac{7m^2r^2 - 4mr^3 - 14mQ^2r + 6Q^2r + 5Q^4}{24\pi(r^2 - 2mr + Q^2)r^4} & 0 \\ 0 & -\frac{m^2r^2 - 2mQ^2r + Q^4}{24\pi(r^2 - 2mr + Q^2)r^4} \end{pmatrix} + \frac{r^2}{r - 2mr + Q^2}\frac{\pi}{24L^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{r^2}{r - 2mr + Q^2}\frac{m^2 - Q^2}{48\pi(m + \sqrt{m^2 - Q^2})^4}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

$$\langle T^\mu_\nu\rangle_U = \begin{pmatrix} -\frac{7m^2r^2 - 4mr^3 - 14mQ^2r + 6Q^2r + 5Q^4}{24\pi(r^2 - 2mr + Q^2)r^4} & 0 \\ 0 & -\frac{m^2r^2 - 2mQ^2r + Q^4}{24\pi(r^2 - 2mr + Q^2)r^4} \end{pmatrix} + \frac{r^2}{r - 2mr + Q^2}\frac{\pi}{24L^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{r^2}{r - 2mr + Q^2}\frac{m^2 - Q^2}{96\pi(m + \sqrt{m^2 - Q^2})^4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

(58)—(60)各式等号右端第一项均为引力背景的贡献，其中包括了反常迹

$$\langle T^\alpha_\alpha\rangle_{\text{ren}} = -\frac{6Q^2 - 4Mr}{24\pi r^4};$$

等号右端第二项为边界约束引起的真空能变化的贡献；(59)式等号右端第三项为热气体的贡献；(60)式等号右端第三项为热辐射的贡献.

4.3. Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞

Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞[27]度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r(r - a)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{61}$$

这里 $a = Q^2/(2Me^{-2\phi_0})$，其中 M 和 Q 分别为黑洞的质量和电荷，ϕ_0 是 dilaton 场的渐近常数值. 此时有

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{62}$$

$$T = \frac{1}{8\pi M}, \tag{63}$$

$$R = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}$$

$$= -4M/r^3, \tag{64}$$

$$H(r) = \frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4}\right). \tag{65}$$

这样，就得到两‘平行板’的 Casimir 压力为

$$P_b(r) = -\langle T^r_r\rangle_{\text{bounary}} = -\frac{\pi}{24L^2}\frac{r}{r-2m}. \tag{66}$$

而且可以得到三种真空态下重正化能动张量分别为

$$\langle T^\mu_\nu\rangle_B = \begin{pmatrix} \dfrac{4mr-7m^2}{24\pi(r-2m)r^3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{m^2}{24\pi(r-2m)r^3}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} -\dfrac{\pi}{24L^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\pi}{24L^2}\end{pmatrix}, \tag{67}$$

$$\langle T^\mu_\nu\rangle_H = \begin{pmatrix} \dfrac{4mr-7m^2}{24\pi(r-2m)r^3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{m^2}{24\pi(r-2m)r^3}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} -\dfrac{\pi}{24L^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\pi}{24L^2}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{768\pi m^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{768\pi m^2}\end{pmatrix}, \tag{68}$$

$$\langle T^\mu_\nu\rangle_U = \begin{pmatrix} \dfrac{4mr-7m^2}{24\pi(r-2m)r^3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{m^2}{24\pi(r-2m)r^3}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} -\dfrac{\pi}{24L^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\pi}{24L^2}\end{pmatrix} + \frac{r}{r-2m}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1536\pi m^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{1536\pi m^2}\end{pmatrix}. \tag{69}$$

(67)—(69)各式等号右端的第一项均为引力背景的贡献，其中包括了反常迹

$$\langle T^\alpha_\alpha\rangle_{\text{ren}} = \frac{4M}{24\pi r^3};$$

等号右端第二项为边界约束引起的真空能变化的贡献；(68)式等号右端的第三项为热气体的贡献；(69)式等号右端的第三项为 Hawking 辐射的贡献.

4.4. Gibbons-Maeda dilaton 黑洞

Gibbons-Maeda dilaton 黑洞[28]度规为

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{R^2}dt^2 + \frac{R^2 dr^2}{(r-r_+)(r-r_-)} + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{70}$$

这里 $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 + D^2 - P^2 - Q^2}$ 为黑洞的内外视界，$D = (P^2 - Q^2)/2M$，$R^2 = r^2 - D^2$，其中 M，Q，P 和 D 分别为黑洞的质量、电荷、磁荷和轴子 dilaton 荷. 此时有

$$f(r) = \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2 - D^2}, \tag{71}$$

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 - D^2)}. \tag{72}$$

这样，就得到两‘平行板’的 Casimir 压力为

$$P_b(r) = -\langle T^r_r\rangle_{\text{bounary}} = -\frac{\pi}{24L^2}\frac{r^2 - D^2}{(r-r_+)(r-r_-)}. \tag{73}$$

三种真空态下重正化能动张量来自边界对真空影响的贡献均为

$$\langle T^\mu_\nu\rangle_{\text{boundary}} = \frac{\pi}{24L^2}\frac{r^2-D^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{74}$$

在 Hartle-Hawking 真空态下来自热平衡态的贡献为

$$\langle T^\mu_\nu\rangle_{\text{bath}} = \frac{(r_+ - r_-)^2}{192\pi(r_+^2 - D^2)^2} \times \frac{r^2 - D^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{75}$$

在 Unrum 真空态下来自热辐射的贡献为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\text{radiation}} = \frac{(r_+ - r_-)^2}{384\pi(r_+^2 - D^2)^2} \times \frac{r^2 - D^2}{(r - r_+)(r - r_-)}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

4.5. Garfinkle-Horne dilaton 黑洞

Garfinkle-Horne dilaton 黑洞[29] 度规为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{(1-a^2)/(1+a^2)}\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{(a^2-1)/(1+a^2)}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2a^2/(1+a^2)}(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \quad (77)$$

这里 dilaton 场 $\mathrm{e}^{2\phi} = (1 - r_-/r)^{2a/(1+a^2)}\mathrm{e}^{-2\phi_0}$，麦克斯韦场 $F = (Q/r^2)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r$，其中 a 是耦合常数，$r = r_+$ 和 $r = r_-$ 分别是事件视界和柯西视界的位置. 此时有

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{(1-a^2)/(1+a^2)} \quad (78)$$

$$T = \frac{(1 - r_{-1}/r_+)^{(1-a^2)/(1+a^2)}}{4\pi r_+}. \quad (79)$$

这样，就得到两‘平行板’的 Casimir 压力为

$$P_{\mathrm{b}}(r) = -\langle T^{r}_{\ r}\rangle_{\text{bounary}} = -\frac{\pi}{24L^2}\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-(1-a^2)/(1+a^2)}. \quad (80)$$

在 Hartle-Hawking 真空态下来自热平衡态的贡献为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\text{bath}} = \frac{\left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{2(1-a^2)/(1+a^2)}}{192\pi r_+^2}\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \times \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-(1-a^2)/(1+a^2)}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

在 Unrum 真空态下来自热辐射的贡献为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\text{radation}} = \frac{\left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{2(1-a^2)/(1+a^2)}}{384\pi r_+^2}\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \times \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-(1-a^2)/(1+a^2)}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

4.6. Horowitz-Strominger 黑洞

Horowitz-Strominger 黑洞[30] 度规为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1}{P+1}}\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1}{P+1}}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{\frac{P}{P+1}}(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \quad (83)$$

这里 $r = r_+$ 和 $r = r_-$ 分别是事件视界和柯西视界的位置，P 是一个常数. 此时有

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1}{P+1}}, \quad (84)$$

$$T = \frac{(1 - r_-/r_+)^{1/(P+1)}}{4\pi r_+}, \quad (85)$$

$$R = -\frac{P}{(P+1)^2}\frac{r_- r_+}{r^4}\left(1 - \frac{r_+}{r_-}\right)^{-\frac{P}{P+1}}. \quad (86)$$

这样，就得到两‘平行板’的 Casimir 压力为

$$P_{\mathrm{b}}(r) = -\langle T^{r}_{\ r}\rangle_{\text{bounary}} = -\frac{\pi}{24L^2}\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1}{P+1}}. \quad (87)$$

三种真空态下重正化能动张量来自边界对真空影响的贡献均为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\text{bounary}} = \frac{\pi}{24L^2}\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \times \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1}{P+1}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (88)$$

三种真空态下重正化能动张量的反常迹为

$$\langle T^{\alpha}_{\ \alpha}\rangle_{\text{ren}} = \frac{P}{24\pi(P+1)^2}\frac{r_- r_+}{r^4}\left(1 - \frac{r_+}{r_-}\right)^{-\frac{P}{P+1}}, \quad (89)$$

且它只对重正化能动张量中来自引力背景的贡献有影响. 在 Hartle-Hawking 真空态下来自热平衡态的贡献为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\text{bath}} = \frac{\left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{\frac{2}{P+1}}}{192\pi r_+^2}\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \times \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1}{P+1}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

在 Unrum 真空态下来自热辐射的贡献为

$$\langle T^{\mu}_{\ \nu}\rangle_{\text{rdation}} = \frac{\left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{\frac{2}{P+1}}}{384\pi r_+^2}\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \times \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1}{P+1}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

5. 讨论及结论

在一般二维渐近平直弯曲时空中，利用重正化能动张量的一般性质，在避免对能动张量进行复杂的直接计算情况下，对位于两“平行板”间满足Dirichlet边界条件的无质量Dirac场的重正化能动张量进行了分析和计算，得到了一般表达式.依据该重正化能动张量的一般表达式，在给定二维平直背景中相同边界下无质量Dirac场的Casimir力的情况下，得到了一般二维弯曲背景下相应Casimir力的一般表达式.应用上述表达式，得到了多种具体黑洞背景中的重正化能动张量和Casimir力，其中应用于Reissner-Nordstrom黑洞可以得到与文献[22]相同的结果.这样，本文的结论与文献[22]是一致的，而且具有较普遍的适用性.依据这里的计算和结论，可以对无质量Dirac场的重正化能动张量和Casimir力对背景时空的依赖关系以及Casimir力和重正化能动张量的关系做更一般性的分析和讨论.

能动张量包含丰富的信息，弯曲时空中能动张量既描述了量子场的物理性质，也决定了时空的弯曲，相应地也需要复杂的表达式来描述.而要分析Casimir效应和给出相应的定量结果只要知道重正化能动张量中对应Casimir效应的部分信息和给出相应的表示项即可.这说明，要得到Casimir力需要的是计算出重正化能动张量中来自边界的贡献.计算表明，对于二维Schwarzschild黑洞、Reissner-Nordstrom黑洞和Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton黑洞，可以较容易给出三种真空态下处于两‘平行板’间Dirac场的重正化能动张量的完全解析表示，相应的Casimir力就可以明确得到；而对于二维Garfinkle-Maeda dilaton黑洞、Garfinkle-Horne dilaton黑洞和Horowitz-Strominger黑洞，由于积分困难我们没有给出两‘平行板’间Dirac场的重正化能动张量的完全解析表示，但其中三种真空态下边界对真空约束贡献项以及在Hartle-Hawking下热平衡态和真空态、Unrum真空态下热辐射对重正化能动张量的贡献项可以明确给出，相应的Casimir力也可以定量得到(还可以定量讨论热容等热力学量).可以看出，对于一般二维静态时空中的Driac场，重正化能动张量的反常迹与总Casimir能之间有明确的关系，但只影响重正化能动张量中来自引力背景的贡献.对于Boulware真空态、Hartle-Hawking真空态和Unrum真空态三种不同的真空态，二维静态时空中约束于两‘平行板’间满足Dirichlet边界条件的无质量Dirac场的重正化能动张量各不相同，但Casimir力相同.这说明重正化能动张量包含了不同真空态的信息，但相应的能动张量贡献不影响边界约束的贡献，自然也不影响Casimir力.

另外，弯曲时空的不同真空态对重正化能动张量有不同的影响.计算表明，在一般二维静态时空中，Dirac场在Boulware真空态下重正化能动张量具有边界约束贡献和引力背景贡献两部分组成，而在Hartle-Hawking真空态和Unrum真空态下，重正化能动张量除了有与Boulware真空态中相同的两项外，还分别具有热平衡态和作为热辐射的Hawking辐射贡献项.在三种真空态下有边界约束对真空影响决定的Casimir力相同，且与文献[20,21]中相应标量场的Casimir力相同.但研究表明[31]，在四维时空中相同条件下Dirac场与标量场的Casimir力不同.这说明在维数约化过程中，场模式的简化消除了不同类型场在边界影响下相应真空能变化的不同，而Schwarzschild黑洞和Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton黑洞背景时空中二维重正化能动张量和Casimir力的相同也说明了维数约化可以部分消除引力背景对能动张量贡献的区别.

感谢朱建阳教授的指导与帮助.

[1] Plunien G, Mueller B, Greiner W 1986 *Phys. Rep.* **134** 87

[2] Milton K A 2001 *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy* (Norman: University of Oklahoma Press)

[3] Casimir H B G 1948 *Kon. Zed. Akad. Wetensch. Proc.* **51** 793

[4] Bordag M, Mohideen U, Mostepanenko V M 2001 *Phys. Rep.* **353** 1

[5] Jiang W Z, Fu D J, Wang Z X *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 813 (in Chinese) [蒋维洲、傅德基、王震霞等 2003 物理学报 **52** 813]

[6] Bai Z W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2472 (in Chinese) [白占武 2004 物理学报 **53** 2472]

[7] Wald R M 1994 *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago: University of Chicago Press)

[8] DeWitt B S 1975 *Phys. Rep.* **19** 295

[9] Capper D M, Duff M J 1975 *Phys. Lett.* A **53** 361

[10] Deutsch D, Candelas P 1979 *Phys. Rev.* D **20** 3063

[11] Hawking S W 1977 *Commun. Math. Phys.* **55** 133

[12] Christensen S M 1976 *Phys*. *Rev*. D **14** 2490

[13] Vilenkin A 1978 *Nuovo*. *Cimento*. *Soc*. *Ital*. *Fis*. A **44** 441

[14] Gilkey P B 1979 *Compos*. *Math*. **38** 201

[15] Christensen S M，Fulling S A 1977 *Phys*. *Rev*. D **15** 2088

[16] Capper D M，Duff M J 1974 *Nuovo*. *Cimento*. *Soc*. *Ital*. *Fis*. A **23** 173

[17] Wald R M 1977 *Commun*. *Math*. *Phys*. **67** 552

[18] Davies P C W，Unrum W G 1977 *Proc*. *R*. *Soc*. *Lond*. A **356** 259

[19] Deser S，Duff M J，Isham C J 1976 *Nucl*. *Phys*. B **111** 45

[20] Setare M R 2001 *Class*. *Quan*. *Grav*. **18** 2097

[21] Christodoulakis T，Diamandis G A，Georgalas B C *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. D **64** 124022

[22] Gao X Q，Zhu J Y 2006 *Int*. *J*. *Mod*. *Phys*. D **15** 1

[23] De Paola R D M，Rodrigues R B，Svaiter N F 1999 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **14** 2353

[24] Boulware D G 1975 *Phys*. *Rev*. D **11** 1404

[25] Hartle J B，Hawking S W 1976 *Phys*. *Rev*. D **13** 2188

[26] Unruh W G 1976 *Phys*. *Rev*. D **14** 8979

[27] Garfinkle D，Horowitz G T，Strominger A 1991 *Phys*. *Rev*. D **43** 3140

[28] Gibbons G W，Maeda K 1988 *Nucl*. *Phys*. B **298** 741

[29] Ghosh A，Mitra P 1994 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **73** 2521

[30] Horowitz G T，Strominger A 1991 *Nucl*. *Phys*. B **360** 197

[31] Milton K A 2003 *Phys*. *Rev*. D **68** 065020

The renormalized energy-momentum tensor and Casimir effect of Dirac field in two-dimensional static spacetime*

Liu Cheng-Zhou[1)2)†] Zhang Chang-Ping[1)]

1)（*Dpartment of Physics and Electronics Science*，*Binzhou College*，*Binzhou* 256600，*China*）

2)（*Dpartment of Physics*，*Beijing Normal University*，*Beijing* 100875，*China*）

（Received 28 July 2006；revised manuscript received 30 October 2006）

Abstract

The renormalized energy-momentum tensor and Casimir effect of Dirac field in general asymptotic flat two-dimensional black hole backgrounds with Dirichlet boundary conditions are calculated using the general properties of the renormalized energy-momentum tensor. The general formulas of the renormalized energy-momentum tensor is given and the corresponding Casimir forces in many specific asymptotic flat black hole backgrounds are obtained. The relations of the renormalized energy-momentum tensors and Casimir effect with vacuum，Hawking radiation and trace anomaly are investigated respectively and the corresponding computation results are obtained.

Keywords：energy-momentum tensor，Casimir effect，black hole，vacuum

PACC：0370，0470

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China（Grant No. 10375008）and the State Key Development Program for Basic Reseach of China（Grant No. 2003CB716302）.

† E-mail：czlbj20@yahoo.com.cn