

颗粒物质在冲击作用下的堆积分布^{*}

张 航[†] 郭蕴博 陈 骁 王 端 程鹏俊

(南京大学物理系, 南京 210093)

(2005 年 12 月 7 日收到, 2006 年 11 月 24 日收到修改稿)

沙堆在冲击作用下的行为和静态沙堆的行为有着很大的不同. 通过管道产生“高斯冲击”(速度水平分量成高斯分布)来研究沙堆堆积时的分布情况, 发现沙堆自身的稳定性和外界冲击是影响沙堆形状的两重要因素. 给出了沙堆在冲击作用下高度随时间的演化方程. 通过该方程, 成功地得到了沙堆中心点的高度与外界参量之间的关系, 并且提出了一种节能高效的颗粒混合方法.

关键词: 颗粒物质, 堆积, 高斯分布, 冲击

PACC: 0565, 0590

1. 引 言

颗粒物质是一种很普遍的物质, 在自然界中随处可见, 但它却具有极其特殊的性质, 目前已成为物理学研究的一个热点^[1]. 颗粒物质在不同情况下可分别表现出固体、液体或气体的行为^[2-4], 同时展现出很多有趣的现象, 如巴西果效应^[5-8]和自组织临界现象^[9,10], 在这些奇妙现象的背后隐藏着深刻的物理内涵, 如相变、凝聚^[11,12]、自组织^[2,13]、分形、混沌等. 这些问题的探讨对于研究自然界物质的组织方式及生态学、地质学、系统科学、材料科学等都有重要的推动作用.

单个颗粒的行为往往是非常简单, 易于分析的, 而当颗粒组成一个系统时情况就变得非常复杂了. 沙堆模型是颗粒系统的一个很重要的研究领域. 在这个方向上, 静态沙堆的行为已经得到了深入的研究. 研究的重点主要集中在堆积的稳定性问题、雪崩现象的发生^[4,9,10]以及堆底压力分布^[14]等. 而对动态沙堆模型却鲜有研究, 目前动态颗粒系统的研究主要是颗粒流问题^[15]. 本文主要研究颗粒物质在“高斯冲击”作用下堆积形状的动态演化及其表面的稳定性问题.

2. “高斯冲击”的产生

一根长且细的管道, 采取竖直放置的方式, 在其上端匀速输入颗粒物质(初始速度为零), 颗粒将在管道内(管壁光滑且各向同性)运动一段时间后从下端喷出. 喷出的颗粒具有一定的速度分布. 在理想情况下, 颗粒从管口喷出时竖直方向的速度分量应当是基本相同的, 设其为 v_z , 而颗粒的水平速度分量满足高斯分布.

当颗粒物质经过足够长的管道, 最终落到载物平台时, 就会在载物平台上形成颗粒堆积分布. 我们不妨假设(1)颗粒落到载物平台上立即静止, 即不再发生跳跃现象.(2)颗粒的堆积始终不会坍塌, 这里暂不考虑稳定性的问题.

定义 $H(r)$ 表示颗粒在 r 处的堆积高度, A 为 $r=0$ 处即沙丘中心处的堆积高度(以下简称零点高度). 基于上述两个假设以及系统的对称性和函数的奇偶性, 可以推得刚出管口时颗粒水平速度分布为

$$f(v_{\parallel}^2) = ce^{av_{\parallel}^2}. \quad (1)$$

当颗粒落到载物平台上, 由 $r = v_{\parallel} t$ 可得

$$H(r) = Ae^{a(r/t)^2}. \quad (2)$$

由此可见, 颗粒的堆积在理想情况下应为二维高斯分布.

^{*} 国家基础科学人才培养基金(批准号: G088)资助的课题.

[†] E-mail: zhanghang0812@gmail.com

由于颗粒的总体积为定值,即

$$V = \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} H(r) r d\theta dr \propto At^2 = \text{const.}$$

在自由落体条件下,

$$h = gt^2/2 + v_z t,$$

因而可得出零点高度

$$A = \frac{k}{(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})^2}, \quad (3)$$

式中 k 为与系统性质有关的常数, L 为管长, h 为管口到沙堆底部的距离. 以上模型只是理想模型, 没有考虑到对颗粒堆积有很大作用的沙堆稳定性以及颗粒的冲击作用.

3. 实 验

为研究上述模型, 我们设计的实验装置如图 1 所示. 将一根管长 $L = 103.8 \text{ cm}$, 内径为 6 mm 的细长管道竖直放置, 并用铁架台固定, 使其下端到载物平台的距离为 h . 由于刚玉和金刚砂颗粒具有较好的刚性, 所以我们首先选择这两种颗粒进行实验. 在管道的顶端置漏斗, 将一定体积的刚玉颗粒 (大小相当于 80 目砂纸的颗粒) 缓缓通过漏斗匀速地输入到管中. 当所有颗粒均通过管道完成堆积之后, 测量沙堆峰的高度. 通过不断调整管口到载物平台的高度, 可以得到不同颗粒堆的峰值. 最后将刚玉颗粒换成其他的刚性颗粒物质进行同样的实验操作.

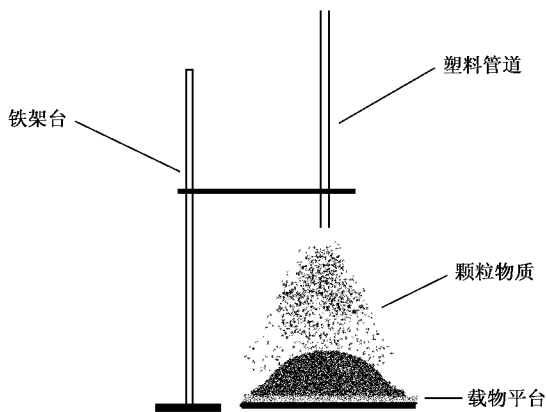


图 1 实验装置示意图

在理想情况下, 当颗粒物质经过足够长的管道后, 落在载物平台上就会形成高斯型堆积分布. 但是高斯分布是理想的模型, 实际的管口并不是一个理想点, 最终形成的堆积应当是对高斯分布的积分, 即

$$H(r) = A \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-a}^a e^{-\beta(r-x)^2} dx. \quad (4)$$

这里 H 为沙堆上某点的高度, x 为管的截面上各点偏离轴心的水平距离, a 为管的半径. 由于本实验中 $a \ll h$, 所以可以近似认为这种堆积分布是一种高斯分布.

由于颗粒是刚性的, 所以第一批颗粒落地时会与载物平台碰撞, 发生“跳跃”现象, 破坏高斯分布. 为了避免这种情况, 在实验过程中, 通过在载物平台上垫一层缓冲垫, 就可以有效地减少“跳跃”现象的发生.

4. 实验结果及讨论

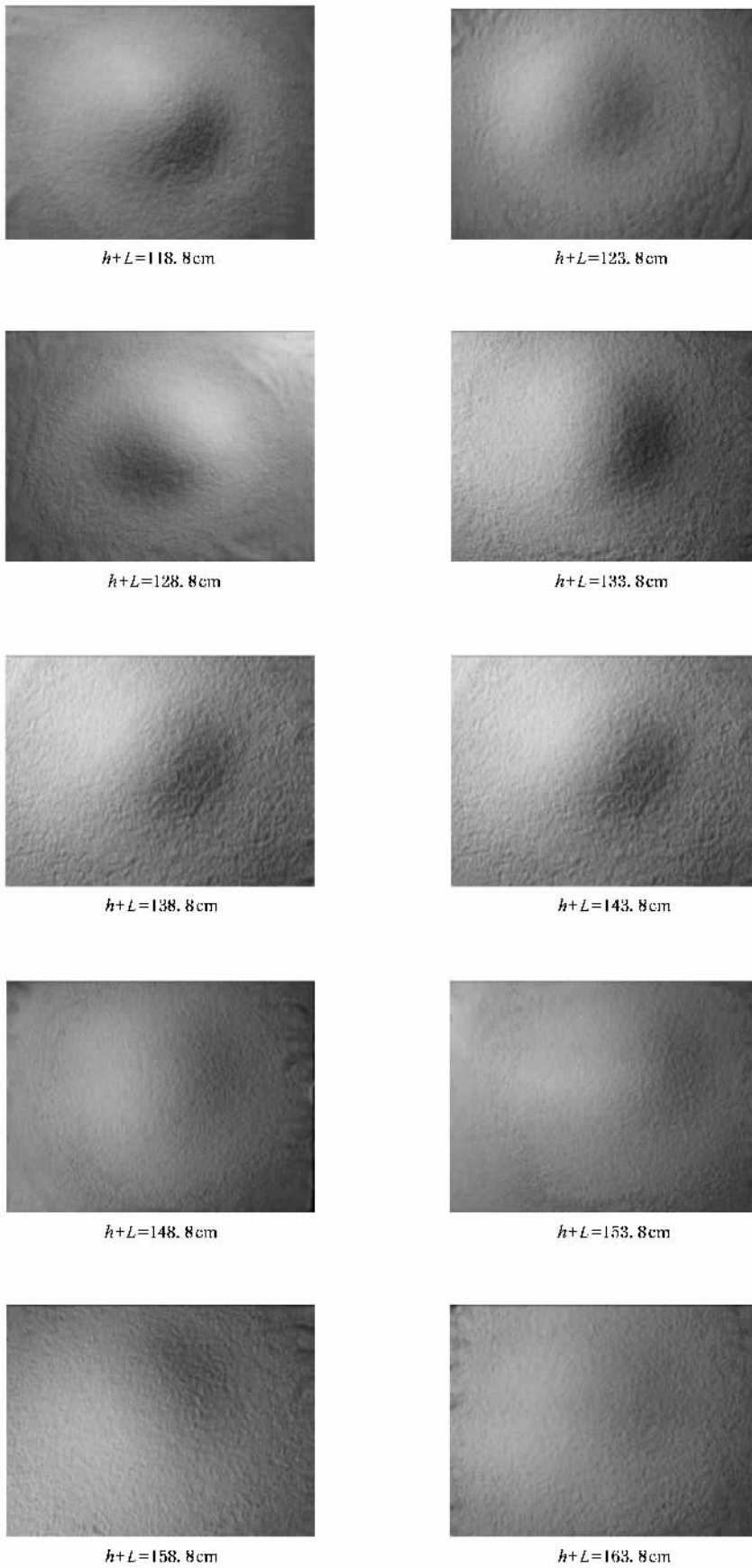
将总体积 $V = 50 \text{ ml}$ 的刚玉颗粒缓缓地由管的上端输入管道, 颗粒物质在管道内与管壁以及颗粒之间会发生多次碰撞. 当颗粒从管口输出时, 会在载物平台上形成如图 2 所示的堆积形态. 对于不同的 $h+L$ 值, 我们所得到的颗粒堆的零点高度也不相同.

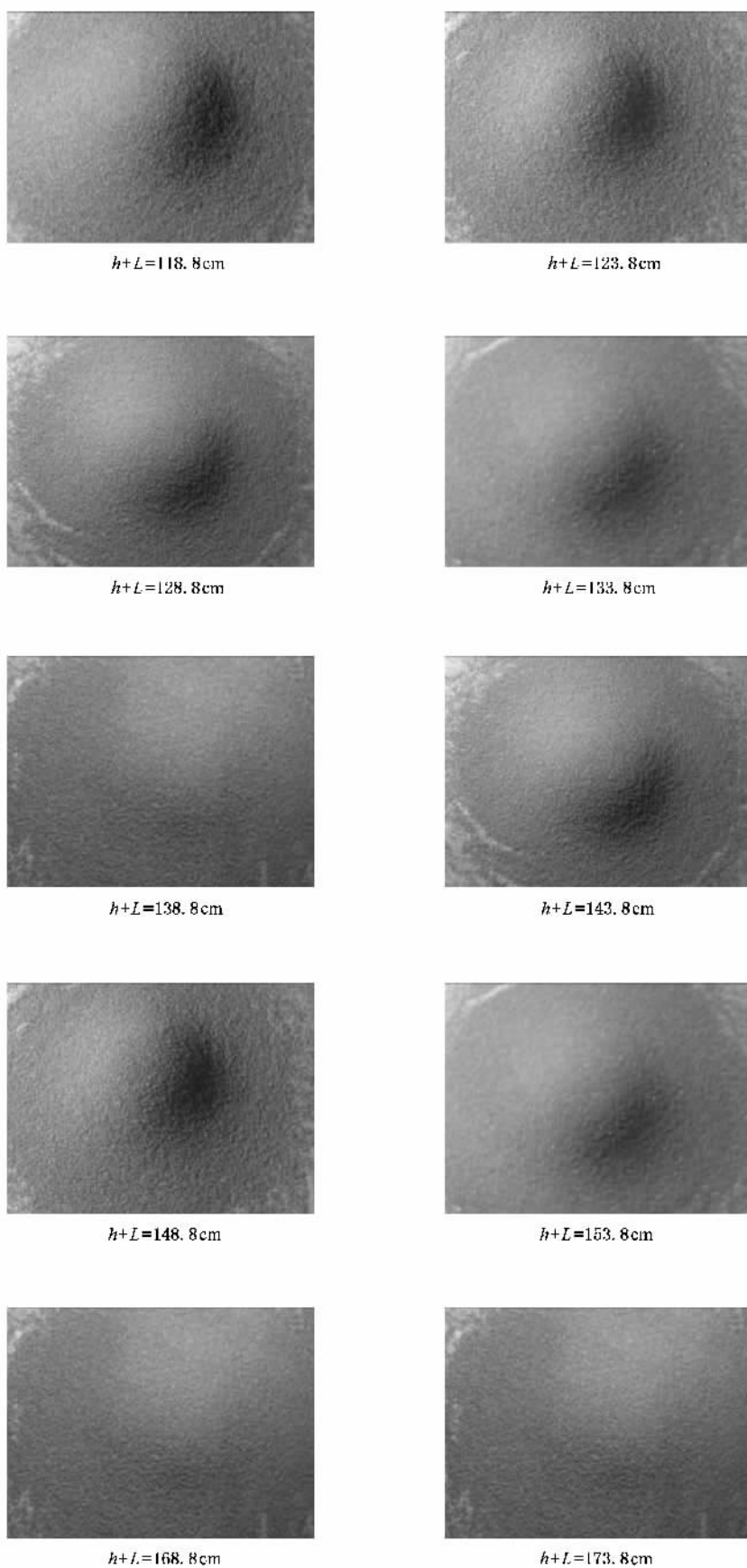
我们采用总体积为 $V = 50 \text{ ml}$ 的金刚砂颗粒, 重复以上的操作后, 也观察到了类似的现象. 对于不同的 $h+L$ 值, 金刚砂颗粒在载物平台上的堆积形态如图 3 所示.

利用(3)式得到了零点高度 A 的理论计算值, 将两种颗粒的理论值与实验测量值进行比较, 所得结果如图 4、图 5 所示.

从图 4 和图 5 中的曲线可看出, 理论计算值和实验测量值的偏差很大. 对于同种颗粒 (如刚玉), 当体积变为两倍时, 零点高度的理论计算值应当为原来的两倍, 但实验测量所得到的零点高度值却并没有变为两倍. 体积分别为 25 和 50 ml 不同 h 时的零点高度如图 6 所示.

通过实验结果和理论结果的比较, 我们不难发现两者并不相符. 这是由于对于真实的颗粒物质, 还应当考虑以下两点因素: (1) 颗粒在堆积时表面会发生滑坡现象, 这与沙堆表面坡度有关, 因此我们认为 $H = H(r, t)$ 与 $\nabla H(r, t)$ 有关 (H 为沙堆上某点的高度, $\nabla H(r, t)$ 描述的则是某点的斜率); (2) 从管口喷出的颗粒具有竖直和水平两个方向上的动量 (对于管口正下方附近的区域, 由于动量水平分量很小, 故只研究竖直分量), 当它落到沙堆表面时会破坏沙堆的形状, 并且降低沙堆的堆积高度.

图2 不同 $h+L$ 值下刚玉颗粒的堆积形态照片

图3 不同 $h+L$ 值下金刚砂颗粒的堆积形态照片

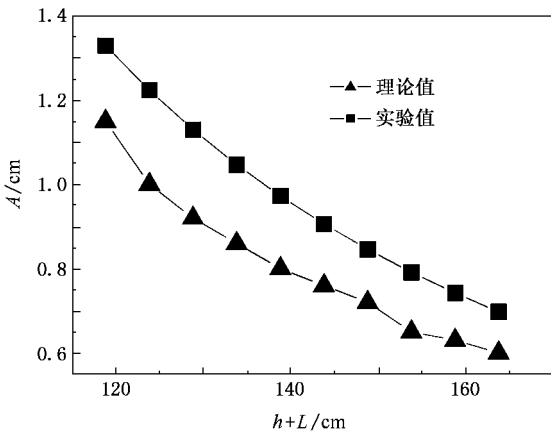


图4 刚玉颗粒的 $A-h+L$ 曲线

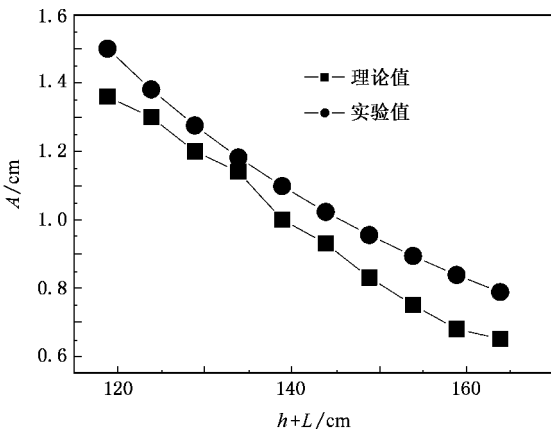


图5 金刚砂颗粒的 $A-h+L$ 曲线

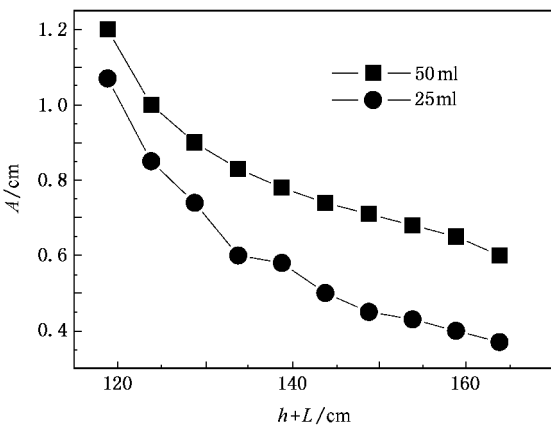


图6 不同体积金刚砂颗粒的 $A-h+L$ 曲线

综合上述两种因素,可得出沙堆在冲击作用下表面随时间变化的分布函数

$$dH(r,t) = \Psi(r,h)\Phi(\nabla H)dV(r,t), \quad (5)$$

式中 $\Psi(r,h)$ 代表颗粒的冲击作用对 $r-r+\Delta r$ 的环形区域内沙堆高度的影响,而 $\Phi(\nabla H)$ 代表沙堆表面的坡度造成的滑坡现象对 $r-r+\Delta r$ 的环形区域中沙堆高度的影响, $dV(r,t)$ 则表示颗粒在该微小区域上单位时间内下落的颗粒体积.这样就对原来的理想模型进行了修正.由于在零点高度附近斜率较小,可以对模型进行简化,近似认为

$$\Psi = (h+L)^m,$$

以及

$$\Phi = A^{-n}.$$

从而得到

$$dA = CA^{-n}(L+h)^m(\sqrt{L+h}-\sqrt{L})dV.$$

对此式积分后可得

$$A = C(L+h)^m(\sqrt{L+h}-\sqrt{L})^n, \quad (6)$$

式中为了简化,仍用 n 代替结果中 $(\sqrt{L+h}-\sqrt{L})$ 的指数.对于体积为 50 ml 的刚玉颗粒,利用修正后的方程得出的结果与实验符合很好,见图 7.

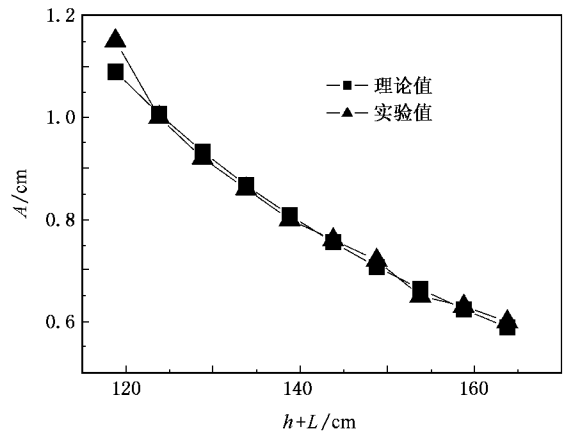


图7 利用方程(6)得到刚玉颗粒的 $A-h+L$ 曲线

对于金刚砂颗粒,修正后的理论值和实验值也较为符合,结果如图 8 所示.

在实验过程中,我们选取了多种颗粒.通过实验得到 n 值约为 -4 , m 则取决于颗粒物质的性质(与颗粒的粗糙程度以及颗粒的形状有关)和系统的堆积状态,需要通过实验测得.而 C 的大小则主要与颗粒的总体积有关.

利用方程(6)可以预测 h 变化时沙堆在冲击作用下的堆积高度.

以上分析了两种颗粒分别通过管道时在不同外界条件下的堆积行为.当两种颗粒同时通过管道时,出管后将形成两种颗粒的混合堆积.如果整个堆积的高度较低,滑坡现象对于颗粒堆的形态影响将会

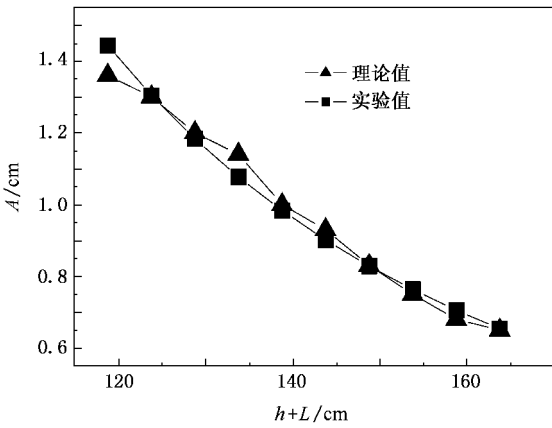


图8 利用方程(6)得到金刚砂颗粒的 $A-h+L$ 曲线

很小,这样颗粒堆积更接近高斯分布.由于 h 对于两种颗粒物质堆积高度的影响不同(即两条 $A-h$ 必然会有交点)我们还在实验中不断调整 h 大小,试图找到一个合适的 h 值,使得两种颗粒能够混合均匀,但在实验中却发现只有在中间部分(通常为 $r \leq h/3$ 的范围内)颗粒混合效果较好,而在其他地方混合的均匀程度并不理想.经过分析发现,要使混合均匀,两种颗粒出管口的速度分布必须相同,从而对于任意 r 值,必须有

$$\frac{f_1(v^2)}{f_2(v^2)} = \frac{A_1 e^{\alpha v^2}}{A_2 e^{\beta v^2}} = Ke^{(\alpha-\beta)v^2} = \text{const}, \quad (7)$$

即 α, β 的值要相同.由于 α, β 只由颗粒本身属性和管壁属性决定,难以调节,因而只用一根管道是很难

使颗粒混合均匀,但可以考虑让颗粒通过两根不同管道,最后从一个管口流出.在生产实践中,可以通过调整两根管的长度和材料,使得 α, β 值相同,这样两种颗粒的堆积分布就能完全相同.通过这种方法可以使两种颗粒均匀混合,这将为颗粒混合提供一条高效节能的可能途径.

本文的主要工作只是讨论了单个沙堆在冲击下的堆积分布,而实际情况下沙堆和山脉的形状是多种多样的.在这种情况下,仍然可以利用方程(6)来分析在垂直冲击作用下沙堆的形态演化过程.同时,也可以利用这种模型来讨论沙堆稳定性问题以及沙堆受到扰动和雪崩发生之间可能存在的联系.目前,我们正在通过计算机模拟的方法来研究这方面的问题.

5. 结 论

由颗粒物质的性质出发,得到了在均匀重力场中通过细管后的下落颗粒在速度和空间上是高斯分布的.考虑了堆积过程中颗粒束的冲击作用以及表层颗粒的滑坡现象对于颗粒堆的形态以及堆顶高度的影响,并对理想情况下的理论公式进行了修正.同时得出沙堆形态在冲击作用下的一般方程,可以用于预测沙堆的演化过程.

感谢南京大学物理系马余强教授和刘俊明教授对于本文研究工作的支持和帮助.

- [1] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 629 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 629]
- [2] Argentina M, Clerc M G, Soto R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 4
- [3] Pak H K, van Doorn E 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 23
- [4] Chen J S, Li L, Wang J Y 2004 *Nature* **432** 459
- [5] Hong D C, Quinn V, Luding S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3423
- [6] Blair D, Aranson I S, Crabtree G W *et al* 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5600
- [7] Knight J B, Jaeger H M, Nagel S R 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 3728
- [8] Hill K M, Caprihan A, Kakaliotis J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 50
- [9] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K 1988 *Phys. Rev. A* **38** 364

- [10] Bouchaud J P, Cates M E, Prakash J R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1982
- [11] Choo K, Molteno T C A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 16
- [12] Liu A J, Nagel S R 1998 *Nature* **396** 21
- [13] Shinbrot T, Muzzio F J 2001 *Nature* **410** 251
- [14] Xie X M, Jiang Y M, Wang H Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2194 (in Chinese) [谢晓明、蒋亦民、王焕友等 2003 物理学报 **52** 2194]
- [15] Xu G L, Hu G Q, Zhang X S *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 875 (in Chinese) [徐光磊、胡国琦、张训生等 2003 物理学报 **52** 875]



The distribution of a granular pile under impact^{*}

Zhang Hang[†] Guo Yun-Bo Chen Xiao Wang Duan Cheng Peng-Jun

(*Department of Physics , Nanjing University , Nanjing 210093 , China*)

(Received 7 December 2005 ; revised manuscript received 24 November 2006)

Abstract

Granular stream was created with Gaussian horizontal velocity distribution , and the granules pile up when falling on the ground. The ideal model predicts the pile should be Gaussian in shape but certain properties of granular matter can deform this ideal accumulation. After taking these factors into account , the pile surface evolution equation was acquired , and the theoretical prediction accorded with the experimental data very well. Finally , a new approach of mixing granular materials was proposed.

Keywords : granular matter , accumulation , Gauss distribution , impact

PACC : 0565 , 0590

^{*} Project supported by the National Basic Science Talents Fostering Foundation of China (Grant No. G088).

[†] E-mail : zhanghang0812@gmail.com