

# 新三维混沌系统及其电路仿真实验

刘 凌<sup>1)</sup> 苏燕辰<sup>1)</sup> 刘崇新<sup>2)</sup>

1) 西南交通大学机械工程学院, 成都 610031)

2) 西安交通大学电气工程学院, 西安 710049)

(2006 年 3 月 21 日收到, 2006 年 11 月 28 日收到修改稿)

提出了一个混沌系统, 并对该系统的基本动力学特性进行了深入研究. 得到该系统的 Lyapunov 指数、Lyapunov 维数, 给出了 Poincaré 映射图以及时域图和相图. 运用电子工作平台 EWB 软件对实现该新混沌系统的振荡器电路进行了仿真实验. 经过数值仿真和电路系统仿真证实该系统与以往发现的混沌吸引子并不拓扑等价, 属于新的混沌系统.

关键词: 混沌系统, 动力学行为, 电路实现

PACC: 0545

## 1. 引 言

自从麻省理工学院的 Lorenz 于 20 世纪 60 年代在数值实验中偶然发现第一个混沌吸引子以来, 混沌在许多领域中获得了重大的发展, Lorenz 系统作为第一个混沌的物理和数学模型, 成为后人研究混沌理论的出发点和基石<sup>[1,2]</sup>. 1999 年陈关荣在混沌系统反控制中发现了一个与 Lorenz 系统并不拓扑等价的新混沌吸引子 Chen 系统<sup>[3,4]</sup>. 2002 年吕金虎等进一步发现了 Lü 系统<sup>[5-7]</sup>. 据 Čelikovesky 和 Chen 的定义, 以上三种系统属于三种不同类型. 2004 年, 刘崇新等<sup>[8]</sup>又提出一种新的三维自治混沌系统, 这个新的系统亦属于 Lorenz 系统族.

本文提出了一个新的混沌吸引子, 我们将对它的奇怪吸引子、Lyapunov 指数、分维数、连续功率谱等基本动力学特性和复杂的动力学行为进行了深入研究. 同时运用电子工作平台 EWB 软件对实现该新型混沌系统的电路进行了仿真实验.

近年来, 随着人们对混沌现象的深入研究, 对其动力学行为和基本特性的逐步了解, 在图像处理、保密通信、电力电网动态分析和保护、机械振动分析与故障诊断、电子振荡发生器设计、信号检测与信息处理等领域中已得到了有效的应用. 随着混沌理论的不断发展和完善, 混沌将会在更多的领域中得到广泛的应用<sup>[9,10]</sup>. 在这些应用中, 我们需要有目的地控制混沌, 也需要有目的地生成混沌或者加强已存

在的混沌行为, 本文就是通过电路设计来产生混沌信号和实现混沌动力学行为.

## 2. 基本分析

提出的新三维自治混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(z - x), \\ \dot{y} &= bx - dxz, \\ \dot{z} &= kxy - cy - gz. \end{aligned} \quad (1)$$

在系统(1)中, 令  $a = 8, b = 40, k = 1, d = 1, c = 10/3, g = 4$ . 显然系统(1)仅存在两个非线性项, 在这个系统中状态变量分别为  $x, y, z$ . 为了求解系统(1)的平衡点, 我们令

$$\begin{aligned} a(z - x) &= 0, \\ bx - dxz &= 0, \\ kxy - cy - gz &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

求解(2)式可得系统两个平衡点  $O(0, 0, 0)$  和  $E(40, 48/11, 40)$ .

在平衡点  $O(0, 0, 0)$ , 对系统(1)进行线性化得其 Jacobian 矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ b - z & 0 & -x \\ ky & -c + kx & -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 8 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -4 \end{bmatrix}.$$

为了求平衡点  $O(0, 0, 0)$  相应的特征根, 令

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0,$$

得相应的特征根  $\lambda_1 = -14.7390, \lambda_2 = 1.3695 +$

$j8.3961$ ,  $\lambda_3 = 1.3695 - j8.3961$ . 这里  $\lambda_1$  为负实根, 而  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  是一对具有正实部的共轭复根. 因此, 平衡点  $O(0, 0, 0)$  为鞍焦点. 由此可见, 在鞍焦点处系统 (1) 是不稳定的.

在平衡点  $E(40, 48/11, 40)$ , 同样对系统 (1) 进行线性化, 得其 Jacobian 矩阵为

$$J_E = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ b-z & 0 & -x \\ ky & -c+kx & -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -40 \\ \frac{48}{11} & \frac{110}{3} & -4 \end{bmatrix}$$

为了求平衡点  $E(40, 48/11, 40)$  相应的特征根, 令

$$\det(J_E - \lambda I) = 0,$$

得相应的特征根  $\lambda_1 = -8.1905$ ,  $\lambda_2 = -1.9048 + j37.8012$ ,  $\lambda_3 = -1.9048 - j37.8012$ . 这里  $\lambda_1$  为负实根, 而  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  是一对具有负实部的共轭复根. 由此可知, 平衡点  $E(40, 48/11, 40)$  是一个稳定的结焦点.

从上述分析可知, 系统 (1) 的两个平衡点一个是不稳定的鞍焦点, 而另一个则是稳定的结焦点.

为了研究系统 (1) 的非线性动力学行为, 我们应用 Matlab 进行了数值仿真. 新系统混沌吸引子的三维图像如图 1 所示, 此混沌吸引子在  $x-z$  平面相图如图 2 所示. 相图中其轨线在特定的吸引域内具有遍历性. 这个混沌系统的奇怪吸引子与 Lorenz 发现的第一个蝴蝶型吸引子形状完全不同, 也与陈关荣发现的 Chen 系统、吕金虎和陈关荣进一步提出的 Liu 系统以及近来刘崇新等发现的 Liu 吸引子不同 (它们均有三个平衡点). 本文提出的这个新系统仅存在两个平衡点, 因此其拓扑结构与它们的拓扑结构完全不同.

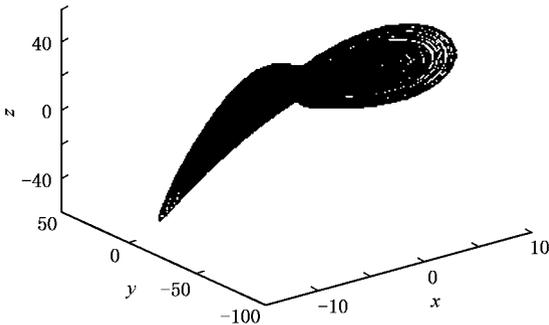


图 1 系统的三维奇怪吸引子

系统 (1) 混沌振荡的时域波形具有非周期性, 解的流对初始值极为敏感, 它的时域波形如图 3 所示.

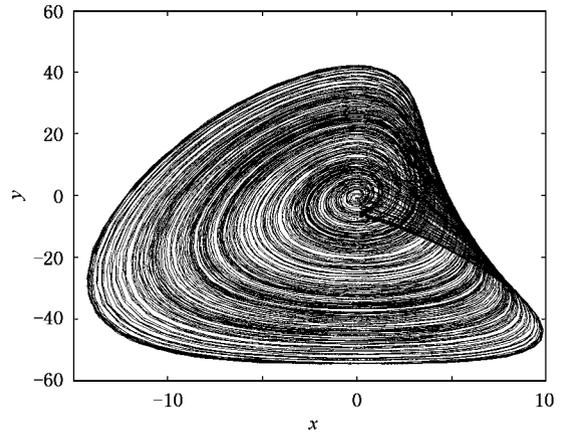


图 2  $x-y$  平面奇怪吸引子

而它的频谱是连续谱, 其频谱图如图 4 所示.

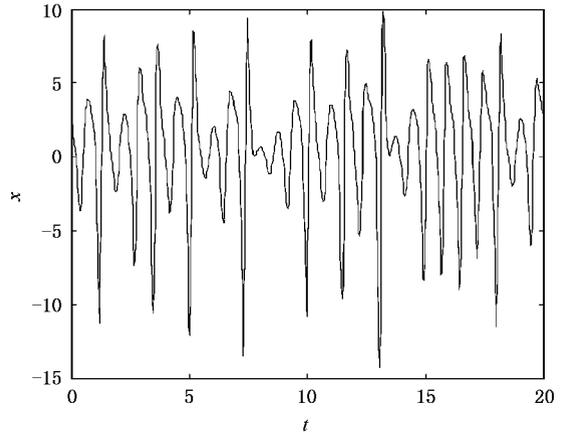


图 3  $x$  的时域波形图

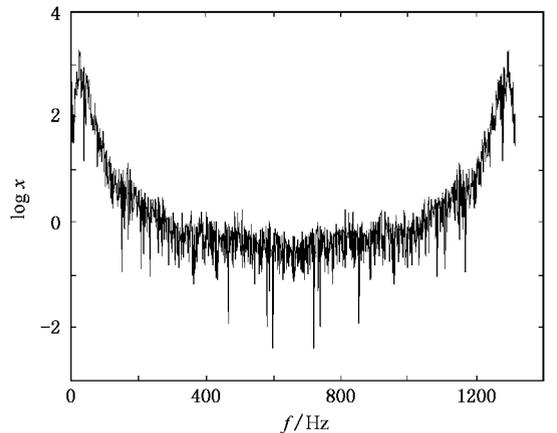


图 4 系统的频谱图

混沌吸引子的相邻轨线之间呈现出彼此排斥的趋势, 并以指数速率相互分离, 而 Lyapunov 指数是

定量描述轨线彼此排斥和吸引的量. 这个系统正的 Lyapunov 指数是  $\lambda_{L1} = 0.867747$ ,  $\lambda_{L2} = 0$ , 而负的 Lyapunov 指数是  $\lambda_{L3} = -12.8672$ , 从而我们可以得到新系统的 Lyapunov 维数为

$$\begin{aligned} D_L &= j + \frac{1}{|\lambda_{Lj+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{Li} \\ &= 2 + \frac{(\lambda_{L1} + \lambda_{L2})}{\lambda_{L3}} \\ &= 2 + \frac{0.867747 + 0}{|-12.8672|} \\ &= 2.0674. \end{aligned}$$

由此可见, 这个新系统的维数是分数维数.

这是一个耗散系统, 由系统(1)得

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - g = -12.$$

这意味着, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨线的每个体积元均以指数率  $-12$  收敛到零. 事实上, 系统的轨迹最终渐近地运动到一个特定的零体积的极限集中, 即一个吸引子上.

通过上述理论分析和数值仿真证明, 这个新系统确实是一个新的混沌系统.

### 3. 系统的振荡器电路实现

我们对本文所提出的系统(1)进行了振荡器电路设计<sup>[7]</sup>, 它由三个部分组成. 运算放大器、模拟乘法器、线性电阻和电容器等用来执行加、减、乘法运算, 并将三个状态变量  $x, y$  和  $z$  连接成一个整体, 电路如图 5 所示.

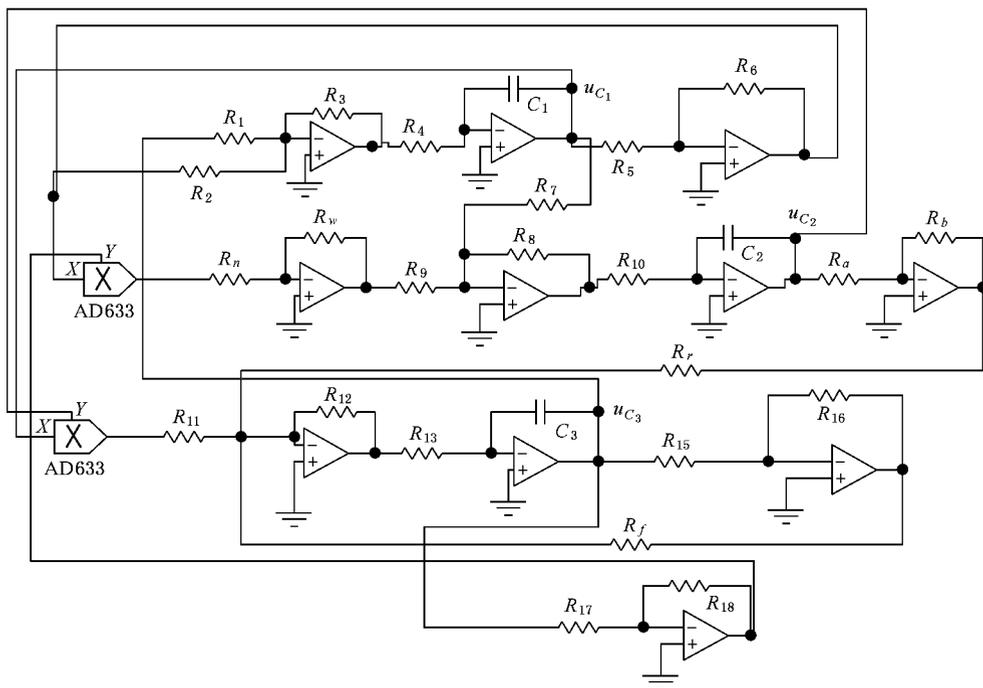


图 5 系统(1)的振荡器电路图

电路方程为

$$\begin{aligned} \dot{u}_{C1} &= \frac{R_3}{R_1 R_4 C_1} u_{C3} - \frac{R_6 R_3}{R_2 R_5 R_4 C_1} u_{C1}, \\ \dot{u}_{C2} &= \frac{R_8}{R_7 R_{10} C_2} u_{C1} - \frac{R_w R_8 R_6 R_{18}}{10 R_n R_9 R_{10} R_5 R_{17} C_2} u_{C1} u_{C3}, \\ \dot{u}_{C3} &= \frac{R_{12}}{10 R_{11} R_{13} C_3} u_{C1} u_{C2} - \frac{R_b R_{12}}{R_a R_r R_{13} C_3} u_{C2} \\ &\quad - \frac{R_{16} R_{12}}{R_f R_{15} R_{13} C_3} u_{C3}. \end{aligned} \quad (3)$$

这里电阻值分别取为  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 8 \text{ k}\Omega$ ,

$R_4 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = R_6 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_8 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_7 = R_{10} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_a = R_b = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_r = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{11} = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{12} = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{13} = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_w = R_n = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_9 = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{15} = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{16} = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_f = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{16} = R_{18} = 1 \text{ k}\Omega$ . 电容值分别取为  $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 3 \mu\text{F}$ .

我们令  $u_{C1} = x$ ,  $u_{C2} = y$ ,  $u_{C3} = z$ , 则系统(1)和系统(3)是等价的. 我们采用 EWB 软件对电路进行了仿真实验, 仿真结果如图 6 和图 7 所示.

由于 EWB 软件采用直观的图形界面创建电路,

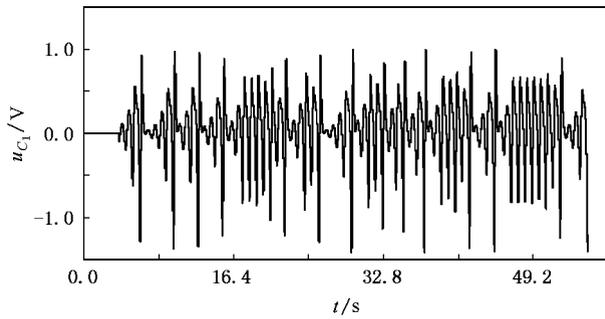


图 6 EWB 振荡器电路仿真实验  $u_{C_1}(t)$  时域波形

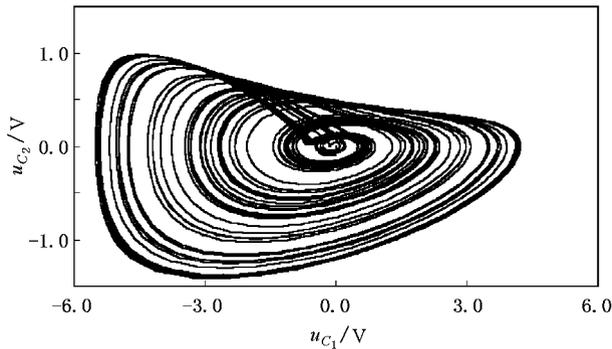


图 7  $x-z$  平面 EWB 振荡器电路仿真实验相图

软件仪器的控制面板外形和操作方式都与实物相

似,可以实时显示测量结果,所以该混沌系统的仿真实验与实际电路实验应该是基本符合的.因此仿真实验结果是有效的,我们可以看到 EWB 仿真实验结果与数值仿真结果是一致的.

通过上述理论分析和仿真实验证实,本文提出的非线性系统是一个新的混沌系统,它具有一切混沌系统的共有特征:确定性、有界性、对初值的极端敏感性、长期不可预测性、正的最大 Lyapunov 指数、一定频率范围内的连续谱和遍历性等.

## 4. 结 论

通过以上理论分析和计算机仿真,我们得出以下结论:

1) 本文提出的混沌系统的数学模型拓扑结构简单,仅仅具有两个平衡点.

2) 这个新的混沌系统中存在着复杂的混沌动力学行为,它具有一切混沌系统的共有特征.

3) 这个新的混沌系统可以用电子振荡器电路来实现.它在电子测量、保密通信等领域中具有潜在的应用价值.

如何控制这个系统以及深入研究它的动力学行为是作者今后将要进行的工作.

- [ 1 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [ 2 ] Lorenz E N 1993 *The Essence of Chaos* ( Washington : University of Washington Press )
- [ 3 ] Chen G R , Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [ 4 ] Celikovsky S , Chen G 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1789
- [ 5 ] Lü J H , Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [ 6 ] Lü J H , Chen G R , Cheng D Z et al 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [ 7 ] Chen G R , Lü J H 2003 *Dynamics of the Lorenz System Family :*

*Analysis , Control , and Synchronization* ( Beijing : Science Press ) ( in Chinese ) [ 陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 ( 北京 科学出版社 ) ]

- [ 8 ] Liu C X , Liu L , Liu K 2004 *Chaos Solitons Frac.* **22** 1031
- [ 9 ] Cui W Z , Zhu C C , Bao W X et al 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3009 ( in Chinese ) [ 崔万照、朱长纯、保文星等 2005 物理学报 **54** 3009 ]
- [ 10 ] Han F L , Wang Y , Yu X H et al 2004 *Chaos Solitons Frac.* **21** 69



# A new chaotic system and its circuit simulation

Liu Ling<sup>1)</sup> Su Yan-Chen<sup>1)</sup> Liu Chong-Xin<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *Institute of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*

<sup>2)</sup> *Institute of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

( Received 21 March 2006 ; revised manuscript received 28 November 2006 )

## Abstract

In this paper a new chaotic system is presented. Some basic dynamical properties are investigated. The oscillator circuit realizing the new chaotic system is simulated using Electronics Workbench (EWB). Continuous spectrum, Lyapunov exponents, fractal dimension and strange attractor of the system are studied.

**Keywords** : chaotic system , dynamical behavior , circuit realization

**PACC** : 0545