

增光子奇偶相干态的 Wigner 函数^{*}

孟祥国 王继锁[†] 梁宝龙

(聊城大学物理系, 聊城 252059)

(2006 年 8 月 9 日收到 2006 年 9 月 21 日收到修改稿)

利用相干态表象下的 Wigner 算符, 重构了增光子奇偶相干态的 Wigner 函数. 根据此 Wigner 函数在相空间中随复变量 α 的变化关系, 讨论了增光子奇偶相干态的非经典性质. 结果表明, 增光子奇偶相干态总可呈现非经典性质, 且在 m 取奇(或偶)数时, 增光子偶(或奇)相干态更容易出现非经典性质. 根据增光子奇偶相干态的 Wigner 函数的边缘分布, 阐明了此 Wigner 函数的物理意义. 同时, 利用中介表象理论获得了增光子奇偶相干态的量子 tomogram 函数.

关键词: 增光子奇偶相干态, Wigner 函数, 中介表象, tomogram 函数

PACC: 4250, 0530

1. 引 言

在量子统计物理中, 量子态的 Wigner 函数是一个极其重要的准概率分布函数, 它包含了该量子态在整个相空间演化过程中的全部信息, 因此量子态的演化可以用它的 Wigner 函数来描述. 但由于量子态的 Wigner 函数一般不能被直接测量, 因此人们希望通过一些可观测量来重构各种量子态的 Wigner 函数, 并通过这些可观测量来实现对它们的有效测量. 故此, 量子态 Wigner 函数的重构和测量对研究量子体系的演化过程有着重要的意义. 目前, 不论在理论上还是在实验上, 人们已提出了多种重构和测量量子态 Wigner 函数的方法^[1-11]. 在理论上, 对行波场, 典型的重构方案有光学零拍层析法^[1, 2]和光子计数法^[3]. 对腔场, 典型的重构方案有原子偏转技术^[4, 5]和微脉腔方案^[6-8]. 在实验上, Smithey 等^[9]利用光学零拍层析法重构电磁场的真空态和压缩态的 Wigner 函数. Banaszek 等^[10]利用光子计数法测量了真空态和相干态的 Wigner 函数. 对于腔场, Nogues 等^[11]利用原子偏转技术测量了单光子 Fock 态的 Wigner 函数. 这些重构和测量量子态 Wigner 函数方案的提出极大地激发了物理学工作者的研究兴趣.

由于在谐振腔中处于 Schrödinger 态的电磁场与两能级原子的相互作用能够产生增光子奇偶相干

态, 因此重构它的 Wigner 函数具有很高的实验价值. 在实验上, 利用此 Wigner 函数有助于找到一些可观测量实现对增光子奇偶相干态的测量, 从而获得此量子态在演化过程中的信息. 本文利用相干态表象下的 Wigner 算符, 重构了增光子奇偶相干态的 Wigner 函数. 根据此 Wigner 函数在相空间中随复变量 α 的变化关系, 讨论了增光子奇偶相干态的非经典性质. 然后, 根据增光子奇偶相干态的 Wigner 函数的边缘分布, 阐明了此 Wigner 函数的物理意义. 最后, 利用中介表象理论, 获得了增光子奇偶相干态的量子 tomogram 函数.

在文献 [12, 13] 中, 增光子奇偶相干态被定义为玻色湮没算符 a 的逆算符 a^{-1} 连续 m 次作用到奇偶相干态 $|\alpha\rangle_{o,e}$ 上所得到的新量子态. 在粒子数表象中, 其归一化表达式为

$$\begin{aligned} |\beta\rangle_{r-m,o} &= C_{e,r-m} (a^{-1})^m |\beta\rangle_o \\ &= \frac{C_{e,r-m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{\sqrt{(2n+m)!}} |2n+m\rangle, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\beta\rangle_{r-m,e} &= C_{o,r-m} (a^{-1})^m |\beta\rangle_e \\ &= \frac{C_{o,r-m}}{\beta^m \sqrt{\sinh|\beta|^2}} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1+m}}{\sqrt{(2n+1+m)!}} |2n+1+m\rangle, \quad (2) \end{aligned}$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 310574060)和山东省自然科学基金(批准号: Y2004A09)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: jswang@lcu.edu.cn

式中 β 为复参数, $C_{o,-m}$ 和 $C_{e,-m}$ 分别为量子态 $|\beta, -m_o\rangle$ 和 $|\beta, -m_e\rangle$ 的归一化系数,

$$C_{e,-m}^2 = |\beta|^{2m} \cosh |\beta|^2 / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta|^{2(2n+m)}}{(2n+m)!}, \quad (3)$$

$$C_{o,-m}^2 = |\beta|^{2m} \sinh |\beta|^2 / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta|^{2(2n+1+m)}}{(2n+1+m)!}. \quad (4)$$

利用关系式^[12]

$$a^m (a^{-1})^n = [(a^+)^{-1}]^n a^{m+n} = I,$$

$$(a^{-1})^n a^m = a^{m+n} [(a^+)^{-1}]^n = I - \sum_{i=1}^{m-1} |i\rangle \langle i|, \quad (5)$$

容易证明, 量子态 $|\beta, -m_o\rangle$ 是算符 $(a^{-1})^n a^{m+2}$ 的本征值为 β^2 的本征态, 即

$$(a^{-1})^n a^{m+2} |\beta, -m_o\rangle = \beta^2 |\beta, -m_o\rangle. \quad (6)$$

因此, 把 (1)(2) 式所表示的量子态 $|\beta, -m_o\rangle$ 称为增光子奇偶相干态.

2. 增光子奇偶相干态的 Wigner 函数

在相干态表象下, Wigner 算符 $\Delta(\alpha, \alpha^*)$ 表示为^[14]

$$\Delta(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{d^2 z}{\pi^2} |\alpha + z\rangle \langle \alpha - z| \exp(\alpha z^* - \alpha^* z), \quad (7)$$

式中 α 为复参数. 利用正规乘积内算符的积分技术^[14], 可将 Wigner 算符 $\Delta(\alpha, \alpha^*)$ 简化为

$$\Delta(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} D(2\alpha) \chi(-), \quad (8)$$

式中 $N = a^+ a$, $D(2\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$ 为平移算符.

对于纯态 $|\varphi\rangle$, 可表示为粒子数态的叠加态, 即

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} f_i |i\rangle. \quad (9)$$

其 Wigner 函数为

$$\begin{aligned} W(\alpha, \alpha^*) &= \langle \varphi | \Delta(\alpha, \alpha^*) | \varphi \rangle \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{j,i=0}^{\infty} f_j^* f_i (-1)^j \chi_{ji}(2\alpha), \quad (10) \end{aligned}$$

式中

$$\chi_{ji}(\alpha) = \begin{cases} j! D(\alpha) |i\rangle \langle j| \\ = \begin{cases} \sqrt{\frac{j!}{i!}} \alpha^{j-i} L_i^{j-i}(|\alpha|^2) \exp(-|\alpha|^2/2) & (j \geq i), \\ \sqrt{\frac{i!}{j!}} (-\alpha^*)^{-j} L_j^{i-j}(|\alpha|^2) \exp(-|\alpha|^2/2) & (j < i) \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

这里 $L_n^\rho(x)$ 是推广的拉盖尔多项式^[15],

$$L_n^\rho(x) = \sum_{l=0}^n \binom{n+\rho}{n-l} \frac{(-x)^l}{l!}. \quad (12)$$

由 (1)(8)–(11) 式, 经过计算知, 可将增光子偶相干态的 Wigner 函数 $W_{e,-m}(\alpha, \alpha^*)$ 写成为非干涉项 $W_{e,-m}^M(\alpha, \alpha^*)$ 和干涉项 $W_{e,-m}^I(\alpha, \alpha^*)$ 之和的形式, 即

$$W_{e,-m}(\alpha, \alpha^*) = W_{e,-m}^M(\alpha, \alpha^*) + W_{e,-m}^I(\alpha, \alpha^*), \quad (13)$$

其中非干涉项和干涉项分别为

$$\begin{aligned} W_{e,-m}^M(\alpha, \alpha^*) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} C_{e,-m}^2 |\beta|^{4n}}{\cosh |\beta|^2 (2n+m)!} \\ &\times L_{2n+m}^{(0)}(4|\alpha|^2) \exp(-2|\alpha|^2), \quad (14) \\ W_{e,-m}^I(\alpha, \alpha^*) &= \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n,k \\ n \neq k}} \frac{(-1)^{k+m} C_{e,-m}^2 \beta^{2n} \beta^{*2k}}{\cosh |\beta|^2} \\ &\times \exp(-2|\alpha|^2) \left[\frac{(2\alpha)^{\chi^{k-n}}}{(2k+m)!} L_{2n+m}^{\chi^{k-n}}(4|\alpha|^2) \right. \\ &\left. + \frac{(-2\alpha^*)^{\chi^{n-k}}}{(2n+m)!} L_{2k+m}^{\chi^{n-k}}(4|\alpha|^2) \right], \quad (15) \end{aligned}$$

式中 $C_{e,-m}$ 由 (3) 式给出. 同样, 由 (2)(8)–(11) 式, 我们也能获得增光子奇相干态的 Wigner 函数 $W_{o,-m}(\alpha, \alpha^*)$. 此 Wigner 函数的非干涉项和干涉项分别为

$$\begin{aligned} W_{o,-m}^M(\alpha, \alpha^*) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1+m} C_{o,-m}^2 |\beta|^{4n+2}}{\sinh |\beta|^2 (2n+1+m)!} \\ &\times L_{2n+1+m}^{(0)}(4|\alpha|^2) \exp(-2|\alpha|^2), \quad (16) \\ W_{o,-m}^I(\alpha, \alpha^*) &= \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n,k \\ n \neq k}} \frac{(-1)^{k+1+m} C_{o,-m}^2 \beta^{2n+1} \beta^{*2k+1}}{\sinh |\beta|^2} \\ &\times \exp(-2|\alpha|^2) \left[\frac{(2\alpha)^{\chi^{k-n}}}{(2k+1+m)!} L_{2n+1+m}^{\chi^{k-n}}(4|\alpha|^2) \right. \\ &\left. + \frac{(-2\alpha^*)^{\chi^{n-k}}}{(2n+1+m)!} L_{2k+1+m}^{\chi^{n-k}}(4|\alpha|^2) \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

根据 (14)–(17) 式, 当 m 和 β 分别取不同值时, 图 1—图 4 分别给出了增光子偶相干态的 Wigner 函数随复变量 α 的变化关系.

当 $m=0$ 且 $\beta=0$ 时, 增光子偶相干态的 Wigner 函数与真空态的波包类似 (图 1(a)). 在相空间中, Wigner 函数的值处处为正. 当 $m=0$ 且 $\beta \neq 0$ 时, 增

光子偶相干态的 Wigner 函数与偶相干态的波包类似(图 1(b)),在相空间中会出现负值区域. 在相空间

中,若量子态的 Wigner 函数出现负值区域,意味着量子态是非经典态. 因此,偶相干态是非经典态.

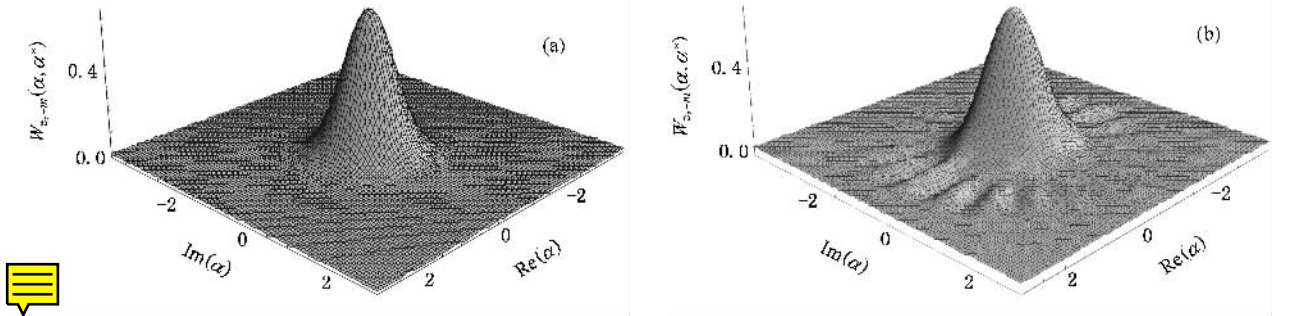


图 1 当 $m = 0, \beta = 0, 0.3$ 时增光子偶相干态的 Wigner 函数 (a) $\beta = 0, (b)\beta = 0.3$

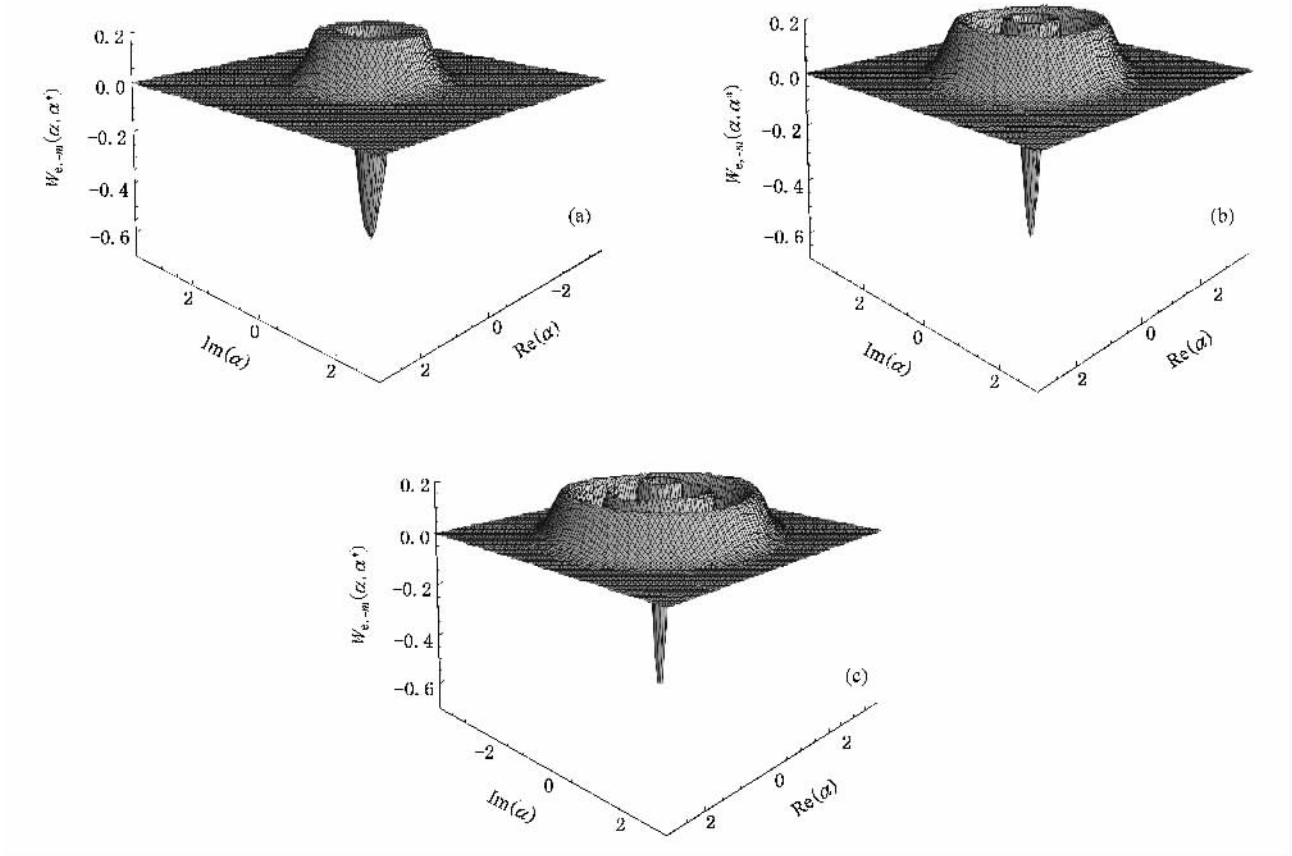


图 2 当 $\beta = 0.1, m = 1, 3, 5$ 时增光子偶相干态的 Wigner 函数 (a) $m = 1 (b)m = 3 (c)m = 5$

从图 2 和图 3 可以看出,当 m 为奇数时,增光子偶相干态的 Wigner 函数具有向下的主峰;而当 m 为偶数时,其 Wigner 函数具有向上的主峰. 此规律说明被激发偶数次的偶相干态与被激发奇数次的偶相干态是互相正交的. 例如,当分别取 $m = 1$ 和 $m = 2$ 时,两个取向相反的主峰的峰宽和峰高相同,如图 2(a)和图 3(a)所示. 在相空间中,若把这两个 Wigner 函数分布进行叠加,其和必为零. 此时对应

的两个增光子偶相干态是正交的. 这个规律对 m 取任意值都成立. 实际上,增光子奇偶相干态的正交性也可以从(1)(2)式直接得到. 当 m 取不同值时,除都存在一个主峰外,还有峰值较小的波峰. 随着远离主峰,这些波峰的峰值逐渐减小. 随着 m 取值的变化,增光子奇偶相干态的 Wigner 函数分布始终呈现多峰结构. 当 m 取较小值时,波峰的个数较少;随着 m 取值逐渐增大,波峰的个数逐渐增

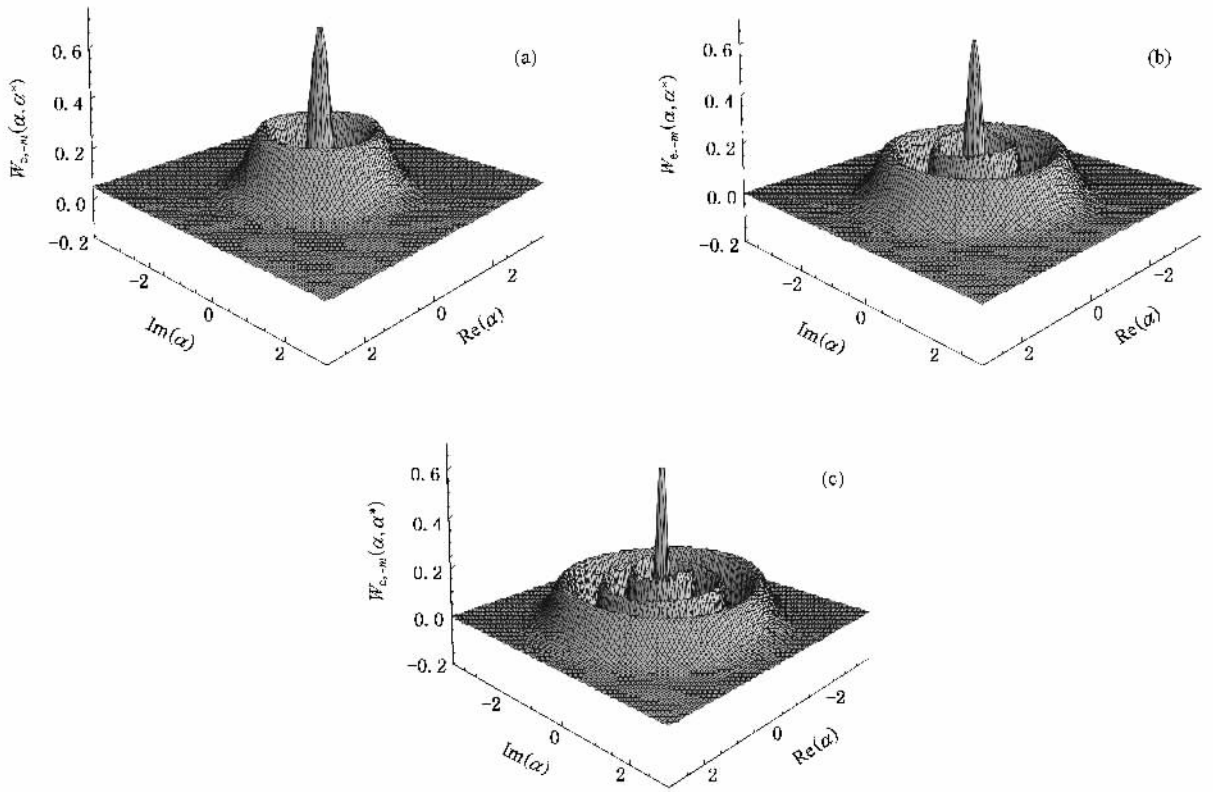


图3 当 $\beta=0.1, m=2, 4, 6$ 时增光子偶相干态的 Wigner 函数 (a) $m=2$ (b) $m=4$ (c) $m=6$

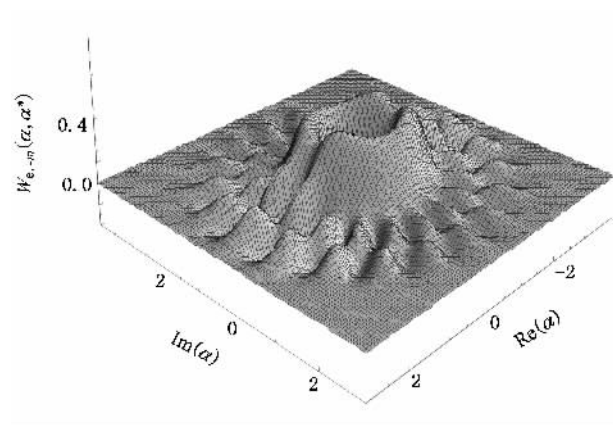


图4 当 $m=1, \beta=0.3$ 时增光子偶相干态的 Wigner 函数

加,即波峰的数目与 m 有关.由此可见, m 取值越大,偶相干态的量子干涉效应越显著.这个结论也可从(14) (15)式得到.由于在增光子偶相干态 $W_{e,-m}(\alpha, \alpha^*)$ 中,其干涉项 $W_{e,-m}^I(\alpha, \alpha^*)$ 占主要地位.当 m 取值增大时,对干涉项 $W_{e,-m}^I(\alpha, \alpha^*)$ 的影响要远远大于对非干涉项 $W_{e,-m}^M(\alpha, \alpha^*)$ 的影响.另外,当 m 为奇数时,由于偶相干态在相空间中出現更多的负值区域,因此它更容易展现出非经典性.

比较图4和图3(a)可知,当 β 取值增大时,增光子偶相干态的 Wigner 函数在相空间中发生显著变化,呈现出杂乱无章的多峰结构,即随着 β 值的增大,增光子偶相干态的量子干涉效应明显增强.这是由于增光子偶相干态的 Wigner 函数的干涉项 $W_{e,-m}^I(\alpha, \alpha^*)$ 发生较大改变造成的.

对于增光子奇相干态,当 m 为奇数时, Wigner 函数具有向上的主峰;而当 m 为偶数时, Wigner 函数具有向下的主峰.因此,对于 m 的任意值,被激发偶数次的奇相干态与被激发奇数次的奇相干态是互相正交的.并且,被激发偶数次的奇相干态比被激发奇数次的奇相干态更容易展现出非经典性.另外,我们还发现被激发偶(或奇)数次的偶相干态与被激发偶(或奇)数次的奇相干态也是互相正交的.而增光子奇相干态 Wigner 函数其他的特征变化与增光子偶相干态 Wigner 函数基本相同.

下面给出增光子奇偶相干态 Wigner 函数的边缘分布.对于给定的密度矩阵 $\rho(p, q)$,则其对应的 Wigner 函数在 q 和 p 方向的边缘分布分别为^[16]

$$P(q) = \frac{1}{2\pi} \int dp W(p, q) = \int | \rho(p, q) | q \quad (18)$$

$$P(p) = \frac{1}{2\pi} \int dq W(p, q) = |p| \langle \alpha(p, q) | p \rangle \quad (19)$$

式中 $|q\rangle$ 和 $|p\rangle$ 分别为坐标算符 Q 和动量算符 P 的本征态. 在(14)(15)式中, 若令 $\alpha = (q + ip)/\sqrt{2}$, 并利用(18)式对 $W_{e,-m}(\alpha, \alpha^*)$ 进行积分, 则得到增光子偶相干态的 Wigner 函数 $W_{e,-m}(\alpha, \alpha^*)$ 在 q 方向的边缘分布

$$P_{e,-m}(q) = \frac{1}{2\pi} \int dp W_{e,-m}(p, q) = |q| |\beta, -m_e|^2. \quad (20)$$

由于

$$\begin{aligned} |q| |\beta, -m_e|^2 &= \frac{C_{e,-m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{\sqrt{(2n+m)!}} |q|^{2n+m} \\ &= \frac{C_{e,-m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{(2n+m)!} \\ &\times \int dq' |q| |a^{+(2n+m)}| q' - q' | 0 \\ &= \frac{C_{e,-m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{(2n+m)! \sqrt{2^{2n+m}}} \\ &\times \int dq' \left(q - \frac{d}{dq} \right)^{2n+m} \delta(q - q') |q' | 0 \\ &= \frac{C_{e,-m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{(2n+m)! \sqrt{2^{2n+m}} \sqrt{\pi}} \\ &\times \left(q - \frac{d}{dq} \right)^{2n+m} \exp(-q^2/2) \\ &= \frac{C_{e,-m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{(2n+m)! \sqrt{2^{2n+m}} \sqrt{\pi}} \\ &\times H_{2n+m}(q) \exp(-q^2/2). \quad (21) \end{aligned}$$

这里我们利用了厄米多项式的表达式^[15]

$$H_n(q) = \exp(q^2/2) \left(q - \frac{d}{dq} \right)^n \exp(-q^2/2). \quad (22)$$

因此,

$$P_{e,-m}(q) = \frac{1}{2\pi} \int dp W_{e,-m}(p, q)$$

$$\begin{aligned} &= |q| |\beta, -m_e|^2 \\ &= \frac{C_{e,-m}^2 \exp(-q^2)}{\pi^{1/2} \cosh|\beta|^2} \\ &\times \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n+m)! \sqrt{2^{2n+m}}} H_{2n+m}(q) \right|^2. \quad (23a) \end{aligned}$$

利用(2)(19)式, 可得到增光子偶相干态的 Wigner 函数 $W_{e,-m}(\alpha, \alpha^*)$ 在 p 方向边缘分布

$$\begin{aligned} P_{e,-m}(p) &= \frac{1}{2\pi} \int dq W_{e,-m}(p, q) \\ &= |p| |\beta, -m_e|^2 \\ &= \frac{C_{e,-m}^2 \exp(-p^2)}{\pi^{1/2} \cosh|\beta|^2} \\ &\times \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2n+m} \beta^{2n}}{(2n+m)! \sqrt{2^{2n+m}}} H_{2n+m}(p) \right|^2. \quad (23b) \end{aligned}$$

由(23)式可见, $P_{e,-m}(q)$ 或 $P_{e,-m}(p)$ 表示具有坐标值为 q (或动量值为 p) 的粒子在增光子偶相干态 $|\beta, -m_e\rangle$ 中出现的概率.

类似地, 由(16)–(19)式也可导出增光子奇相干态的 Wigner 函数 $W_{o,-m}(\alpha, \alpha^*)$ 在 q 和 p 方向的边缘分布函数分别为

$$\begin{aligned} P_{o,-m}(q) &= \frac{1}{2\pi} \int dp W_{o,-m}(p, q) \\ &= |q| |\beta, -m_o|^2 \\ &= \frac{C_{o,-m}^2 \exp(-q^2)}{\pi^{1/2} \sinh|\beta|^2} \\ &\times \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1+m)! \sqrt{2^{2n+1+m}}} H_{2n+1+m}(q) \right|^2, \quad (24a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{o,-m}(p) &= \frac{1}{2\pi} \int dq W_{o,-m}(p, q) \\ &= |p| |\beta, -m_o|^2 \\ &= \frac{C_{o,-m}^2 \exp(-p^2)}{\pi^{1/2} \sinh|\beta|^2} \\ &\times \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2n+1+m} \beta^{2n+1}}{(2n+1+m)! \sqrt{2^{2n+1+m}}} H_{2n+1+m}(p) \right|^2. \quad (24b) \end{aligned}$$

同样, $P_{o,-m}(q)$ 或 $P_{o,-m}(p)$ 表示具有坐标值为 q (或动量值为 p) 的粒子在增光子奇相干态 $|\beta, -m_o\rangle$ 中出现的概率. 因此, 增光子奇偶相干态的 Wigner 函数的物理意义就在于它的边缘分布能够给出在增光子奇偶相干态 $|\beta, -m_{e,o}\rangle$ 中找到具有确定坐标(或动量)的粒子的概率.

3. 增光子奇偶相干态的 tomogram 函数

在量子力学的框架内,体系的状态可由 Hilbert 空间中的态矢量及其在相空间的各种概率分布函数来描述,但是它们一般不能被直接测量.而 tomography 技术则是利用可被直接测量的正定的概率分布函数(tomogram 函数)来实现对量子态进行直接测量的一种方法.正是由于 tomogram 函数能够被直接测量且可以重构量子态的密度算符,因此在量子光学和量子统计中经常被用来描述量子体系状态及其演化行为.在实验上,只要能够在可观测量所在表象下测得波函数的模方,就能够获得该量子态的 tomogram 函数,从而实现对该量子态的有效测量.

对于给定的密度矩阵 $\rho(p, q)$, 其对应的 Wigner 函数为^[17]

$$W(p, q) = \int d\mu \rho\left(q + \frac{\mu}{2}, q - \frac{\mu}{2}\right) \exp\left(-i \frac{p\mu}{\hbar}\right), \quad (25)$$

则其 Radon 变换为

$$\mathcal{T}(Q, \mu, \nu) = \int \frac{dp dq}{2\pi\hbar} W(p, q) \delta(Q - \mu q - \nu p), \quad (26)$$

式中 Q 为坐标算符, μ 和 ν 为实数. 此即为 $\rho(p, q)$ 的量子 tomogram 函数.

对于由(1)式所给出的增光子偶相干态 $|\beta, -m\rangle_e$ 而言, 其量子 tomogram 函数被定义为

$$\mathcal{T}(q, f, g) = \iint \frac{dp' dq'}{\hbar} \delta(q - fq' - gp') W(p', q'), \quad (27)$$

式中 f 和 g 为实数. 若把(14)(15)式代入(27)式直接进行积分是非常困难的. 但是, 我们可利用下面 Wigner 算符 $\Delta(p, q)$ 和投影算符 $|q, f, g\rangle\langle q, f, g|$ 之间满足的 Radon 变换^[18],

$$\begin{aligned} & |q, f, g\rangle\langle q, f, g| \\ &= \iint \frac{dp' dq'}{2\pi\hbar} \delta(q - fq' - gp') \Delta(p', q'), \quad (28) \end{aligned}$$

式中态 $|q, f, g\rangle$ 是 $(fQ + gP)$ 的本征态. 在 Fock 表象下, 态 $|q, f, g\rangle$ 可表示为

$$\begin{aligned} |q, f, g\rangle &= [\pi(f^2 + g^2)]^{-1/4} \\ &\times \exp\left[\frac{q^2}{2(f^2 + g^2)} + \sqrt{2} \frac{q}{f - ig} a^+ \right. \\ &\left. - \frac{f + ig}{2(f - ig)} a^{+2}\right] |0\rangle. \quad (29) \end{aligned}$$

利用正规乘积内算符的积分技术, 容易得出态 $|q, f, g\rangle$ 所满足的完备性关系

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dq |q, f, g\rangle\langle q, f, g| \\ &= [\pi(f^2 + g^2)]^{1/2} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left\{-\frac{1}{f^2 + g^2} [q - (fQ + gP)]\right\} := 1 \quad (30) \end{aligned}$$

式中符号“ $:=$ ”表示正规乘积. 因此, 态 $|q, f, g\rangle$ 能构成一个完备的表象. 当 $f = 1$ 且 $g = 0$ 时, 态 $|q, f, g\rangle$ 转化为坐标算符 Q 的本征态 $|q\rangle$. 当 $f = 0$ 且 $g = 1$ 时, 态 $|q, f, g\rangle$ 转化为动量算符 P 的本征态 $|p\rangle$. 故把态 $|q, f, g\rangle$ 所能构成的表象称为中介表象. 这样, 态 $|\beta, -m\rangle_e$ 的 tomogram 函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(q, f, g) &= \iint \frac{dp' dq'}{2\pi\hbar} \delta(q - fq' - gp') \\ &\times |\beta, -m\rangle_e \langle \Delta(p', q') | \beta, -m\rangle_e \\ &= |q, f, g\rangle\langle \beta, -m\rangle_e|^2. \quad (31) \end{aligned}$$

由(1)和(29)式, 可得态 $|\beta, -m\rangle_e$ 的 tomogram 函数的振幅

$$\begin{aligned} & |q, f, g\rangle\langle \beta, -m\rangle_e \\ &= |q, f, g\rangle \int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle\langle z | \beta, -m\rangle_e \\ &= \frac{[\pi(f^2 + g^2)]^{1/4} C_{e, -m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{(2n+m)!} \int \frac{d^2 z}{\pi} z^{*2n+m} \\ &\times \exp\left[-|z|^2 - \frac{q^2}{2(f^2 + g^2)} \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{2}q}{f + ig} z - \frac{f - ig}{2(f + ig)} z^2\right] \\ &= \frac{[\pi(f^2 + g^2)]^{1/4} C_{e, -m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{(2n+m)!} \frac{\partial^{2n+m}}{\partial \lambda^{2n+m}} \\ &\times \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp\left[-|z|^2 - \frac{q^2}{2(f^2 + g^2)} \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{2}q}{f + ig} z - \frac{f - ig}{2(f + ig)} z^2 + \lambda z^*\right] \Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{[\pi(f^2 + g^2)]^{1/4} C_{e, -m}}{\beta^m \sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+m}}{(2n+m)!} \frac{\partial^{2n+m}}{\partial \lambda^{2n+m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left[-\frac{q^2}{\chi(f^2 + g^2)} + \frac{\sqrt{2}q}{f + ig}\lambda\right. \\ & \left. - \frac{f - ig}{\chi(f + ig)}\lambda^2\right] \Big|_{\lambda=0} \\ & = \frac{[\pi(f^2 + g^2)]^{1/4} C_{e,-m}}{\sqrt{\cosh|\beta|^2}} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n+m)!} \left(\sqrt{\frac{f-ig}{\chi(f+ig)}}\right)^{2n+m} \\ & \times H_{2n+m}(q/\sqrt{f^2+g^2}) \exp\left[-\frac{q^2}{\chi(f^2+g^2)}\right]. \end{aligned} \quad (32)$$

上述计算过程中我们利用了

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2z}{\pi} \exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2}) \\ & = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left[\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2g + \eta^2f}{\zeta^2 - 4fg}\right], \end{aligned} \quad (33)$$

此积分公式成立的条件为

$$\begin{aligned} & \text{Re}(\zeta \pm f \pm g) < 0, \\ & \text{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta \pm f \pm g}\right) < 0. \end{aligned} \quad (34)$$

还利用了厄米特多项式 $H_n(x)$ 的产生函数公式

$$H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \exp(2xt - t^2) \Big|_{t=0}. \quad (35)$$

由(31)(32)式, 可得态 $|\beta, -m_e\rangle$ 的 tomogram 函数为

$$\begin{aligned} T_{e,-m}(q, f, g) & = \frac{C_{e,-m}^2}{[\pi(f^2 + g^2)]^{1/2} \cosh|\beta|^2} \\ & \times \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{f-ig}{\chi(f+ig)}}\right)^{2n+m} \right. \\ & \times \frac{\beta^{2n} H_{2n+m}(q/\sqrt{f^2+g^2})}{(2n+m)!} \Big|^2 \\ & \times \exp[-q^2\chi(f^2+g^2)]. \end{aligned} \quad (36)$$

可见, 这是获得量子态的 tomogram 函数的一种新的方法.

同样, 利用(27)(29)式, 可导出增光子奇相干态 $|\beta, -m_o\rangle$ 的 tomogram 函数

$$\begin{aligned} & T_{o,-m}(q, \mu, \nu) \\ & = \iint \frac{dp' dq'}{2\pi\hbar} \delta(q - \mu q' - \nu p') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int \frac{d^2z}{\pi} \exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2}) \\ & = \frac{C_{o,-m}^2}{[\pi(f^2 + g^2)]^{1/2} \sinh|\beta|^2} \\ & \times \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{f-ig}{\chi(f+ig)}}\right)^{2n+m} \right. \\ & \times \frac{\beta^{2n+1} H_{2n+1+m}(q/\sqrt{f^2+g^2})}{(2n+1+m)!} \Big|^2 \\ & \times \exp[-q^2\chi(f^2+g^2)]. \end{aligned} \quad (37)$$

因此, 在实验上只要能够在中介表象下测得 $|q, f, g|\beta, -m_{e,o}\rangle|^2$, 即可获得增光子奇偶相干态 $|\beta, -m_{e,o}\rangle$ 的 tomogram 函数, 从而实现对该态 $|\beta, -m_{e,o}\rangle$ 的测量.

4. 结 论

本文利用相干态表象下的 Wigner 算符, 重构了增光子奇偶相干态的 Wigner 函数, 并根据此 Wigner 函数在相空间中随复变量 α 的变化关系, 讨论了增光子奇偶相干态的非经典性质. 结果表明, 增光子奇偶相干态总呈现非经典性质, 且在 m 取奇(或偶)数时, 增光子偶(或奇)相干态更容易出现非经典性质. 同时, 增光子奇偶相干态 Wigner 函数分布的特征变化基本相同. 对于 m 的不同取值, 增光子奇偶相干态的 Wigner 函数分布始终呈现多峰结构, 且波峰数与 m 有关. 即增光子奇偶相干态的量子干涉效应的显著程度与 m 取值有关. 唯一不同的是, 对于 m 取偶(或奇)数时, 增光子奇、偶相干态的 Wigner 函数的波峰取向相反, 这也恰好说明增光子奇偶相干态之间满足正交关系. 根据增光子奇偶相干态的 Wigner 函数的边缘分布, 阐明此 Wigner 函数的物理意义在于它的边缘分布给出了粒子在相空间中找到的概率. 最后, 利用中介表象理论, 获得了增光子奇偶相干态的量子 tomogram 函数. 由于它是可被直接测量的正定的概率分布函数并且能够构造量子态的密度算符, 因此, 利用(36)(37)式可以在实验上实现对增光子奇偶相干态 $|\beta, -m_{e,o}\rangle$ 的测量, 也可用来描述此态的演化行为.

[1] Vogel K, Risken H 1989 *Phys. Rev. A* **40** 2847
 [2] Dariano G M, Macchiavello C, Paris M G A 1994 *Phys. Rev. A* **50** 4298
 [3] Wallentowitz S, Vogel W 1996 *Phys. Rev. A* **53** 4528
 [4] Luttermann L G, Davidovich L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2547
 [5] Franca Santos M, Solano E, de Matos Filho R L 2001 *Phys. Rev.*

- Lett.* **87** 093601
- [6] Zhang Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 70 (in Chinese) [张智明 2004 物理学报 **53** 70]
- [7] Zhang Z M 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 227
- [8] Zhang Z M 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 5
- [9] Smithy D T, Beck M, Cooper J *et al* 1993 *Phys. Rev. A* **48** 3159
- [10] Banaszek K, Radzewicz C, Wodkiewicz K 1999 *Phys. Rev. A* **60** 674
- [11] Noguez G, Rauschenbeutel A, Osnaghi S *et al* 2000 *Phys. Rev. A* **62** 054101
- [12] Yang Q Y, Wei L F, Ding L E 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1390 (in Chinese) [杨庆怡、韦联福、丁良恩 2003 物理学报 **52** 1390]
- [13] Yang Q Y, Sun J W, Wei L F *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2704 (in Chinese) [杨庆怡、孙敬文、韦联福等 2005 物理学报 **54** 2704]
- [14] Fan H Y, Ruan T N 1984 *Commun. Theor. Phys.* **3** 345
- [15] Wang Z X, Guo D R 1965 *General Theory of Special Functions* (Beijing Science Press) p359 (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 1965 特殊函数论 (北京 科学出版社) 第 359 页]
- [16] Wigner E P 1932 *Phys. Rev.* **40** 749
- [17] Man 'ko V I, Marmo G, Simoni A *et al* 2005 *Phys. Lett. A* **343** 251
- [18] Fan H Y 2001 *Entangled State Representations in Quantum Mechanics and Their Applications* (Shanghai : Shanghai Jiaotong University Press) p7 (in Chinese) [范洪义 2001 量子力学纠缠态表象及应用 (上海 : 上海交通大学出版社) 第 7 页]

Wigner function for the photon-added even and odd coherent state ^{*}

Meng Xiang-Guo Wang Ji-Suo[†] Liang Bao-Long

(Department of Physics , Liaocheng University , Liaocheng 252059 , China)

(Received 9 August 2006 ; revised manuscript received 21 September 2006)

Abstract

Using the coherent state representation of the Wigner operator , the Wigner function for the photon-added even and odd coherent state (PAEOCS) is obtained. In terms of the variations of the Wigner function with the complex parameter α in the phase space , the non-classical properties of the PAEOCS are discussed. It is found that the PAEOCS always exhibits the non-classical properties , and the photon-added even (or odd) coherent state exhibits the non-classical properties more easily when m is odd (or even). By virtue of the marginal distributions of the Wigner function for the PAEOCS , we illuminate the physical meaning of the Wigner function. Finally , based on the intermidate coordinate-momentum presentation the quantum tomogram function for the PAEOCS is obtained.

Keywords : photon-added even and odd coherent state , Wigner function , intermidate coordinate-momentum representation , tomogram function

PACC : 4250 , 0530

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10574060) and the Natural Science Foundation of Shandong Province , China (Grant No. Y2004A09).

[†] Corresponding author. E-mail : jswang@lccu.edu.cn