

# 原子和光场线性熵的演化特性\*

赵 杰<sup>1,2)</sup> 郭 红<sup>1)†</sup>

1) 华中师范大学物理科学与技术学院, 武汉 430079)

2) 长江大学物理科学与技术学院, 荆州 434001)

(2006 年 7 月 31 日收到, 2006 年 9 月 14 日收到修改稿)

研究了二能级原子与灰体场相互作用过程中原子和光场线性熵的演化规律, 讨论了原子初态、失谐量、入射场的强度、腔体吸收系数及其温度对原子和光场线性熵的影响.

关键词: Jaynes-Cummings 模型, 线性熵, 灰体场

PACC: 4250

## 1. 引 言

Jaynes-Cummings (JC) 模型是描述单模场与原子相互作用的可精确求解的理想模型. 人们利用 JC 模型揭示出原子与光场相互作用过程中一系列重要的非经典性质, 如原子布居反转的崩塌与回复现象<sup>[1]</sup>、原子与光场的压缩效应<sup>[2]</sup>以及原子与光场的纠缠特性<sup>[3,4]</sup>等. von Neumann 熵自动包含了量子系统密度矩阵的全部统计矩, 它既可灵敏地度量量子态的纯度以及原子与光场的关联程度, 又可充分展示系统动力学行为特征. Orszag 等<sup>[5]</sup>研究了 JC 模型中原子 von Neumann 熵的演化规律, 发现强相干场驱动的二能级原子的状态在崩塌区域的某一时刻(即回复时间的中点)接近纯态. Phoenix 等<sup>[6]</sup>利用 von Neumann 熵考察了 JC 模型中原子与场的纠缠. Boukobza 等<sup>[7]</sup>进一步揭示了 JC 模型中原子和场的纠缠与它们 von Neumann 熵交换间的关联. 线性熵与 von Neumann 熵有着相同的变化趋势<sup>[7]</sup>. 早在 1990 年 Banacloche<sup>[8]</sup>就利用线性熵得到了与 Orszag 相似的结论, 所不同的是 Banacloche 仅讨论了原子初态为纯态的情形. 由于线性熵更容易计算, 因而被广泛用于光与原子相互作用过程中系统动力学行为特征的研究<sup>[9-15]</sup>.

Bekenstein 等人给出了灰体辐射场的光子数分布<sup>[16]</sup>, 引起了人们对灰体辐射场的兴趣<sup>[17,18]</sup>. 灰体辐射场不同于相干场, 它处于混合态, 其无序度不仅

依赖于腔体温度, 而且与腔体吸收系数  $a$  ( $0 < a < 1$ ) 有着密切的关系. 当腔体的吸收系数  $a = 1$  时, 腔体称为绝对黑体, 黑体辐射场即为热光场, 其光子数分布仅由腔体温度决定. 众所周知, 由 JC 模型描述的系统演化规律依赖于系统的初态, 因而二能级原子与灰体场相互作用过程中原子和光场线性熵的演化特性值得深入探讨.

本文研究了二能级原子与灰体场相互作用过程中原子和光场线性熵的演化规律. 当腔体温度较低, 入射光很强时, 由灰体场驱动的二能级原子的线性熵出现崩塌与回复现象, 并在崩塌区域一直保持最大值, 随着腔体吸收系数的增加, 回复周期减小, 回复的最小值增大. 显然, 原子线性熵的动力学行为特征(完全不同于由相干场驱动的二能级原子线性熵动力学行为特征)因驱动场的不同而存在明显差异.

## 2. 模型及理论推导

在旋波近似下, 描述单个二能级原子与单模辐射场相互作用的哈密顿量可写为

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_A \hat{\sigma}_z + \hbar \omega_c \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^+), \quad (1)$$

式中  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{a}$  是频率为  $\omega_c$  的光场产生和湮没算符,  $\hat{\sigma}_+$ ,  $\hat{\sigma}_-$  和  $\hat{\sigma}_z$  为原子赝自旋算符,  $\omega_A$  是原子跃迁频率,  $g$  是原子和光场的耦合常数,  $\hbar$  为普朗克常量.

\* 国家自然科学基金(批准号: 60478049, 10474027)和湖北省自然科学基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: guohong@phy.ccnu.edu.cn

如果入射场处于光子数态  $|m\rangle$ , 当腔体与辐射场达到热平衡时, 腔场的光子数概率分布<sup>[16]</sup>

$$P_n = \frac{(e^x - 1)e^{xm} a^{m+n}}{(e^x - 1 + a)^{m+n+1}} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^k (m+n-k)!}{k!(n-k)!(m-k)!} \times \left(1 - 4 \times \frac{1-a}{a^2} \sinh^2(x/2)\right)^k, \quad (2)$$

式中  $x = \hbar\omega_c/kT$ , 它决定热光场的平均光子数  $m = (e^x - 1)^{-1}$ ,  $T$  为腔体温度,  $k$  为玻尔兹曼常量. 从上式不难看出腔体吸收系数  $a$  及其温度  $T$  直接影响着腔场的统计性质.

若初始时刻原子处于相干叠加态

$$|\psi_a\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|g\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|e\rangle, \quad (3)$$

则描述系统初态的密度算符可写为

$$\hat{\rho}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n| \psi_a \langle n| \psi_a |. \quad (4)$$

系统  $t$  时刻的密度算符

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t}. \quad (5)$$

原子(光场)的约化密度算符

$$\hat{\rho}_{(A)}(t) = \text{Tr}_{(C)} \hat{\rho}(t). \quad (6)$$

原子的线性熵

$$\begin{aligned} S_a(t) &= 1 - \text{Tr}_a(\hat{\rho}_a(t)^2) \\ &= 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left\{ \left( P_n X_{n-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} + P_n |Y_n|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ &\quad \times \left( P_m X_{m-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} + P_m |Y_m|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &\quad + \left( P_n |Y_{n-1}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + P_n X_n \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &\quad \times \left( P_m |Y_{m-1}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + P_m X_m \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} P_n P_m Y_{n-1} Y_m Y_{m-1}^* Y_m^* \sin^2 \theta \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{g^2(n+1)}{\lambda_n^2} \sin^2(\lambda_n t), \\ Y_n &= \cos(\lambda_n t) + \frac{i\Delta}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n t), \\ \lambda_n &= \sqrt{(\Delta/2)^2 + g^2(n+1)}, \\ \Delta &= \omega_A - \omega_C. \end{aligned}$$

光场的线性熵

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - \text{Tr}_C(\hat{\rho}_C(t)^2) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ (P_{n+1} X_n + P_n |Y_{n-1}|^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (P_n |Y_n|^2 + P_{n-1} X_{n-1}) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} X_{n-1} |P_n Y_n - P_{n-1} Y_{n-2}|^2 \sin^2 \theta \}. \quad (8)$$

(7) 式和 (8) 式表明原子和光场的线性熵与原子初态的相位  $\varphi$  无关.

### 3. 分析与讨论

入射光很强, 腔体温度较低时, 灰体场的无序度远远小于具有相同平均光子数的热光场, 此时原子线性熵演化出现如图 1 所示的崩塌与回复现象, 而与热场相互作用的二能级原子线性熵的演化没有崩塌与回复现象(见图 1(a)). 由强相干场驱动的二能级原子线性熵的演化虽然也出现崩塌与回复现象, 但在回复的半周期  $t_0 = t_{re}/2 = \sqrt{n} \pi/g$  原子线性熵趋于零<sup>[8]</sup>(见图 1(b)), 这表明原子的状态在该时刻最接近纯态. 而灰体场驱动的二能级原子线性熵在崩塌区保持其最大值, 原子的无序度最大. 对比图 1(a)、图 1(b) 和图 1(c), 我们不难看出, 随着吸收系数  $a$  的增大, 原子线性熵的回复周期减小, 回复的最小值增大. 这是因为回复周期<sup>[19]</sup>

$$t_{re} = \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{g} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4g^2\bar{n}}\right)^{1/2}. \quad (9)$$

在共振条件下, 回复周期与腔场平均光子数的平方根成正比. 腔体吸收系数的增大使得灰体场的平均光子数减小, 进而导致回复周期的减小. 回复周期随着失谐量的增加而增加, 所以图 1(d) 中原子线性熵的回复时间明显长于图 1(a) 中原子线性熵的回复时间. 当系统处于纯态时, 原子的线性熵始终等于光场的线性熵. 我们不难看出在二能级原子与灰体场相互作用过程中, 光场线性熵的演化规律不同于原子线性熵的变化规律. 在原子线性熵的崩塌区域, 场的线性熵出现明显的波动, 且变化范围随腔体吸收系数的增大而减小.

当入射光较弱, 腔体温度较低, 且腔体吸收系数较小时, 初始处于基态的原子在与灰体场相互作用过程中其处于激发态的概率逐渐增加, 当原子处于激发态的概率达到 0.5 时, 原子处于最无序的状态, 对应的原子线性熵为最大值 0.5. 随着时间的进一步增加, 原子处于激发态的概率继续增加, 但原子的线性熵将减小. 当原子处于激发态的概率达到最大时, 原子的线性熵将达到极小值. 由于腔体的平均光子数越大, 原子处于激发态的概率越大, 所以原子线性熵达到的极小值随着腔体吸收系数的增大而增大(图 3(b)); 接着原子处于激发态的概率降低, 当其

概率降低到0.5时,原子的线性熵再次达到最大值0.5.若腔体吸收系数进一步增加,腔体的平均光子数更小,真空态占主导地位,原子处于激发态的概率一直都小于0.5,因此原子线性熵在一个周期内没

有回落现象(图3(c)).当吸收系数较小时,原子与光场线性熵的步调一致,它们正关联(图3(a));当吸收系数较大时,原子与光场线性熵的变化趋势相反,它们反关联(图3(c)).

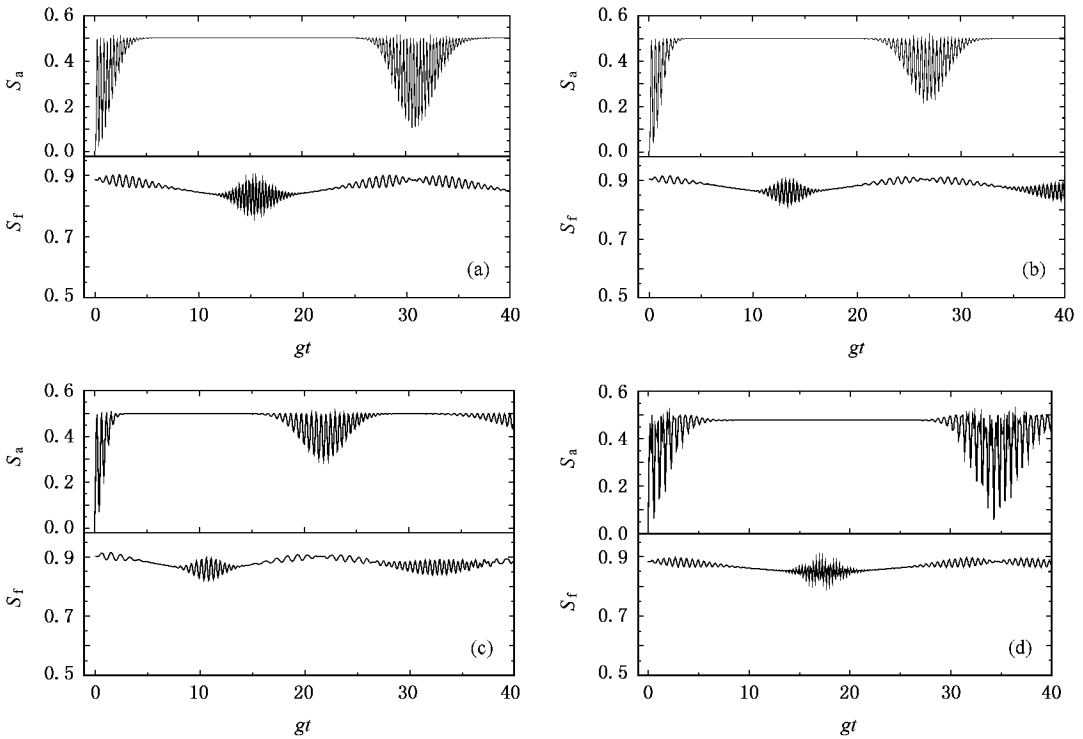


图1  $S_a$  和  $S_f$  随时间的演化.  $\theta=0, m=30, m=0.1$  (a)  $\alpha=0.2, \Delta=0$  (b)  $\alpha=0.4, \Delta=0$  (c)  $\alpha=0.6, \Delta=0$  (d)  $\alpha=0.2, \Delta=5$

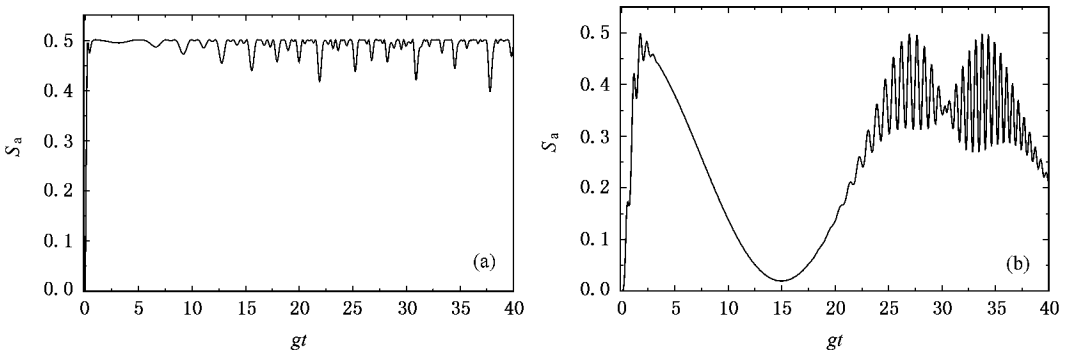


图2  $S_a$  随时间的演化.  $\theta=0$  (a)  $a=1, m=12.06$  (b) 相干场的平均光子数  $n=24.02$

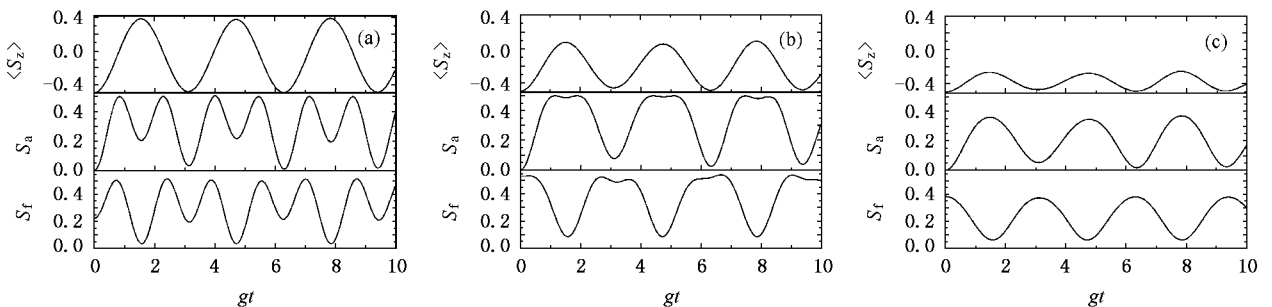


图3  $S_z, S_a$  和  $S_f$  随时间的演化.  $\theta=0, m=1, m=0.1$  (a)  $a=0.1$  (b)  $a=0.4$  (c)  $a=0.8$

当入射场光子数较小( $m = 1$ ),腔体温度较低( $m = 0.1$ ),吸收系数较大( $a = 0.8$ )时,光场有较大的概率处于真空态( $p_0 = 0.755$ ),处于光子数态 $|1\rangle$ 的概率( $p_1 = 0.215$ )要小得多.当系统处于 $|g, 0\rangle$ 态时,原子与场退耦合,所以当原子处于基态时,系

统演化的 Rabi 频率为  $2g$ .随着  $\theta$  的增大,系统的演化不再对应单一 Rabi 频率;多个 Rabi 频率叠加的结果,使得原子线性熵的演化规律复杂得多(图 4).若入射场较强或腔体温度较高, $\theta$  改变引起系统总能量的改变量与系统自身能量相比小得多.此时原子

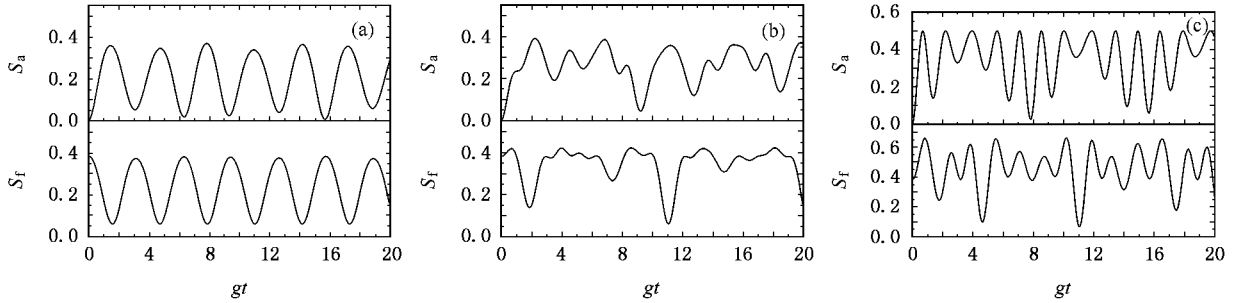


图 4  $S_a$  和  $S_f$  随时间的演化.  $m = 1$ ,  $m = 0.1$ ,  $a = 0.8$  (a)  $\theta = 0$  (b)  $\theta = \pi/2$  (c)  $\theta = \pi$

初态对原子和光场线性熵的影响将明显减弱.

## 4. 结 论

原子和光场线性熵的演化与腔场光子数分布、原子与光场的失谐量以及原子初态有关,而腔场光

子数分布依赖于入射场的光子数、腔体吸收系数及其温度.腔体温度较低,入射光很强,原子线性熵的演化出现崩塌与回复现象,回复周期由腔场的平均光子数和失谐量共同决定,其回复的最小值随着腔体吸收系数的增大而增大;入射光较弱,原子和光场线性熵对腔体吸收系数和原子初态更为敏感.

- [ 1 ] Zhou P, Hu Z L, Peng J S 1992 *J. Mod. Opt.* **39** 49  
 [ 2 ] Buzek V 1989 *J. Mod. Opt.* **36** 1151  
 [ 3 ] Batle J, Casas M, Plastino A, Plastino A R 2005 *Phys. Rev. A* **71** 024301  
 [ 4 ] Wei T C, Nemoto K, Goldbart P M, Kwiat P G, Munro W J, Verstraete F 2003 *Phys. Rev. A* **67** 022110  
 [ 5 ] Orszag M, Retamal J C, Saavedra C 1992 *Phys. Rev. A* **45** 2118  
 [ 6 ] Phoenix S J D, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023  
 [ 7 ] Boukobza E, Tannor D J 2005 *Phys. Rev. A* **71** 063821  
 [ 8 ] Banacloche J G 1990 *Phys. Rev. A* **65** 3385  
 [ 9 ] Faxia J G P, Nemes M C 1999 *Phys. Rev. A* **59** 3918  
 [ 10 ] Zhang L H, Li G X, Peng J S 2002 *Acta Optica Sinica* **22** 907 (in Chinese) [ 张立辉、李高翔、彭金生 2002 光学学报 **22** 907 ]

- [ 11 ] Zhang L H, Li G X, Peng J S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 541 (in Chinese) [ 张立辉、李高翔、彭金生 2002 物理学报 **51** 541 ]  
 [ 12 ] Hiroshima T 2001 *Phys. Rev. A* **63** 02230521  
 [ 13 ] Zurek W H, Habib S, Paz J P 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1187  
 [ 14 ] Zhang L H, Li G X, Gan Z W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1168 (in Chinese) [ 张立辉、李高翔、甘仲惟 2003 物理学报 **52** 1168 ]  
 [ 15 ] Walls D F, Milburn G J 1985 *Phys. Rev. A* **31** 2403  
 [ 16 ] Bekenstein J D, Schiffer M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2512  
 [ 17 ] Lee C T 1995 *Phys. Rev. A* **52** 1594  
 [ 18 ] Guo H, Li G X, Peng J S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 887 (in Chinese) [ 郭红、李高翔、彭金生 2000 物理学报 **49** 887 ]  
 [ 19 ] Scully M O, Zubairy M S 2000 *Quantum Optics* (Beijing: Cambridge) p196

# Evolution of atom and field linear entropies<sup>\*</sup>

Zhao Jie<sup>1,2)</sup> Guo Hong<sup>1)†</sup>

1) *College of Physical Science And Technology , Central China Normal University , Wuhan 430079 ,China )*

2) *College of Physical Science And Technology ,Yangtze University , Jinzhou 434001 China )*

( Received 31 July 2006 ; revised manuscript received 14 September 2006 )

## Abstract

The atom and field linear entropies of a two-level atom interacting with gray-body field are investigated. The effect of the atomic initial state , detuning , intensity of the incident field , absorptivity of the cavity and temperature of the system on the atom and field linear entropies are discussed.

**Keywords :** Jaynes-Cummings model , linear entropy , gray-body field

**PACC :** 4250

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 60478049 , 10474027 ) and the National Natural Science Foundation of Hubei Province of China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : guohong @phy. ccnu. edu. cn