第 56 卷 第 5 期 2007 年 5 月
1000-3290/2007/56(05)/2475-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.5,May,2007

一类多自由度线性耦合系统的对称性与守恒量研究

楼智美†

(绍兴文理学院物理系,绍兴 312000)

(2006 年 8 月 19 日收到;2006 年 9 月 13 日收到修改稿)

运用改变坐标标度和旋转坐标轴的方法先消去 Lagrange 函数中的耦合项,直接得到新坐标系下的守恒量,利用坐标反变换得到原坐标系下的守恒量,并讨论与守恒量相应的无限小变换的 Noether 对称性与 Lie 对称性,最后举例说明结果的应用.

关键词:多自由度线性耦合系统,守恒量,Noether 对称性,Lie 对称性

PACC:0320

1. 引 言

力学系统的对称性与守恒量紧密地联系在一起,关于力学系统对称性与守恒量的研究已渗透到数学、力学、物理学等各个领域.寻求力学系统的对称性和守恒量已成为近代分析力学的一大热点问题,众所周知,已知力学系统的 Lagrange 函数(或 Hamilton 函数)直接运用 Noether 方法、Lie 方法和 Mei 方法都能得到系统的守恒量[1—12],一般的方法是引进群的无限小变换,通过解微分方程组,得到无限小变换的生成元,从而得到守恒量.事实上,由于 Lagrange 函数一般均含耦合项,这对通过 Lagrange 函数直接求守恒量的方法带来了困难,并可能找不到更多的守恒量.有一类力学系统其 Lagrange 函数是线性耦合的,其相应的运动微分方程也是线性耦合的,则可以运用改变坐标标度和旋转坐标轴的方法,消去 Lagrange 函数中的耦合项(即解耦),先得到在新坐标系下的守恒量,通过坐标反变换得到原坐标系下的守恒量.运用 Noether 逆定理得到与守恒量相应的无限小变换的生成元,并将生成元代入 Lie 对称性的确定方程,从而讨论其 Lie 对称性.

2. 多自由度线性耦合系统的实现与解耦方法

设力学系统由 n 个质点和 $n+1$ 根轻质弹簧组成,质点的质量为 m_s,轻质弹簧的劲度系数为 k_s,质点和弹簧依次相连后固定于两端(如图 1 所示),忽略阻力.x_s 为第 s 个质点相对其平衡位置的位移,则此力学系统为多自由度线性耦合系统,其 Lagrange 函数可表示成

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} m_s \dot{x}_s^2 - \Big(\frac{1}{2} k_1 x_1^2 \\
&\quad + \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{2} k_s (x_s - x_{s-1})^2 + \frac{1}{2} k_{n+1} x_n^2 \Big) . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

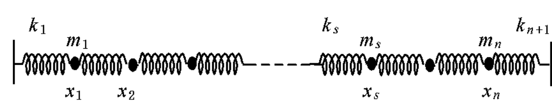

图 1 多自由度线性耦合系统

由 Lagrange 方程可得到一组相互耦合的线性二阶微分方程组:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} \right) x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 = a_1 , \\
\ddot{x}_s &= \frac{k_s}{m_s} x_{s-1} - \left(\frac{k_s}{m_s} + \frac{k_{s+1}}{m_s} \right) x_s + \frac{k_{s+1}}{m_s} \\
&= a_s , \quad (s = 2, \cdots, n-1) . \\
\ddot{x}_n &= -\left(\frac{k_n}{m_n} + \frac{k_{n+1}}{m_n} \right) x_n + \frac{k_n}{m_n} x_{n-1} = a_n , \qquad (2)
\end{aligned}
$$

运用 Noether 方法和 Lie 方法直接研究系统(1),(2)的对称性与守恒量比较麻烦,且很难找到除机械能以外的守恒量.如能先对系统解耦,即消去 Lagrange

† E-mail:louzhimei@zscas.edu.cn

函数中的交叉项，求力学系统的对称性与守恒量将变得容易.

先进行坐标标度变换，令

$$y_s = \sqrt{m_s} x_s , \tag{3}$$

则系统的 Lagrange 函数变为

$$L_1 = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} \dot{y}_s^2 - \left(\frac{k_1}{2m_1} y_1^2 + \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{2} k_s \left(\frac{y_s}{m_s} - \frac{y_{s-1}}{m_{s-1}} \right)^2 + \frac{k_{n+1}}{2m_n} y_n^2 \right), \tag{4}$$

其中的势能函数可以写成

$$V = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta = \frac{1}{2} \tilde{y} \ A y , \tag{5}$$

其中的 $\tilde{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \tag{6}$$

为势能矩阵.

再旋转坐标轴，设

$$q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} y_\beta \qquad (\alpha = 1, \cdots, n), \tag{7}$$

在新坐标系下，Lagrange 函数简化为

$$L_2 = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} \dot{q}_s^2 - \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} \lambda_s q_s^2$$

其运动微分方程简化为

$$\ddot{q}_i = - \lambda_s q_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{8}$$

其中的 λ_s 为势能矩阵 A 的本征值.

3. 守恒量与对称性

在新坐标系下，(8)式所表示的系统最多可有 n 个守恒量. 但如势能矩阵的本征值出现重根，则守恒量有相同的值 如本征值为零，则相应的守恒为平凡的守恒量.

$$I_\alpha = \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha^2 + \frac{1}{2} \lambda_\alpha q_\alpha^2 \quad (\alpha = 1, \cdots, n). \tag{9}$$

利用(3)，(7)式进行反变换，可得到用原坐标表示的守恒量 $I_\alpha = I_\alpha (x, \dot{x})$. 这些守恒量不是相互独立的，可以证明

$$\sum_{\alpha=1}^{n} I_\alpha = I, \tag{10}$$

这里的 I 为系统的机械能.

引进群的无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon \tau_\alpha (x, \dot{x}, t),$$

$$x_s^* = x_s + \varepsilon \xi_s^\alpha (x, \dot{x}, t), \tag{11}$$

其无限小生成元向量为

$$X^{(0)} = \tau_\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \xi_s^\alpha \frac{\partial}{\partial x_s}. \tag{12}$$

(12)式的一次扩展为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{n} (\dot{\xi}_s^\alpha - \dot{x}_s \dot{\tau}_\alpha) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_s}, \tag{13}$$

二次扩展为

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{s=1}^{n} \left[(\ddot{\xi}_s^\alpha - \dot{x}_s \ddot{\tau}_\alpha - 2 \ddot{x}_s \dot{\tau}_\alpha) \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_s}, \right. \tag{14}$$

其中 α 代表守恒量的个数，ε 为无限小参数，τ_α，ξ_s^α 为与第 α 个守恒量相应的无限小变换生成元.

根据 Noether 逆定理可确定与守恒量相应的无限小变换的生成元[1].

$$\xi_s^\alpha = \tau^\alpha \dot{x}_s + \tilde{h}_{sk} \frac{\partial I_\alpha}{\partial \dot{x}_k} \quad (k, \alpha = 1, \cdots, n), \tag{15}$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{L} \left[I_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} (\xi_s^\alpha - \dot{x}_s \tau_\alpha) - G_\alpha \right] \quad (\alpha = 1, \cdots, n). \tag{16}$$

其中的 $\tilde{h}_{sk}$ 为 Hess 逆矩阵的各元素，G_α 为规范函数. 将各 I_α 分别代入(15)，(16)式可得相应的无限小变换的生成元，即与守恒量相应的变换是 Noether 对称变换.

如果由(15)，(16)式解得的无限小变换的生成元也满足 Lie 对称性的确定方程

$$\ddot{\xi}_s^\alpha - \dot{x} \ddot{\tau}_\alpha - 2 \dot{\tau}_\alpha a_s = X^{(1)} (a_s) \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{17}$$

其中 a_s 为(2)式中的广义加速度，则与守恒量相对应的变换也是 Lie 对称变换.

4. 算 例

如图 2 所示，三质量均为 m 的质点，用四根劲度系数均为 k 的轻弹簧相联并固定在两端，忽略阻力，系统在水平直线上作微振动，用解耦的方法求系统的守恒量并讨论其对称性.

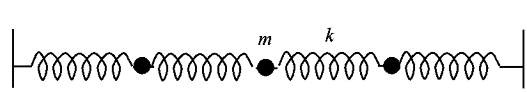

图 2 三质点四弹簧系统

此力学系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-kx_1^2-kx_2^2$$
$$-kx_3^2+kx_1x_2+kx_2x_3. \tag{18}$$

相应的运动微分方程为

$$\ddot{x}_1=-\frac{2k}{m}x_1+\frac{k}{m}x_2=a_1,$$
$$\ddot{x}_2=\frac{k}{m}x_1-\frac{2k}{m}x_2+\frac{k}{m}x_3=a_2, \tag{19}$$
$$\ddot{x}_3=\frac{k}{m}x_2-\frac{2k}{m}x_3=a_3.$$

先对坐标进行标度变换，令 $y_i=\sqrt{m}x_i\ (i=1,2,3)$，则

$$L_1=\frac{1}{2}(\dot{y}_1^2+\dot{y}_2^2+\dot{y}_3^2)$$
$$-\frac{k}{m}(y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_1y_2-y_2y_3). \tag{20}$$

再旋转坐标轴，并设

$$q_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_3,$$
$$q_2=\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3, \tag{21}$$
$$q_3=\frac{1}{2}y_1-\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3.$$

得

$$L_2=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-\frac{k}{m}\Big[q_1^2$$
$$+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)q_2^2+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)q_3^2\Big]. \tag{22}$$

则运动微分方程简化为

$$\ddot{q}_1=-\frac{2k}{m}q_1=a_1,$$
$$\ddot{q}_2=-\frac{k}{m}(2-\sqrt{2})q_2=a_2, \tag{23}$$
$$\ddot{q}_3=-\frac{k}{m}(2+\sqrt{2})q_2=a_3.$$

由(23)式可得三个守恒量

$$I_1=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\frac{k}{m}q_1^2,$$
$$I_2=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\frac{k}{m}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)q_2^2, \tag{24}$$
$$I_3=\frac{1}{2}\dot{q}_3^2+\frac{k}{m}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)q_3^2.$$

利用坐标反变换，在原坐标系下三个守恒量可表示成

$$I_1=\frac{m}{4}(\dot{x}_3-\dot{x}_1)^2+\frac{k}{2}(x_3-x_1)^2,$$
$$I_2=\frac{m}{8}(\dot{x}_1+\sqrt{2}\dot{x}_2+\dot{x}_3)^2$$
$$+\frac{k}{8}(2+\sqrt{2})(x_1+\sqrt{2}x_2+x_3)^2, \tag{25}$$
$$I_3=\frac{m}{8}(\dot{x}_1-\sqrt{2}\dot{x}_2+\dot{x}_3)^2$$
$$+\frac{k}{8}(2-\sqrt{2})(x_1-\sqrt{2}x_2+x_3)^2.$$

可以证明这三个守恒量不是相互独立的，$I_1+I_2+I_3=I$ 是系统最基本的守恒量——机械能.

将(25)式依次代入(15)，(16)式，得

$$\tau_1=-\frac{1}{2},\ \xi_1^1=-\frac{\dot{x}_3}{2},\ \xi_2^1=-\frac{\dot{x}_2}{2},\ \xi_3^1=-\frac{\dot{x}_1}{2},$$
$$G_1=\frac{1}{4}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_3-\frac{k}{2}x_2^2$$
$$+\frac{k}{2}x_1x_2+\frac{k}{2}x_2x_3-kx_1x_3; \tag{26}$$

$$\tau_2=-\frac{1}{2},\ \xi_1^2=\frac{-\dot{x}_1+\sqrt{2}\dot{x}_2+\dot{x}_3}{4},$$
$$\xi_2^2=\frac{\sqrt{2}\dot{x}_1+\sqrt{2}\dot{x}_3}{4},\xi_3^2=\frac{\dot{x}_1+\sqrt{2}\dot{x}_2-\dot{x}_3}{4},$$
$$G_2=\frac{1}{8}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{8}m\dot{x}_3^2-\frac{\sqrt{2}}{4}m\dot{x}_1\dot{x}_2$$
$$-\frac{1}{4}m\dot{x}_1\dot{x}_3-\frac{\sqrt{2}}{4}m\dot{x}_2\dot{x}_3$$
$$-\frac{k(2+\sqrt{2})}{8}x_1^2-\frac{k\sqrt{2}}{4}x_2^2-\frac{k(2+\sqrt{2})}{8}x_3^2$$
$$+\frac{k\sqrt{2}}{2}x_1x_2+\frac{k(2-\sqrt{2})}{4}x_1x_3+\frac{k\sqrt{2}}{2}x_2x_3; \tag{27}$$

$$\tau_3=-\frac{1}{2},\ \xi_1^3=\frac{-\dot{x}_1-\sqrt{2}\dot{x}_2+\dot{x}_3}{4},$$
$$\xi_2^3=-\frac{\sqrt{2}\dot{x}_1+\sqrt{2}\dot{x}_3}{4},\ \xi_3^3=\frac{\dot{x}_1-\sqrt{2}\dot{x}_2-\dot{x}_3}{4},$$
$$G_3=\frac{1}{8}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{8}m\dot{x}_3^2+\frac{\sqrt{2}}{4}m\dot{x}_1\dot{x}_2$$
$$-\frac{1}{4}m\dot{x}_1\dot{x}_3+\frac{\sqrt{2}}{4}m\dot{x}_2\dot{x}_3$$
$$-\frac{k(2-\sqrt{2})}{8}x_1^2+\frac{k\sqrt{2}}{4}x_2^2-\frac{k(2-\sqrt{2})}{8}x_3^2$$
$$-\frac{k\sqrt{2}}{2}x_1x_2+\frac{k(2+\sqrt{2})}{4}x_1x_3-\frac{k\sqrt{2}}{2}x_2x_3. \tag{28}$$

即与三个守恒量相应的无限小变换是 Noether 对称变换.

经验证，(26)—(28)式中的无限小生成元也满

足 Lie 对称性的确定方程(17)(其中的 a_s 由(19)式给出),说明与三个守恒量相应的无限小变换也是 Lie 对称变换.

[1] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[2] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical System* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]

[3] Mei F X 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1048 (in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[4] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177

[5] Luo S K 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[6] Fang J H, Yan X H, Chen P S 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1561 (in Chinese)[方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[7] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 292

[8] Zhang Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 331 (in Chinese)[张 毅 2004 物理学报 **53** 331]

[9] Lou Z M 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2046 (in Chinese)[楼智美 2004 物理学报 **53** 2046]

[10] Lou Z M 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1015 (in Chinese)[楼智美 2005 物理学报 **54** 1015]

[11] Lou Z M 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1460 (in Chinese)[楼智美 2005 物理学报 **54** 1460]

[12] Lou Z M 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 660

The study of symmetries and conserved quantities for one class of linearly coupled multidimensional freedom systems

Lou Zhi-Mei†

(*Department of Physics*, *Shaoxing College of Arts and Sciences*, *Shaoxing* 312000, *China*)

(Received 19 August 2006; revised manuscript received 13 September 2006)

Abstract

In this paper, we eliminate the coupled terms in Lagrangian firstly by changing the coordinate scales and rotating the coordinate axes, and obtain the conserved quantities in new coordinates directly. According inverse transform of the coordinates, we can obtain the conserved quantities in original coordinates, the Noether symmetry and Lie symmetry of the infinitesimal transformations of conserved quantities are studied in this paper, and an example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: linear coupled multidimensional freedom systems, conserved quantities, Noether symmetry, Lie symmetry

PACC: 0320

† E-mail: louzhimei@zscas.edu.cn