

薄板状周期栅格结构中弹性波传播特性研究^{*}

温激鸿[†] 郁殿龙 王 刚 赵宏刚 刘耀宗

(国防科学技术大学机电工程研究所, 长沙 410073)

(2006 年 5 月 24 日收到, 2006 年 12 月 8 日收到修改稿)

相位常数面可以描述特定频率、特定结构中波的传播方向及传播区域. 将相位常数面这一分析方法应用于薄板状周期栅格结构中弹性波传播特性的研究, 采用集中质量法计算了周期栅格结构的相位常数面, 得到了直观的三维能带结构图. 相位常数面可以用二维等高线图描述, 通过计算等高线上每一点的法线方向, 得到了在特定通带频率下弹性波的传播方向及传播区域. 这些研究对于通带频率范围内的弹性波传播特性具有重要意义.

关键词: 声子晶体, 弹性波带隙, 集中质量法, 相位常数面

PACC: 4320, 4335, 0260

1. 引 言

结构振动问题广泛存在于国防军事、航空航天、船舶、机械动力等各个领域, 抑制结构中的有害振动一直是工程技术中迫切需要解决的问题.

在实际工程中, 许多结构(如磁悬浮列车的承载导轨、多跨距桥梁、船舶工程或航空工程中广泛应用的加筋板及栅格结构、卫星及太空站中使用的大型柔性空间结构等均具有共同的特点——周期性. 这些结构通常是由一些相同结构单元以相同方式连接而成的. 研究表明: 当弹性波在周期结构中传播时, 某些频率范围内的波不能通过, 称之为带隙 (band gap), 而某些频率范围内的波可以通过, 称之为通带 (pass band). 可以想象, 通过合理设计周期结构的几何参数和材料参数, 可以在一定频率范围内抑制结构振动的传播并降低由振动引起的声辐射, 这对提高结构的工作性能及抗疲劳能力具有重要意义^[1]. 近年来, 凝聚态物理领域中的声子晶体概念的出现为周期结构的研究注入了新的活力^[2-15], 声子晶体是具有弹性波带隙的周期结构, 是传统周期结构中的一种特殊类别, 可以结合声子晶体的相关理论来设计周期结构并分析其振动特性.

相位常数面 (phase constant surface) 可以描述特

定频率下、特定结构中波的传播方向及传播区域, 通常用于分析周期结构中弹性波的传播特性^[16-20]. 在掌握弹性波传播特性的基础上, 通过优化设计可以提高特定频率、特定方向上的振动隔离能力. 但是, 目前仅研究了弹簧质量系统以及同种材料构成的栅格结构的弯曲振动特性.

本文构造了一种材料特性周期变化的薄板状栅格结构, 采用声子晶体能带结构计算中的集中质量法计算了该栅格结构平面内纵向振动时的相位常数面, 得到了直观的三维能带结构图. 通过计算等高线上每一点的法线方向, 得到了在特定通带频率下弹性波的传播方向及传播区域. 利用有限元法, 计算了有限周期薄板状栅格结构的频率响应特性, 证实了通带内弹性波传播的方向性及区域性.

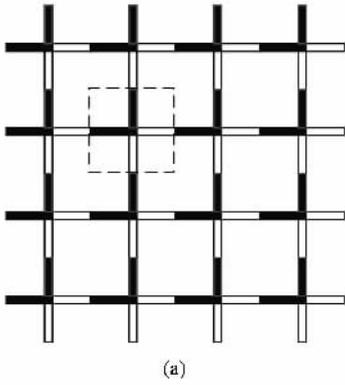
2. 基于集中质量法的相位常数面计算

图 1(a) 所示为薄板状周期栅格结构, 该结构是由两种不同的材料以正方晶格形式周期排列构成的, 黑色部分为材料 A, 白色部分为材料 B. 图 1(b) 为该周期栅格结构的单个元胞, 晶格尺寸 $a = \alpha(l + d)$.

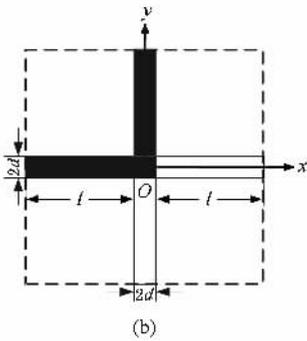
对于薄板结构, 当弹性波限制在 $x-y$ 平面内传播时, 其应力与应变之间的关系为

^{*} 国家重点基础研究发展规划 (批准号 51307) 和国家自然科学基金 (批准号 50575222) 资助的课题.

[†] E-mail: wenjihong@vip.sina.com



(a)



(b)

图 1 薄板状周期栅格结构及单个元胞
(a)薄板状周期栅格结构,(b)周期栅格结构中的单个元胞

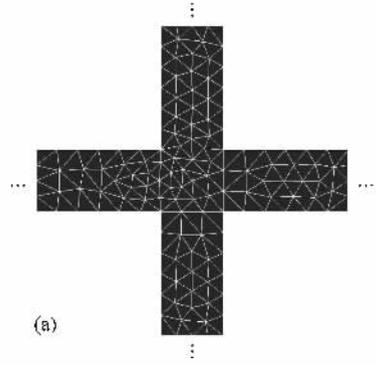
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \begin{bmatrix} 4(\lambda + \mu) & 2\lambda & 0 \\ 2\lambda & 4\lambda + \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 为应力, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 为应变, λ, μ 为拉梅常数.

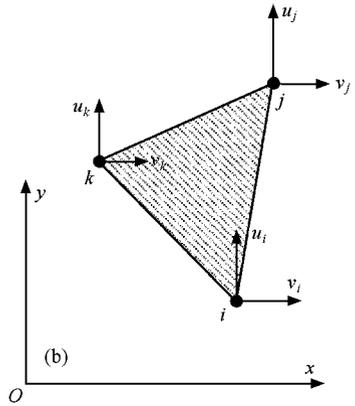
对于薄板状周期栅格结构的单个元胞,首先采用集中质量法对其进行离散处理,将连续介质的密度集中到离散节点上成为集中质量,而相邻质点由仅有弹性而没有密度的连续介质连接.图 2 为周期栅格结构中单个元胞的离散,图 2(a)为三角形网格对栅格单个元胞的描述,图 2(b)为三角形网格中的一个单元.

考虑单个三角形单元,单元节点与回复力的关系可以由下式表示:

$$\mathbf{F}_{xy} = \mathbf{K}_{xy} \Delta_{xy} \quad (2)$$



(a)



(b)

图 2 周期栅格中单个元胞的离散
(a)三角形网格对单个元胞的描述,
(b)三角形网格中的一个单元

式中

$$\{F_{xy}\}_r = \{F_x, F_y\}_r,$$

$$\{\Delta_{xy}\}_r = \{u_i, v_i\}_r$$

为节点 r 上的节点力,

$$\mathbf{K}_{xy} = \{\mathbf{k}_{xy}\}_{rs}$$

为单元刚度矩阵.

单元内的介质在运动时,其内部质量所产生的惯性力为体积力,可以被平均分配到 3 个节点上,也就是将单元内质量平均分配到单元的 3 个节点上.某个节点 r 上的质量 m_r 为相邻单元分配到该节点上的质量总和,这样就可以得到某个节点的动力平衡方程

$$m_r \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} \right]^T = F_r^{xy} = \sum_{s=0}^{N_{nodes}} \{\mathbf{k}_{xy}\}_{rs} [u_s, v_s]^T, \quad (3)$$

式中 N_{nodes} 为栅格结构单个周期内的节点数,也即集中质量数 $[u_s, v_s]^T$ 为节点的位移向量.

按照同样的思想,我们可以得到栅格结构单个周期内所有离散节点上的动力平衡方程,并组成方程组,由周期结构的 Bloch 定理,该方程组的形式为

$$[u_r, v_r]^T = [A_r, B_r]^T e^{[q_x x_r + q_y y_r - \omega t]}, \quad (4)$$

式中 q_x, q_y 为波矢,在 $[-\pi/a, \pi/a]$ 间取值, a 为晶格常数, A_r, B_r 为节点 m_r 沿 x, y 方向上的振动幅值,与结构具有相同的周期性.

将(4)式代入(3)式,可得

$$\begin{aligned} & (-\{k_{xy}\}_r/m_r - \omega^2 \mathbf{I} [A_r, B_r]^T) \\ & = \sum_{s \neq r} \{k_{xy}\}_s [A_s, B_s]^T e^{[q_x(x_s-x_r) + q_y(y_s-y_r)]}/m_r. \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式是典型的一般复数矩阵特征值问题,可以改写为

$$[S_{xy}(q) - \omega^2 \mathbf{I} \mathbf{I} [A_s, B_s]^T] = 0. \quad (6)$$

对于给定的波矢 q ,可通过求解特征值得到相应的一系列特征频率 ω ,从而得到该周期栅格结构的能带结构图^[11].

另外,求解所有 q_x, q_y 组合下的频率值,可以得到一组函数 $\omega = f(q_x, q_y)$,该函数定义了相位常数面^[16-20].相位常数面包含了关于弹性波传播特性的信息.相位常数面可以通过空间的三维表面描述,也可以通过平面内的二维同频率等高线描述.

对于二维周期结构,沿 x 方向和 y 方向的群速度可以分别写成^[20]

$$\begin{aligned} c_{gx} &= a_x \frac{\partial \omega}{\partial q_x}, \\ c_{gy} &= a_y \frac{\partial \omega}{\partial q_y}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 a_x, a_y 分别表示 x 方向和 y 方向的晶格常数.当用二维等高线图来描述相位常数面时,根据(7)式可知,每条等高线上每一点的法线方向即为该点的群速度方向.对于无阻尼结构,群速度即为振动能量的传播速度^[21].因而可以通过二维等高线图上的法线方向来确定能量的传播方向.这样通过分析二维相位常数面的等高线图,就可以得到该通带频率下弹性波在薄板状周期栅格结构中的传播方向及传播区域.

采用集中质量法,我们计算了钢(材料 A)及树脂(材料 B)构成的薄板状周期栅格结构的能带结构及相位常数面.计算中此栅格结构的结构参数为晶格尺寸 $a = 200 \text{ mm}$, $l = 80 \text{ mm}$, $d = 20 \text{ mm}$,厚度 $h = 4 \text{ mm}$.钢的材料参数为 $\rho_{Fe} = 7780 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\lambda_{Fe} = 12.15 \times 10^{10} \text{ Pa}$ 和 $\mu_{Fe} = 8.1 \times 10^{10}$;树脂的材料参数为 ρ_{Ln}

$= 1142 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\lambda_{Ln} = 4.43 \times 10^9 \text{ Pa}$ 和 $\mu_{Ln} = 1.59 \times 10^9 \text{ Pa}$.图 3(a)为该栅格结构的能带结构图,图中只给出了 7000 Hz 以下频率的能带结构曲线,2242—4166 及 4298—6032 Hz 为两个带隙.图 3(b)为该栅格结构的相位常数面图,同样,图中只给出了 7000 Hz 以下频率的相位常数面.从图 3 可以看出,在第三及第四、第四及第五两个相位常数面间为两个带隙,带隙频率范围同能带结构计算得到的带隙一致.采用相位常数面方法,能够直观地展示周期结构中的带隙.

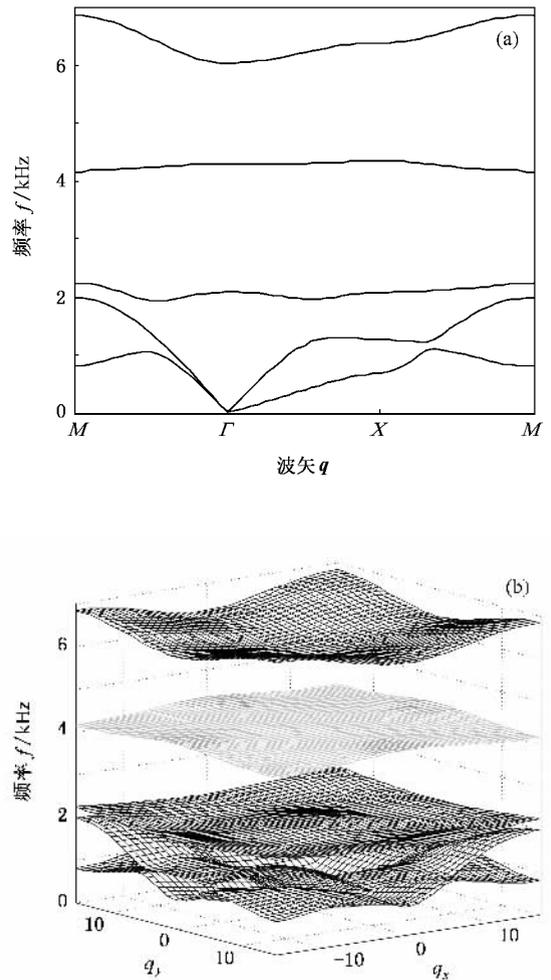


图 3 周期栅格结构的能带结构及相位常数面 (a)能带结构, (b)相位常数面

3. 周期栅格结构中弹性波的传播特性分析

如上所述,我们可以用二维的等高线图来描述相位常数面,每个频率等高线上每一点的法线方向

代表了该频率下弹性波的能量传播方向. 通过计算等高线上每一点的法线方向, 可以得到在特定频率下弹性波的传播方向及传播区域.

图 4 (a) 给出了第五个相位常数面三维图形, 图 4 (b) 给出了该相位常数面对应的二维等高线图, 图中给出了 6100—6800 Hz 的 8 条等高线 (图中只标出了 6100, 6200, 6300 Hz 3 条等高线, 其余标注类推, 相邻等高线间频率相差 100 Hz).

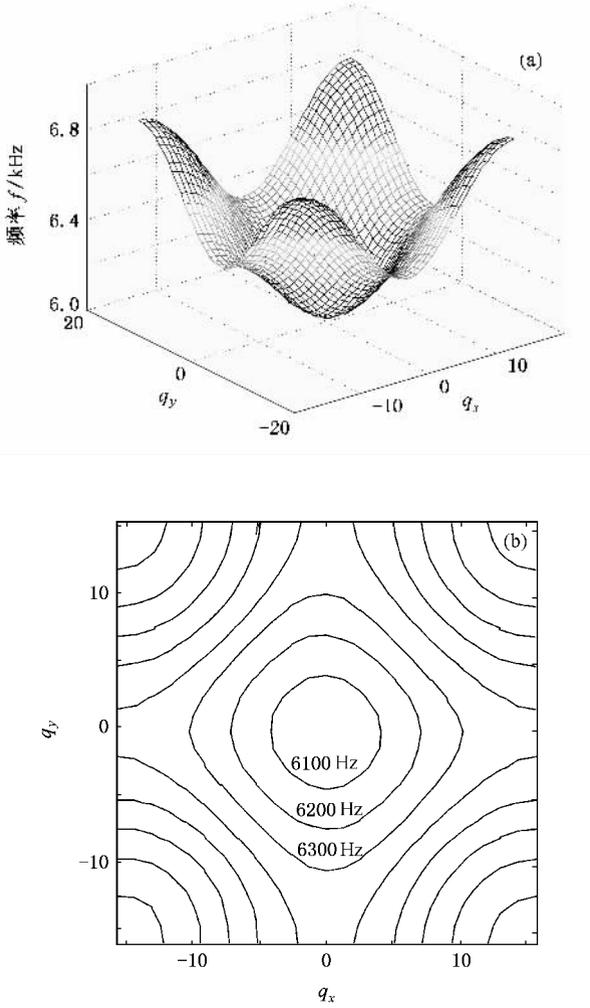


图 4 相位常数面及等高线图 (a) 第五个相位常数面 (b) 相位常数面对应的二维等高线图

图 5 (a) 所示为第五个相位常数面中一条频率为 6300 Hz 的等高线. 在该等高线上均匀选取 N 个点, 作每个点的法线, 法线的方向代表了该点波的传播的方向, 如图 5 (a) 中的箭头所指方向. 法线的方向可以用法线方向同坐标系中 x 轴的正方向的夹角来表示, 这样就可以得到 N 个角度, 统计这 N 个

角度在 $0\text{—}360^\circ$ 的分布范围, 就可以得到该频率下弹性波在周期栅格结构中的传播方向和传播区域. 在等高线上选取的点数 N 越大, 得到的传播方向及传播区域就越准确. 图 5 (b) 给出了 6300 Hz 下波的传播方向, 其中最外侧圆周上的数字为 $0^\circ\text{—}360^\circ$ 角度描述, 文中将其分成 72 个区域, 每 5° 为一个传播区域, 内部的每个圆周上的数字 5, 10, 15, 20 表示这 N 个角度落在每个传播区域中的数量. 数量越大, 表示该区域传播的波的能量越大. 从图 5 (b) 可以看出, 弹性波主要沿 $\pm 45^\circ$ 斜线方向传播, 传播区域局限在 $\pm 45^\circ$ 斜线方向很小的角度范围内.

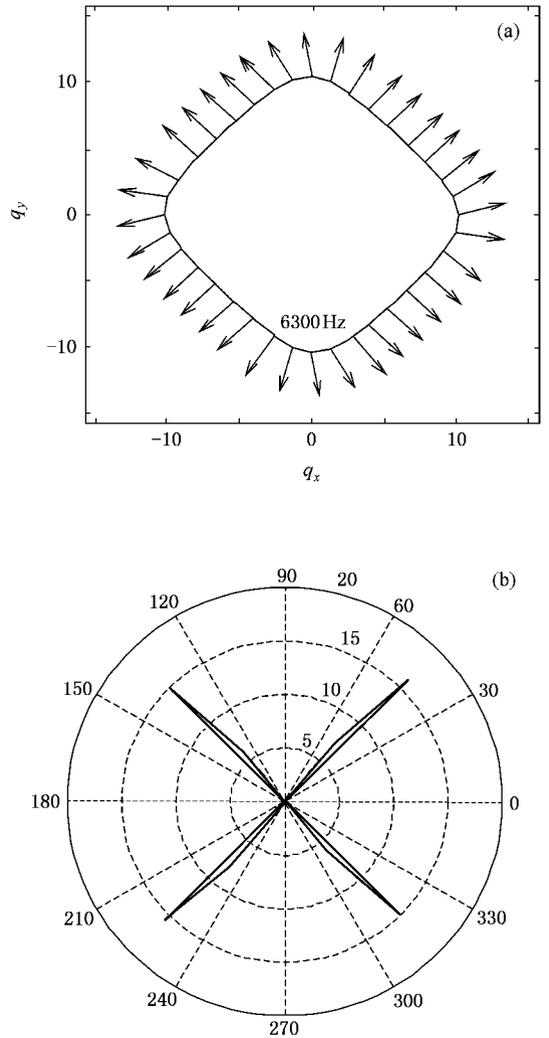


图 5 频率为 6300 Hz 的等高线上所取点的法线方向及对应的波传播方向 (a) 等高线及线上选取点的法线方向 (b) 该频率下对应的波传播方向

图 6 (a) 所示为频率为 6100 Hz 的等高线. 采用上述方法, 我们可以得到该频率下的波传播方向及

传播区域(图 5(b)).从图 6 可以看出,此时选取的 N 个点在不同方向的传播数量基本相同,因而弹性波的传播不存在特定的方向性及区域性,即全方向传播.

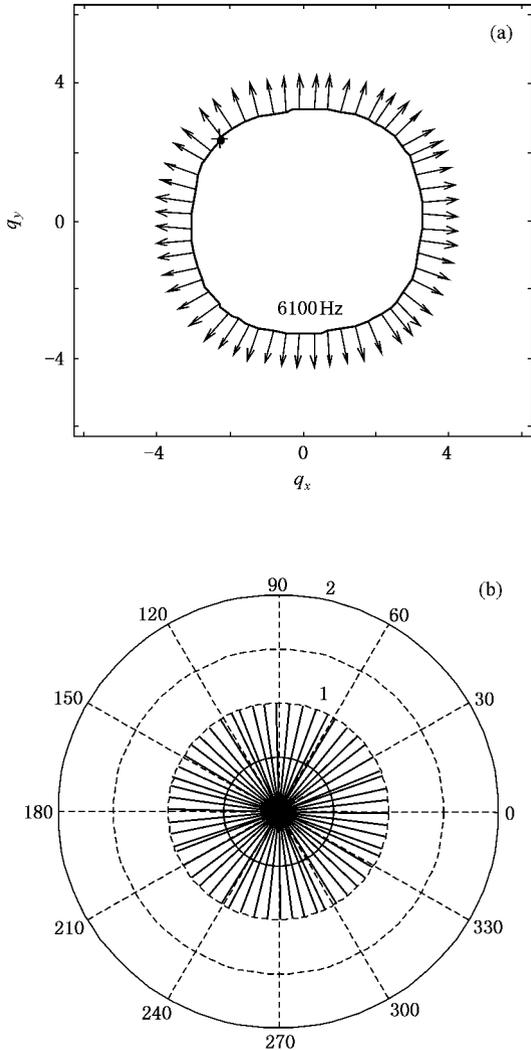


图 6 频率为 6100 Hz 的等高线上所取点的法线方向及对应的波传播方向 (a)等高线及线上选取点的法线方向 (b)该频率下对应的波传播方向

采用上述方法,可以得到薄板状周期栅格结构通带内任一频率的弹性波传播方向及传播区域.

4. 有限元法计算的周期栅格结构中弹性波传播特性

图 7(a)所示为 15×15 个周期的薄板状周期栅格结构,在其中心位置施加沿平面内 x 方向的加速度激励,采用有限元仿真可以计算得到该栅格结构

的频率响应曲线.图 7(b)给出了该栅格结构右边界的频率响应曲线.从图 7 可以看出,在 2215—4210 及 4348—5800 Hz 两个频率范围有明显的振动衰减,这与以上计算得到的带隙频率范围基本一致,即有限周期薄板状栅格结构的振动衰减频率范围和无限周期计算得到的弹性波带隙频率范围是相互对应的.

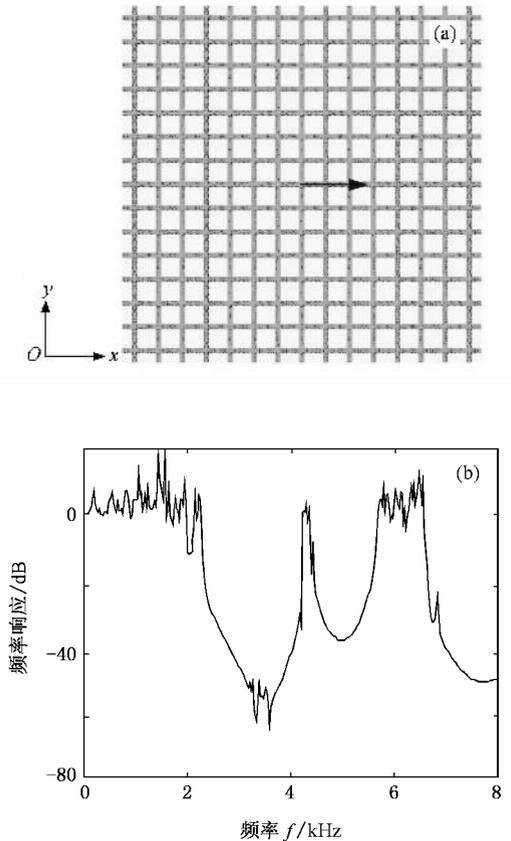


图 7 周期栅格结构及频率响应曲线 (a) 15×15 个周期的薄板状栅格结构(中心的箭头表示受力方向)(b)频率响应曲线

采用有限元仿真计算得到的带隙位置与采用集中质量法计算得到的带隙位置存在一定的误差,第二个带隙的截至频率比能带结构中的低,因而在有限元结果中选取频率稍低的 6200 Hz 处振动响应图,如图 8(a)所示.从图 8(a)可以看出,弹性波主要沿 $\pm 45^\circ$ 斜线方向传播,传播区域局限在沿 $\pm 45^\circ$ 斜线方向很小的角度范围内.图 8(b)给出了频率为 6100 Hz 时弹性波传播方向及区域.从图 8(b)可以看出,在该频率下弹性波的传播不存在特定的方向性及区域性,即全方向传播.这与以上采用相位常数方法预测得到的结果相一致.

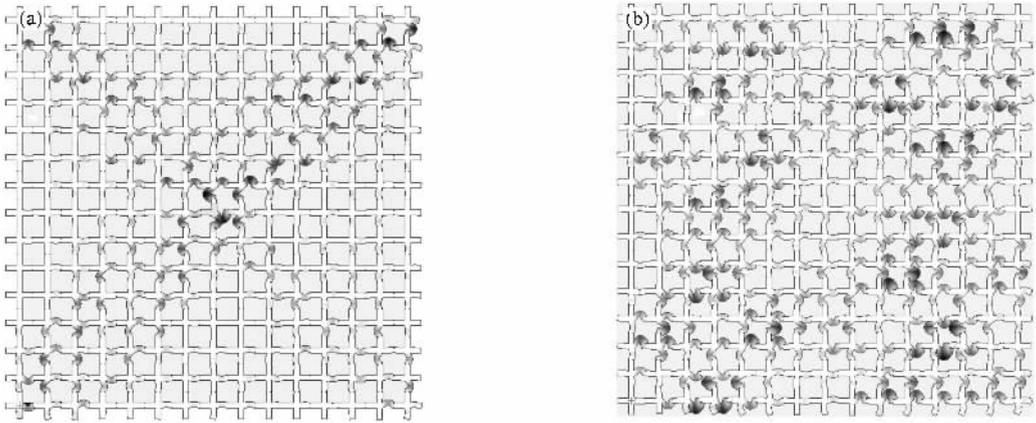


图 8 不同频率下的弹性波传播方向及区域 (a) 频率为 6200 Hz (b) 频率为 6100 Hz

5. 结 论

本文针对钢及树脂构成的薄板状周期栅格结构纵向振动,采用集中质量法计算了该栅格结构的相位常数面,得到了直观的三维能带结构图.通过相位常数面等高线图上每个频率对应的等高线上每一点

的法线方向,得到了在特定频率下弹性波的传播方向及传播区域.采用有限元仿真方法,计算了有限周期薄板状栅格结构的频率响应特性,证实了通带内弹性波传播的方向性及区域性.采用相位常数面方法,可以分析周期结构中弹性波的传播特性,在此基础上,通过对周期结构的优化设计,可以提高周期结构在特定频率、特定方向上的振动隔离能力.

- [1] Mead D J 1996 *J. Sound Vib.* **190** 495
- [2] Sigalas M M, Economou E N 1993 *Solid State Commun.* **86** 141
- [3] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022
- [4] Vasseur J O, Djafari-Rouhani B, Dobrzynski L *et al* 1994 *J. Phys. : Conden. Matter* **6** 8759
- [5] Liu Z Y, Chan C T, Sheng P *et al* 2000 *Phys. Rev. B* **62** 2446
- [6] Wang G, Wen J H, Han X Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1943 (in Chinese) 王 刚、温激鸿、韩小云等 2003 物理学报 **52** 1943]
- [7] Wen J H, Wang G, Liu Y Z *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3384 (in Chinese) 温激鸿、王 刚、刘耀宗等 2004 物理学报 **53** 3384]
- [8] Sigalas M M, García N 2000 *J. Appl. Phys.* **87** 3122
- [9] Tanaka Y, Tomoyasu Y, Tamura S I 2000 *Phys. Rev. B* **62** 7387
- [10] Goffaux C, Sánchez-Dehesa J 2003 *Phys. Rev. B* **67** 144301
- [11] Wang G, Wen J H, Liu Y Z *et al* 2004 *Phys. Rev. B* **69** 184302
- [12] Liu Z Y, Zhang X, Mao Y *et al* 2000 *Science* **289** 1734
- [13] Wang G, Yu D L, Wen J H *et al* 2004 *Phys. Lett. A* **327** 512
- [14] Wang G, Wen X S, Wen J H *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 154302
- [15] Jensen J S 2003 *J. Sound Vib.* **266** 1053
- [16] Langley R S 1996 *J. Sound Vib.* **197** 447
- [17] Langley R S 1997 *J. Sound Vib.* **201** 235
- [18] Langley R S 1997 *J. Sound Vib.* **207** 521
- [19] Ruzzene M, Scarpa F, Soranna F 2003 *Smart Matter Struct.* **12** 363
- [20] Jeong S M 2004 *Ph. D. Thesis* (Atlanta : Georgia Institute of Technology)
- [21] Brillouin L 1953 *Wave Propagation in Periodic Structures* (New York : Dover)

The characteristics of wave propagation in laminated grid structure^{*}

Wen Ji-Hong[†] Yu Dian-Long Wang Gang Zhao Hong-Gang Liu Yao-Zong

(*Institute of Mechatronical Engineering , National University of Defense Technology , Changsha 410073 ,China*)

(Received 24 May 2006 ; revised manuscript received 8 December 2006)

Abstract

The characteristics of wave propagation in laminated grid structure are analyzed using the lumped-mass method to yield the phase constant surface. The directions and regions of wave propagation in this grid structure for certain frequencies during pass bands are predicted with the iso-frequency contour lines of the phase constant surface , which are also validated with the calculated harmonic responses of a finite two-dimensional grid structure with 15×15 unit cells.

Keywords : phononic crystals , elastic band gap , lump-mass method , phase constant surface

PACC : 4320 , 4335 , 0260

^{*} Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 51307) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50575222).

[†] E-mail : wenjihong@vip.sina.com