

原子与腔场耗散系统中的线性熵演化*

杨 雄^{1)†} 童朝阳¹⁾ 向少华²⁾

1) 湖南师范大学物理与信息科学学院,长沙 410081)

2) 怀化学院物理与信息科学系,怀化 418008)

(2006 年 7 月 9 日收到,2006 年 12 月 11 日收到修改稿)

研究了两个全同二能级原子同时与单模耗散腔场发生大失谐相互作用时,原子-场系统、两原子子系统的线性熵演化,以及原子的初始状态与腔的耗散因素对各线性熵的影响. 研究结果表明:腔场的衰变常数对不同类型的 Bell 纠缠态的影响完全不同,其中 $|\Psi_{12}\rangle$ 态具有强烈的抗消纠缠的能力,而 $|\Phi_{12}\rangle$ 态是一个脆弱的纠缠态.

关键词:腔耗散,原子纠缠,纠缠退化,线性熵

PACC: 4250, 0365

1. 引 言

业已证明,对于腔场与原子系统的纠缠程度,量子熵理论是一个非常不错的量度工具^[1-3]. 根据该理论,如果原子与腔场系统初始处于纯态,并且在系统中不存在任何耗散源的情况下,光场(原子)熵的演化行为反映了光场与原子关联程度的演化特性. 熵越高,关联越强,纠缠程度就越高. 另一方面,Zurek 等^[4]研究表明,线性熵也能很好地用来检验量子态的纯度. 因此,对量子线性熵的讨论有利于各量子态的纯度分析,也对制备何种量子纠缠态在实验上的可行性提出了理论指导.

本文基于腔场存在光子泄漏的情况下,研究了两个全同二能级原子同时注入到非共振相干态腔场中整个系统和原子子系统的线性熵演化行为. 讨论了腔场的衰减常数、光场的平均光子数对系统线性熵和两原子线性熵的影响. 我们发现,尤其当原子初始处于 Bell 型纠缠态时,腔的衰变常数对两种类型的 Bell 型纠缠态的影响完全不同,其中一种的线性熵不会随着腔场衰减常数的变化而变化,表现出强烈的抗消纠缠能力.

2. 线性熵理论

考虑两个全同的二能级原子与单模光场相互作用

用,旋波近似下,且不考虑两原子间的偶极-偶极相互作用,在大失谐条件(即光场与原子失谐量 Δ 比光场与原子耦合常数 g 大得多)时,系统的有效哈密顿量为^[5] ($\hbar = 1$)

$$H_{\text{eff}} = \eta a^\dagger a \hat{S}^z, \quad (1)$$

式中 $\eta = 2g^2/\Delta$, a^\dagger (a) 为光场的产生(湮没)算符, \hat{S}^z 为群集原子的赝自旋算符,

$$\hat{S}^z = \sum_{i=1}^2 \hat{S}_i^z,$$

其中 \hat{S}_i^z 为第 i 个原子的赝自旋算符. 当考虑腔的耗散时,系统的密度算符满足^[6]

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -[\hat{H}_{\text{eff}}, \hat{\rho}] + \hat{L} \hat{\rho}. \quad (2)$$

这里 $\hat{L} \hat{\rho}$ 表示腔的衰减(热库失去光子),在绝对零度下可写为

$$\hat{L} \hat{\rho} = \kappa (2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (3)$$

式中参数 κ 为腔的衰减常数.

为解方程(3),将密度算符用原子基矢 $\{|ee\rangle_{12}, |eg\rangle_{12}, |ge\rangle_{12}, |gg\rangle_{12}\}$ 表达为矩阵形式

$$\dot{\chi}(t) = \kappa l |\chi(t)\rangle_{mn}. \quad (4)$$

这里 $(k, l, m, n) \subset (e, g)$, 且 k, m 属于原子 1; l, n 属于原子 2. (4) 式的密度矩阵元为

$$\frac{d}{dt} \rho_{ee,ee}(t) = i\eta [\rho_{ee,ee}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}]$$

* 湖南省自然科学基金(批准号 05JJ30012)资助的课题.

† E-mail: hhyxnm01@yahoo.com.cn

$$+ \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ee,ee}(t)\hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{ee,ee}(t) - \hat{\rho}_{ee,ee}(t)\hat{a}^+ \hat{a}], \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ee,ee}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ee,ee}^+(t) \\ &= -i\eta\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ee,ee}(t) + \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ee,ee}(t)\hat{a} \\ &\quad - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{ee,ee}(t) - \hat{\rho}_{ee,ee}(t)\hat{a}^+ \hat{a}] \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ee,ge}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ee,ge}^+(t) \\ &= -i\eta\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ee,ge}(t) + \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ee,ge}(t)\hat{a} \\ &\quad - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{ee,ge}(t) - \hat{\rho}_{ee,ge}(t)\hat{a}^+ \hat{a}] \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ee,gg}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ee,gg}^+(t) \\ &= -i\eta\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ee,gg}(t) + \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ee,gg}(t)\hat{a} \\ &\quad - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{ee,gg}(t) - \hat{\rho}_{ee,gg}(t)\hat{a}^+ \hat{a}], \end{aligned} \quad (5d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{eg,ee}(t) &= \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{eg,ee}(t)\hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{eg,ee}(t) \\ &\quad - \hat{\rho}_{eg,ee}(t)\hat{a}^+ \hat{a}], \end{aligned} \quad (5e)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{eg,ge}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{eg,ge}^+(t) \\ &= \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{eg,ge}(t)\hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{eg,ge}(t) \\ &\quad - \hat{\rho}_{eg,ge}(t)\hat{a}^+ \hat{a}], \end{aligned} \quad (5f)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{eg,gg}(t) = \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{eg,gg}^+(t)$$

$$= -i\eta\hat{a}^+ \hat{\rho}_{eg,gg}(t) + \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{eg,gg}(t)\hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{eg,gg}(t) - \hat{\rho}_{eg,gg}(t)\hat{a}^+ \hat{a}], \quad (5g)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ge,ee}(t) &= \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ge,ee}(t)\hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{ge,ee}(t) \\ &\quad - \hat{\rho}_{ge,ee}(t)\hat{a}^+ \hat{a}], \end{aligned} \quad (5h)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ge,gg}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ge,gg}^+(t) \\ &= -i\eta\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ge,gg}(t) + \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{ge,gg}(t)\hat{a} \\ &\quad - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{ge,gg}(t) - \hat{\rho}_{ge,gg}(t)\hat{a}^+ \hat{a}] \end{aligned} \quad (5i)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{gg,ee}(t) &= -i\eta[\hat{a}^+ \hat{a} \hat{\rho}_{gg,ee}(t)] \\ &\quad + \kappa [2\hat{a}^+ \hat{\rho}_{gg,ee}(t)\hat{a} \\ &\quad - \hat{a}^+ \hat{a}\hat{\rho}_{gg,ee}(t) \\ &\quad - \hat{\rho}_{gg,ee}(t)\hat{a}^+ \hat{a}]. \end{aligned} \quad (5j)$$

假设初始时刻($t=0$),两原子-光场系统处于以下态:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |g_1\rangle) \otimes (|e_2\rangle + |g_2\rangle) \otimes |\alpha_f\rangle, \quad (6)$$

即初始时刻系统密度矩阵元在原子基矢下为

$$\hat{\rho}_{kl,mn}(0) = \frac{1}{2} |\alpha_f\rangle \langle \alpha_f|,$$

利用超算符方法便可解得原子-光场系统 t 时刻的密度矩阵

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{-i\eta t} & \alpha(t)\langle \alpha(t)| e^{-i\eta t} & A_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{-i\eta t} & \alpha(t)\langle \alpha(t)| & A_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{-i\eta t} & \alpha(t)\langle \alpha(t)| & A_2 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{-i\eta t} & \alpha(t)\langle \alpha(t)| \\ B_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{-i\eta t} & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| & A_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & A_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} \\ B_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{-i\eta t} & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| & A_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & A_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} \\ B_2 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & \alpha(t)\langle \alpha(t)| e^{-i\eta t} & B_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & \alpha(t)\langle \alpha(t)| & B_1 |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & \alpha(t)\langle \alpha(t)| & |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{i\eta t} & \alpha(t)\langle \alpha(t)| e^{i\eta t} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha e^{-kt}, \\ A_m &= e^{-\Gamma_m(t) + i\Theta_m(t)}, \\ B_m &= A_m^* \quad (m = 1, 2). \end{aligned}$$

这里

$$\Gamma_1(t) = |\alpha|^2 \left\{ 1 - e^{-2\kappa t} + \frac{2\kappa e^{-2\kappa t} [2\kappa \cos(\eta t) - \eta \sin(\eta t)] - 4\kappa^2}{4\kappa^2 + \eta^2} \right\}, \quad (8a)$$

$$\Gamma_2(t) = |\alpha|^2 \left\{ 1 - e^{-2\kappa t} + \frac{\kappa e^{-2\kappa t} [\kappa \cos(2\eta t) - \eta \sin(2\eta t)] - \kappa^2}{4\kappa^2 + \eta^2} \right\}, \quad (8b)$$

$$\Theta_1(t) = |\alpha|^2 \left\{ \frac{2\kappa [e^{-2\kappa t} (2\kappa \sin(\eta t) + \eta \cos(\eta t)) - \eta]}{\kappa^2 + \eta^2} \right\}, \quad (8c)$$

$$\Theta_2(t) = |\alpha|^2 \left\{ \frac{\kappa [e^{-2\kappa t} (\kappa \sin(2\eta t) + \eta \cos(2\eta t)) - \eta]}{\kappa^2 + \eta^2} \right\}. \quad (8d)$$

利用(7)式可得原子的约化密度矩阵

$$\hat{\rho}_a(t) = \text{tr}[\hat{\rho}(t)] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & Q_1(t) & Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_1^*(t) & 1 & 1 & Q_1(t) \\ Q_1^*(t) & 1 & 1 & Q_1(t) \\ Q_2^*(t) & Q_1^*(t) & Q_1^*(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \exp\{-[\Gamma_n(t) + G_n(t)] \\ &\quad + [\Theta_n(t) - H_n(t)]\}, \\ G_n(t) &= |\alpha|^2 e^{-2\kappa t} [1 - \cos(n\eta t)], \\ H_n(t) &= |\alpha|^2 e^{-2\kappa t} \sin(n\eta t) \quad (n = 1, 2). \end{aligned}$$

Zurek 等^[4]研究表明,系统在环境影响下,从初始纯态演化到混态,可用线性熵来测量量子态的纯度. Peixoto de Faria 和 Nemes^[7]应用线性熵清楚地说明了二能级原子与单模腔场系统纯度演化的规律.

下面我们也将利用线性熵这一物理量来讨论系统和原子的纯度演化行为.

利用(7)式可求得两原子-光场系统的线性熵

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - \text{tr}[\rho^2(t)] \\ &= \frac{5}{8} - \frac{A_1^2}{2} - \frac{A_2^2}{8}. \end{aligned} \quad (10)$$

利用(9)式可得两原子的线性熵

$$\begin{aligned} S_a(t) &= 1 - \text{tr}[\rho_a^2(t)] \\ &= \frac{5}{8} - \frac{Q_1^2}{2} - \frac{Q_2^2}{8}. \end{aligned} \quad (11)$$

3. 数值分析及讨论

(10)式给出了两原子-光场系统的线性熵随时间的演化. 正如图1所示,系统的线性熵随时间的增加而增大,初始时刻其值为零,由于腔耗散的缘故,经一段时间后趋于一大于零的稳定值. 这说明系统由初始纯态演化到混态,原子与光场由纠缠变为消纠缠,消纠缠时间随着腔的衰变常数的增加而迅速缩短.(11)式则说明原子子系统线性熵与腔的衰减常数 κ 、光场的平均光子数的关系. 从图1可以看出,当腔无耗散时,原子的线性熵随时间作周期性变化,说明两原子在纯态与混态间演化;当腔存在耗散时,由于能量损失的缘故,原子线性熵随时间的演

化呈现出振荡幅度逐渐减小的趋势,并不再回到零. 这表明原子只在初始时刻对应着纯态,其他任何时刻均呈现混态,且随着耗散的增大,振荡减弱,当耗散达一定程度时,两原子线性熵将趋于一稳定值,此时两原子完全达到混态. 光场的平均光子数越多,原子达到混态的速度就越快.

4. 两原子 Bell 态的线性熵

根据文献[8]的研究结果,将两个全同的二能级原子同时投入单模光场中能缩短制备两原子纠缠态的时间. 这意味着,若系统初态处于(6)式的态,经一定时间后,可制备出如下的两原子 Bell 型纠缠态:

$$|\Psi_{12}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg_{12} \pm |ge_{12}\rangle), \quad (12)$$

$$|\Phi_{12}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ee_{12} \pm |gg_{12}\rangle). \quad (13)$$

但这是一种理想的情况. 在实际的量子信息处理中,存在着各种耗散源,这些耗散源将诱发量子系统的量子相干特性发生退相干. 下面我们用线性熵来考察腔场模的光子泄漏对两原子纠缠态(12)(13)式的影响.

当原子处于(12)(13)式的初态,利用(5)(7)式可求得两种类型纠缠态的线性熵为

$$\begin{aligned} S_a^{\Psi}(t) &= 1 - \text{tr}[\rho_a^2(t)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S_a^{\Phi}(t) &= 1 - \text{tr}[\rho_a^2(t)] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{Q_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

比较(14)(15)式,我们惊奇地发现,两原子纠缠态的线性熵变化是完全不同的. $|\Psi_{12}$ 态的线性熵不随时间发生变化,如果初始为纠缠态,将始终保持这种纠缠,腔的耗散、光场密度对纠缠无影响. 这

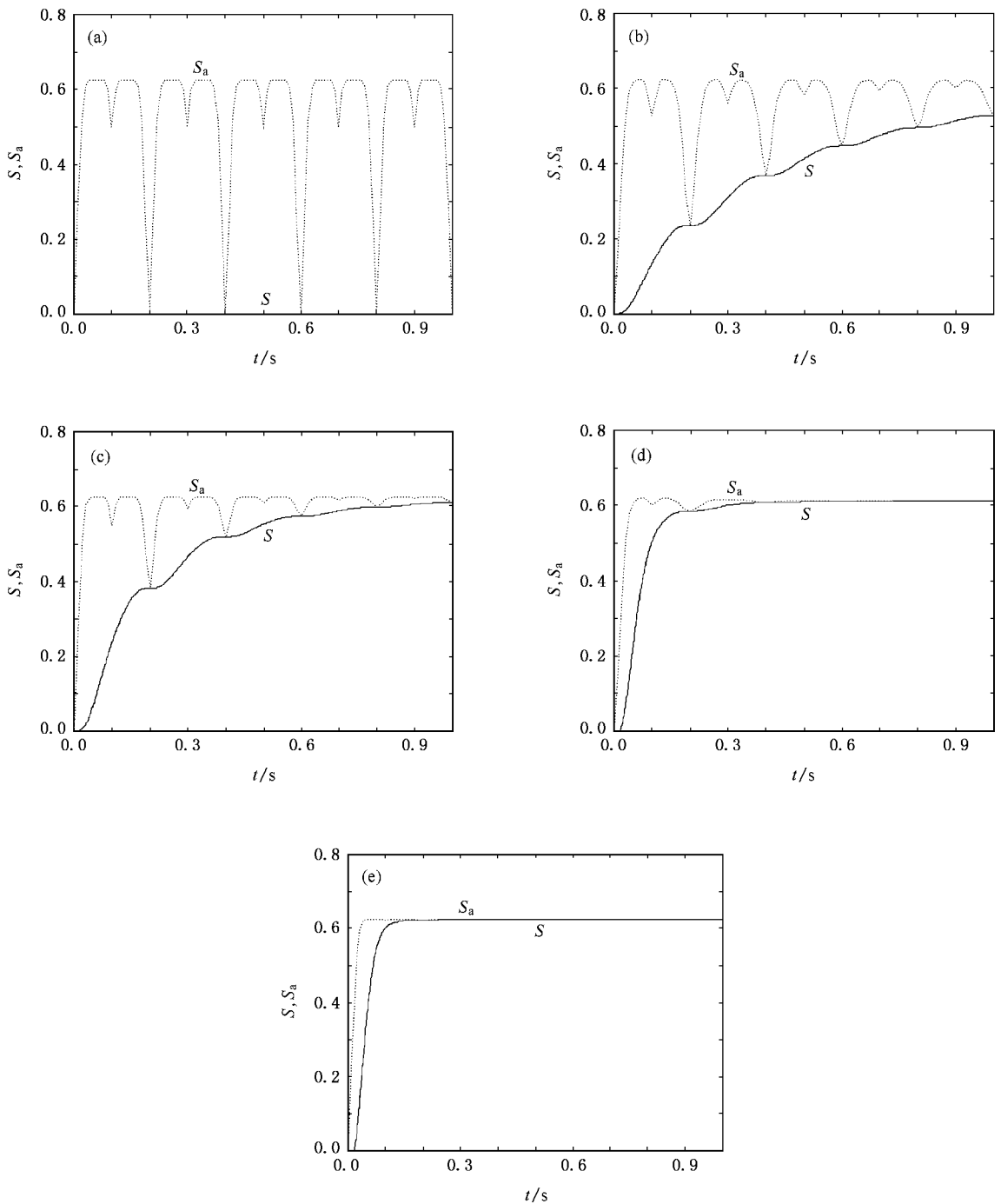


图1 线性熵 S 和 S_a 的时间演化曲线 (a) $\kappa=0, |\alpha|^2=2$ (b) $\kappa=0.01\eta, |\alpha|^2=1$; (c) $\kappa=0.01\eta, |\alpha|^2=2$; (d) $\kappa=0.1\eta, |\alpha|^2=1$; (e) $\kappa=0.1\eta, |\alpha|^2=2$

说明人们可以在耗散的腔里制备最大纠缠态 $|\Psi_{12}\rangle$, 制备这种纠缠态时可以降低对腔场品质因子的要求, 这对于纠缠态的制备具有很重要的现实意义. 而 $|\Phi_{12}\rangle$ 态的线性熵却呈现不同的演化规律 (图2): 当腔无耗散时, $|\Phi_{12}\rangle$ 态的线性熵作周期性变化, 表明两原子的纠缠总是在最大纠缠与消纠缠

之间作周期性演化; 当腔存在耗散时, 两原子的线性熵作振幅衰减的振荡. 两原子只在演化之初是纠缠的, 随着时间增加, 两原子纠缠逐渐退化直至完全消失. 光子数越多, 退纠缠过程越快. 可见 $|\Phi_{12}\rangle$ 态是一个脆弱的纠缠态, 在极短的时间里演化为一个没有任何实用价值的经典混态. 这也说明要用腔场

QED(quantum electrodynamics)技术成功地制备出

$|\Phi_{12}\rangle$ 态, 必须选用高品质因数的超导腔.

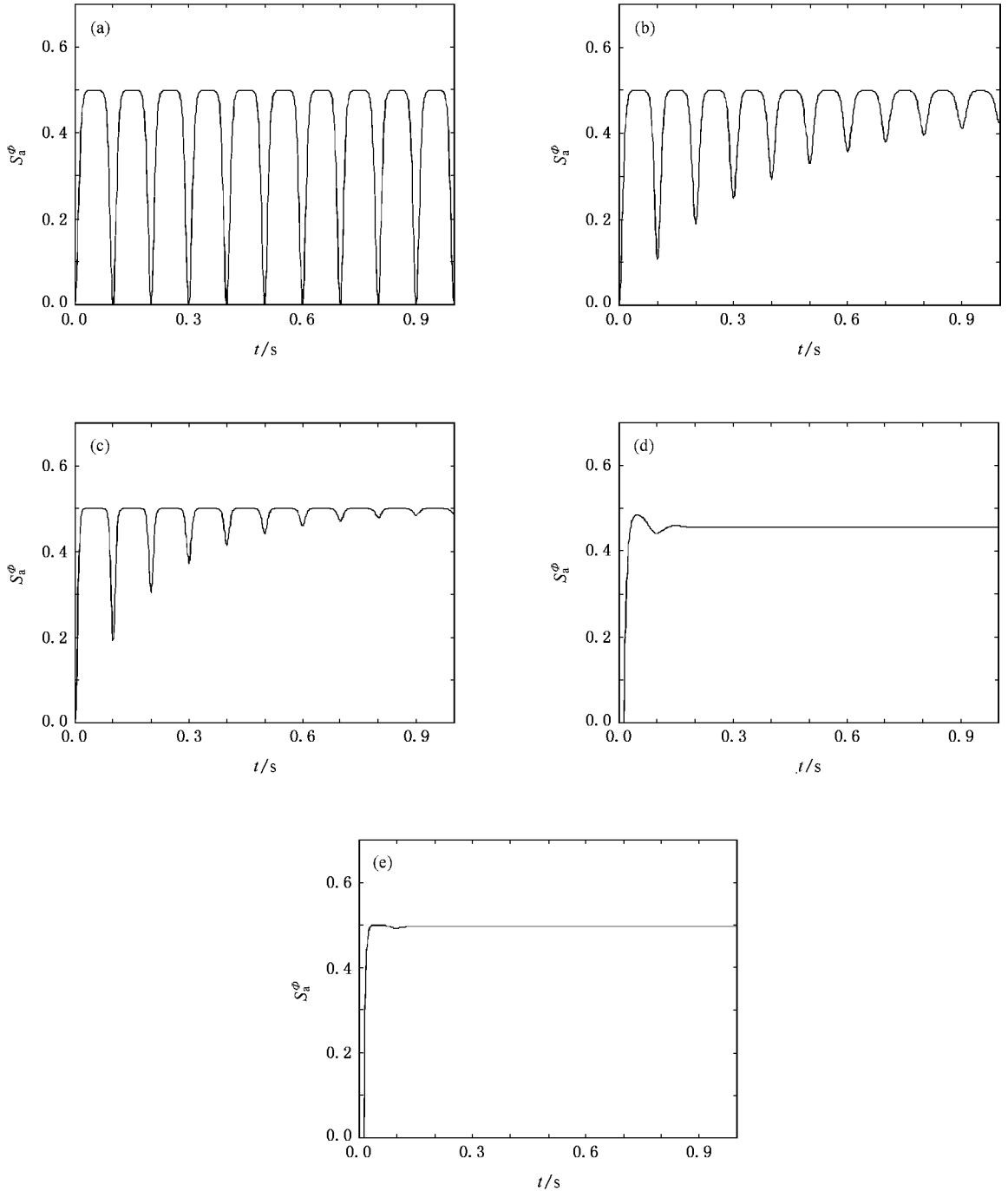


图2 S_a^ϕ 的时间演化曲线 (a) $\kappa=0$; (b) $\kappa=0.01\eta$, $|\alpha|^2=1$; (c) $\kappa=0.01\eta$, $|\alpha|^2=2$; (d) $\kappa=0.4\eta$, $|\alpha|^2=1$; (e) $\kappa=0.4\eta$, $|\alpha|^2=2$

5. 结 论

本文利用线性熵理论研究了两个全同二能级原子同时与单模耗散腔场发生大失谐相互作用时的动力学行为. 当两原子初始制备在叠加态时, 原子-光

场系统的线性熵随时间增加而增大直到趋于一稳定值, 达稳定值所需的时间随腔衰变常数的增加而迅速缩短, 原子与光场只在初始时刻处于纠缠纯态, 其他时刻均呈现混合态, 而原子子系统的线性熵在无耗散下随时间作周期性变化, 两原子在纯态与混态之间演化. 存在耗散时, 原子子系统的线性熵呈现出

振荡幅度逐渐减小的趋势,也将达一稳定值.这个过程随耗散的增加而缩短.两原子除初始时刻为纯态外,其余时刻均是混态.当两原子初始为 Bell 型的纠缠态时, $|\Psi_{12}\rangle$ 态的线性熵不随时间发生变化,初始为纠缠的两原子在腔中将保持这种纠缠.腔的耗散、光场的密度对其无影响.而 $|\Phi_{12}\rangle$ 态的线性熵却随

时间发生变化.当腔无耗散时, $|\Phi_{12}\rangle$ 态的线性熵作周期性变化.表明两原子的纠缠总是在最大纠缠与消纠缠之间作周期性演化;当腔存在耗散时,两原子的线性熵作振幅衰减的振荡,两原子只在演化之初是纠缠的.随着时间增加两原子纠缠逐渐退化直至完全消失.光子数越多,退纠缠过程越快.

- [1] Phoenix S J D , Knight P L 1997 *J. Opt. Soc. Am.* B **7** 116
 [2] Liu X J , Zhou B J , Fang M F *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 704
 (in Chinese) [刘小娟、周并举、方卯发等 2006 物理学报 **55** 704]
 [3] Cai X , Huang G M , Li G X 2005 *Chin. Phys.* **14** 223
 [4] Zurek W H , Habib S , Paz J P 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1187
 [5] Gerry C C , Grobe R 1998 *Phys. Rev. A* **57** 2247
 [6] Xiang S H , Song K H 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 768
 [7] Peixoto de Faria J G , Nemes M C 1999 *Phys. Rev. A* **59** 3918
 [8] Zheng S B , Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392

Linear entropy evolution in a dissipative system of two atoms and cavity field^{*}

Yang Xiong^{1)†} Tong Zhao-Yang¹⁾ Xiang Shao-Hua²⁾

¹⁾ College of Physics and Information Science , Hunan Normal University , Changsha 410081 , China)

²⁾ Department of Physics and Information Science , Huaihua University , Huaihua 418008 , China)

(Received 9 July 2006 ; revised manuscript received 11 December 2006)

Abstract

Some investigations have been made on the evolution of the linear entropies of atom-field system, in which two identical two-level atoms simultaneously interact with a single-mode dissipative cavity field under large detuning. The effects of the initial atom states and the dissipative factors of the cavity on all linear entropies are also discussed. The results show that the influence of the cavity decay constant on different kinds of Bell states is completely different, and the state $|\Psi_{12}\rangle$ is a robust entangled state against the decoherence while the state $|\Phi_{12}\rangle$ is a fragile entangled state.

Keywords : cavity decay , atomic entanglement , decoherence , linear entropy

PACC : 4250 , 0365

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province , China (Grant No. 05JJ30012).

[†] E-mail : hhyxmm01@ yahoo. com. cn