

基于状态观测器的一类混沌系统的反同步*

王兴元[†] 武相军

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2006 年 4 月 19 日收到, 2006 年 5 月 12 日收到修改稿)

基于状态观测器方法和极点配置技术, 设计出一种反同步方法, 使得一类混沌系统达到了反同步. 与其他反同步方法相比, 所设计的方法更为简便, 并且达到反同步的时间短. 数值模拟验证了所提方案的有效性.

关键词: 状态观测器, 极点配置技术, 反同步

PACC: 0545, 0555

1. 引 言

1990 年, Pecora 和 Corroll 首次提出了“混沌同步”的概念, 并在电路实验中实现了耦合混沌系统的自同步^[1,2]. 由于混沌同步在保密通信、信号处理和生命科学等方面有着十分广阔的应用前景和巨大的市场潜在价值, 引起了人们极大的关注, 并对此进行了广泛而深入的研究^[3-5]. 以往的研究大多集中于混沌系统的自同步^[6-12], 以及非恒同混沌系统的同步^[13-16]. 近年来, 一些学者拓宽了同步的概念, 提出并实现了不同类型的混沌同步, 如完全同步、广义同步、相同步、延迟同步、射影同步等^[17-23]. 另外, 人们在周期混沌系统中还观察到了反同步现象^[24,25]. 所谓反同步, 是指达到同步的两个混沌系统的状态向量的绝对值相同但符号相反. 最近, 文献[26,27]分别在耦合和无方向耦合的两个相同的混沌系统中实现了反同步. 基于状态观测器方法和极点配置技术, 本文设计并实现了一类混沌系统的反同步, 通过对双盘发电机系统的数值模拟, 进一步验证了该方案的有效性.

2. 反同步状态观测器的设计

考虑具有如下形式的一类非线性系统:

$$\dot{x} = Ax + Bf(x) + C, \quad (1)$$

这里 $x \in R^n$ 是 n 维状态向量; $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times n}$ 是

系统的参数矩阵; $C \in R^n$ 是系统的常数量矩阵; $f(x): R^n \rightarrow R^n$ 是非系统的非线性部分, 为连续光滑函数.

假定系统(1)的输出由下式描述:

$$u(x) = Kx + C, \quad (2)$$

则系统(1)的观测器可设计为

$$\begin{aligned} \dot{y} = Ay + C - Bf(x) \\ - (u(x) + u(y)). \end{aligned} \quad (3)$$

这里矩阵 $K \in R^{n \times n}$ 是反馈增益矩阵.

任取初始值, 若下式成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x + y\| = 0, \quad (4)$$

则系统(1)和系统(3)可达到反同步. 定义系统(1)与系统(3)的反同步状态误差为 $e = x + y$, 则由系统(1)和系统(3)可知, 误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{x} + \dot{y} \\ = Ae + 2C - (u(x) + u(y)) \\ = (A - K)e. \end{aligned} \quad (5)$$

显然, 误差系统(5)是线性的, 并且不随时间变化而变化. 通过适当地调整矩阵 K 的值, 使得误差系统(5)在原点处渐近稳定, 那么系统(3)就是系统(1)的状态观测器. 实际上, 总存在一个增益矩阵 K , 当 (A, I) 可观测时, 矩阵 $(A - K)$ 是稳定的. 可见系统(3)是系统(1)的全局观测器, 即系统(1)的状态向量 x 随着时间的增大无限接近 $-x$, 而与系统(3)和系统(1)的初始值无关. 对于常量反馈增益矩阵 K 的选取, 通常采用极点配置技术, 并且满足矩阵 $(A -$

* 国家自然科学基金(批准号: 60573172)和辽宁省教育厅科学技术研究计划(批准号: 20040081)资助的课题.

[†] E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

K 的特征值均为负实数的条件.

3. 模拟系统的描述

地磁理论中关键问题之一是地磁场长期变化中的极性反转. 地磁学家们提出了诸如运动学发电机反转模型、统计模型、磁流体力学反转模型和力学模拟模型(也称为圆盘发电机模型). 在这些模型中, 圆盘发电机模型曾作为最早的地磁起源及反转的模拟模型起到很重要的作用. 圆盘发电机模型中有单盘发电机模型^[28]、双盘发电机模型^[29]和 N 圆盘耦合的发电机模型^[30]等, 其中 Rikitake 所提出的双盘发电机模型是其他模型(如 Allan 于 1962 年提出的带摩擦的双盘发电机模型^[31])的基础. Rikitake 的双盘发电机模型是由两个圆盘和两个相互耦合的线圈组成(图 1).

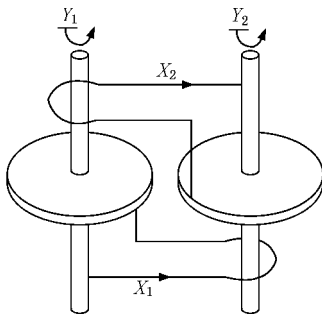


图 1 Rikitake 的双盘发电机模型

Rikitake 的双盘发电机模型的无量纲方程为

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} + \mu X_1 &= X_2 Y_1, \\ \frac{dX_2}{dt} + \mu X_2 &= X_1 Y_2, \\ \frac{dY_1}{dt} = \frac{dY_2}{dt} &= 1 - X_1 X_2. \end{aligned} \quad (6)$$

这里 X_1 和 X_2 表示无量纲电流, Y_1 和 Y_2 表示圆盘 1 和圆盘 2 的角速度, t 为无量纲时间, $\mu > 0$ 为可调参数. 显然方程组 (6) 可化为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + yz, \\ \dot{y} &= -\mu y + (z - \sigma)x, \\ \dot{z} &= 1 - xy, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\sigma = \mu(k^2 - k^{-2})$, k 为实常数. 当 $\mu = 1, k = 2$ 时, 双盘发电机系统出现混沌行为^[32]. 图 2 为双盘发电机系统的混沌吸引子. 本文选取双盘发电机系统 (7) 进行了混沌反同步数值模拟实验.

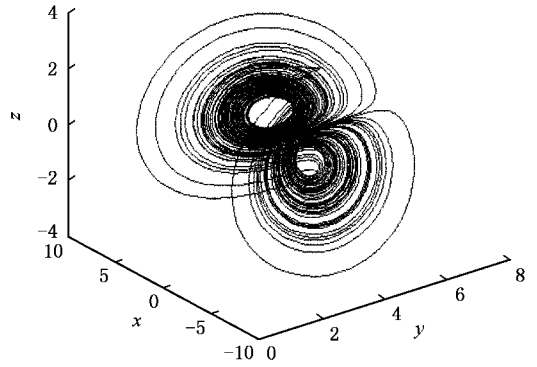


图 2 双盘发电机系统的混沌吸引子

4. 数值模拟

双盘发电机系统 (7) 可表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ -\sigma & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

这里 $\mu = 1, \sigma = 3.75$. 显然, 矩阵 A, B 和 C 分别为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3.75 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

若选取输出 $u(x) = Kx + C$, 则观测器 (3) 可改写为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3.75 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (u(x) + u(y)). \end{aligned} \quad (9)$$

由于矩阵 $I - A \times I - A^2 \times I$ 的秩为 3, 即满秩, 所以系统 (9) 是可控制和可完全观测的. 也就是系统 (9) 是系统 (8) 的全局观测器. 下面将利用极点配置技术来构造反馈增益矩阵 K . 为了保证误差系统 (5) 收敛于原点, 本文选取矩阵 $(A - K)$ 的特征值为 $[-1 \quad -2 \quad -3]$. 这样可求出矩阵 K 为

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3.75 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由 (8) — (10) 式, 可得出误差系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 + \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 + \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

选取时间步长为 $\tau = 0.02 \text{ s}$, 采用四阶 Runge-Kutta 法去求解方程 (8) (9) (11), 作者研究了双盘发电机混沌系统的反同步. 系统 (8) 与系统 (9) 的初

始点分别选取为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0.2, \\ x_2(0) &= 0.2, \\ x_3(0) &= 2.0, \\ y_1(0) &= 0.3, \\ y_2(0) &= 0.1, \\ y_3(0) &= 3.0. \end{aligned}$$

因此误差系统 (11) 的初始值为

$$\begin{aligned} e_1(0) &= 0.5, \\ e_2(0) &= 0.3, \\ e_3(0) &= 5.0. \end{aligned}$$

双盘发电机系统反同步过程的模拟结果如图 3—图 5 所示. 由图 3 可以看出, 系统 (8) 和系统 (9) 的状态变量 $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ 和 $x_3 - y_3$ 均处于相图的反对角线上, 这说明系统 (8) 和系统 (9) 达到了反同步. 由误差效果图 4 可以看出, 当 t 分别接近 $8.4, 3 \text{ s}$ 时, 误差 $e_1(t)$, $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 已分别稳定在零点. 由图 5 可以看出, 系统 (8) 和系统 (9) 的相空间中轨迹在二维平面的投影是反对称的, 这亦说明此时两者已达到了反同步.

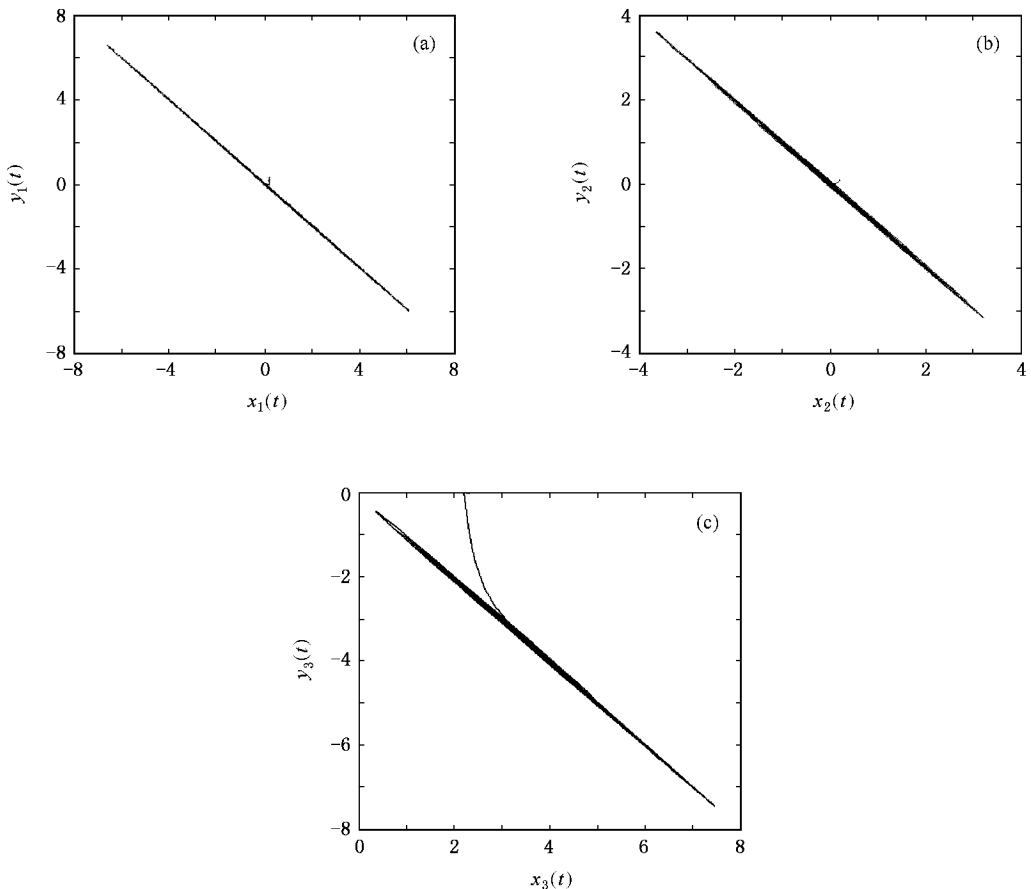


图 3 系统 (8) 和系统 (9) 的状态变量反同步图 (a) $x_1 - y_1$, (b) $x_2 - y_2$ (c) $x_3 - y_3$

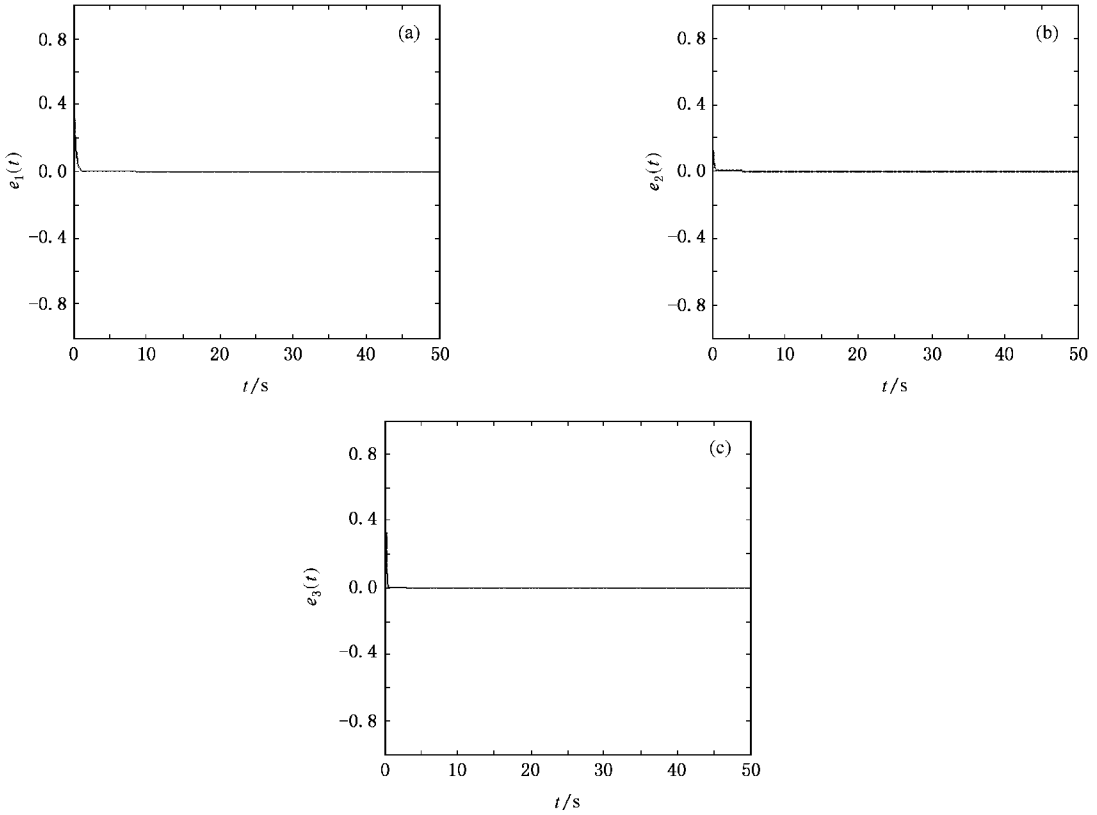


图 4 系统(8)和系统(9)的反同步误差曲线图 (a) $e_1(t)$ (b) $e_2(t)$ (c) $e_3(t)$

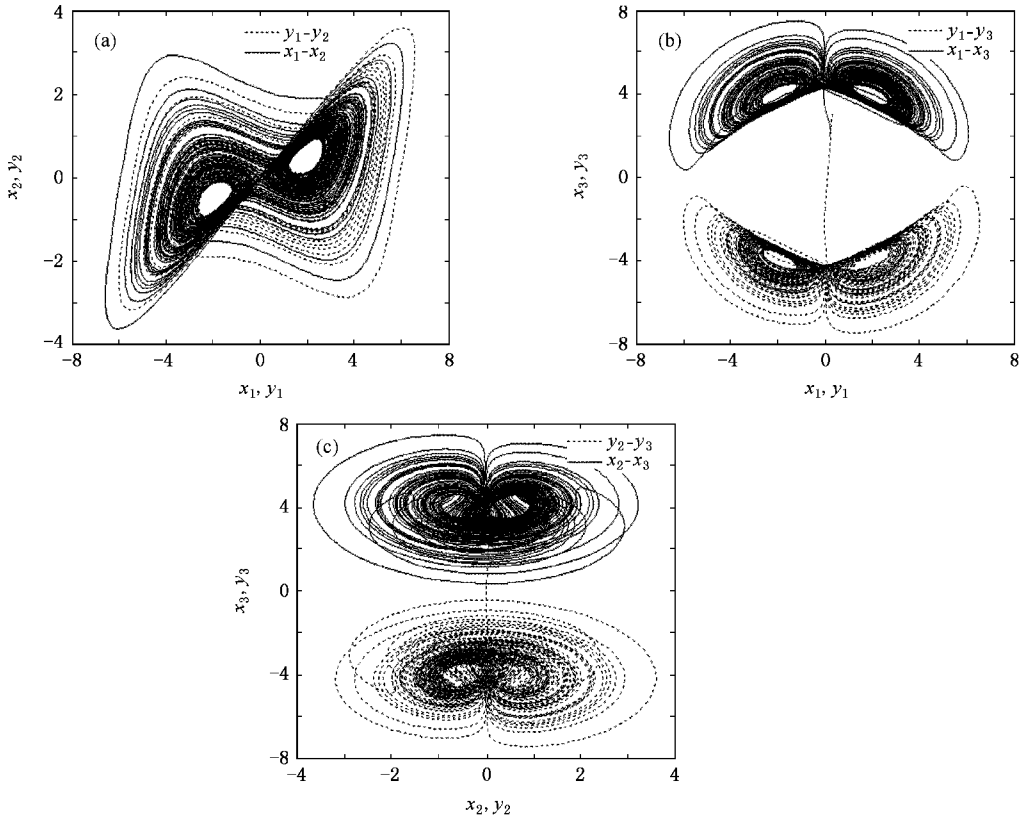


图 5 系统(8)和系统(9)的相轨迹在二维平面的投影 (a) x_1-x_2 和 y_1-y_2 (b) x_1-x_3 和 y_1-y_3 (c) x_2-x_3 和 y_2-y_3



5. 结 论

本文研究了一类混沌系统的反同步问题. 基于状态观测器方法和极点配置技术, 设计了一类混沌

系统反同步方案使得混沌系统达到反同步. 与其他反同步方法相比, 本文方法实现简便, 并且能很快达到反同步. 通过对双盘发电机系统的数值模拟, 进一步验证了该方案的有效性.

- [1] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Carroll T L , Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** 453
- [3] Chen G , Dong X 1998 *From Chaos to Order : Methodologies , Perspectives and Applications* (Singapore : World Scientific) Chapt 1
- [4] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaotic Control , Synchronization and Utilizing* (Beijing : National Defence Industry Press) Chapt 7 (in Chinese) [王光瑞、于熙岭、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第7章]
- [5] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing : Electronics Industry Press) Chapt 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第2章]
- [6] Agiza H N , Yassen M T 2000 *Phys. Lett. A* **278** 191
- [7] Morgul Ö , Solak E 1996 *Phys. Rev. E* **54** 4803
- [8] Grassi G , Mascolo S 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **44** 1011
- [9] Liu J , Chen S H , Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [10] Wang X Y , Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]
- [11] Feki M 2003 *Chaos Solitons Fract.* **18** 141
- [12] Parmananda P 1998 *Phys. Lett. A* **240** 55
- [13] Feki M 2003 *Phys. Lett. A* **309** 53
- [14] Huang L L , Feng R P , Wang M 2004 *Phys. Lett. A* **320** 271
- [15] Chen H K 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 1245
- [16] Chen M Y , Zhou D H , Shang Y 2005 *Phys. Lett. A* **337** 384
- [17] Shinbrot T , Grebogi C , Ott E *et al* 1993 *Nature* **363** 411
- [18] Michael G R , Arkady S P , Jurgen K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193
- [19] Yu X , Song Y 2001 *Int. J. Bifur. Chaos* **11** 1737
- [20] Yang X S 2001 *Appl. Math. Comput.* **122** 71
- [21] Ho M C , Hung Y C , Chou C H 2002 *Phys. Lett. A* **296** 43
- [22] Shahverdiev E M , Sivaprakasam S , Shore K A 2002 *Phys. Lett. A* **292** 320
- [23] Xu D L , Li Z 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1395
- [24] Belykh V N , Chua L O 1992 *Int. J. Bifur. Chaos* **2** 697
- [25] Chen S , Wang F , Wang C P 2004 *Chaos Solitons Fract.* **20** 235
- [26] Kim C M , Rim S H , Key W 2003 *Phys. Lett. A* **320** 39
- [27] Hu J , Chen S H , Chen L 2005 *Phys. Lett. A* **339** 455
- [28] Bullard E C 1955 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51** 744
- [29] Rikitake T 1958 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **54** 89
- [30] Lebovitz N R 1959 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **56** 154
- [31] Allan D W 1962 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58** 671
- [32] Keisuke I 1980 *Earth Planet. Sci. Lett.* **51** 451

Chaos anti-synchronization of a class of chaotic systems based on state observer design^{*}

Wang Xing-Yuan[†] Wu Xiang-Jun

(School of Electronic and Information Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China)

(Received 19 April 2006 ; revised manuscript received 12 May 2006)

Abstract

We present a systematic design procedure to anti-synchronize a class of chaotic systems based on techniques from the state observer design and the pole placement technique. In contrast to the conventional anti-synchronization approaches, the proposed method is rather simple and convenient to realize anti-synchronization. Furthermore, the rate of achieving anti-synchronization is very fast. Numerical simulations show the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords : state observer , pole placement technique , anti-synchronization

PACC : 0545 , 0555

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Science and Technology Research Program of the Education Bureau of Liaoning Province , China (Grant No. 20040081).

[†] E-mail : wangxy@dlut.edu.cn