第 56 卷 第 6 期 2007 年 6 月
1000-3290/2007/56(06)/3043-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.6,June,2007

变质量单面完整约束系统 Lie 对称性的摄动与广义 Hojman 型绝热不变量

荆宏星† 李元成 夏丽莉

(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院,东营 257061)

(2006 年 10 月 1 日收到;2006 年 10 月 12 日收到修改稿)

研究变质量单面完整约束系统 Lie 对称性的摄动与广义 Hojman 型绝热不变量.首先通过一般无限小变换下的 Lie 对称性得到广义 Hojman 型的守恒量;然后基于力学系统高阶绝热不变量的定义,研究小扰动作用下系统 Lie 对称性的摄动,得到系统广义 Hojman 型绝热不变量;最后举例说明结果的应用.

关键词:变质量,单面完整约束,对称性,摄动,绝热不变量

PACC:0320

1. 引 言

动力学系统的对称性与守恒量在现代数学、力学和物理学中占有重要地位.利用对称性寻求守恒量的方法主要有 Noether 对称性,Lie 对称性和 Mei 对称性[1—13].Noether 对称性总可导致守恒量,而 Lie 对称性和 Mei 对称性一般没有这种性质.由 Lie 对称性和 Mei 对称性寻求守恒量往往要通过 Noether 对称性来找到 Noether 型的守恒量.1992 年,Hojman[14]给出了由 Lie 对称性寻找守恒量的一种直接方法,得到一类新型的守恒量,被称为 Hojman 定理[15].方建会等在文献[16]中将 Hojman 定理推广,研究了变质量力学系统的一般形式的非 Noether 守恒量;张宏彬等在文献[17]中也将 Hojman 定理推广到一般的无限小变换下,得到了广义 Hojman 定理.

近年来,对称性的摄动与绝热不变量的研究越来越引起人们的重视.1917 年,Burgers[18]针对一类特殊 Hamilton 系统而提出的绝热不变量(adiabatic invariant).它是指当参数缓慢变化时几乎不变的量[19].实际上,参数缓慢变化等同于小扰动的作用.约束力学系统对称性的摄动和不变量的研究已取得了许多重要成果[20—28].然而,这些不变量大多是 Noether 型的.张毅等在文献[28]中首次提出 Hojman 型的绝热不变量.本文在一般无限小变换下,得到了变质量单面完整约束系统的广义 Hojman 定理;基于力学系统高阶绝热不变量的定义,研究系统在小扰动作用下 Lie 对称性的摄动,得到了广义 Hojman 型绝热不变量;本文在取 $\tau=0$,m 为常量时,变为文献[28]的结果.

2. 系统的运动微分方程

研究 N 个质点组成的力学系统,在 t 时刻第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,\cdots,N)$,在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻由质点分离(或并入)的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$.设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$确定,m_i 是 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$的函数,即

$$m_i=m_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),(i=1,\cdots,N). \tag{1}$$

系统的运动受有 g 个理想单面完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q})\geqslant 0,(\beta=1,\cdots,g). \tag{2}$$

则系统的运动微分方程可表示为[29]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+P_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s},(s=1,\cdots,n),$$

$$\lambda_\beta\geqslant 0,\lambda_\beta f_\beta=0,(\beta=1,\cdots,g), \tag{3}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数,Q_s 为非势广义力,λ_β 为约束乘子,P_s 为广义反推力,有

$$P_s=\dot{m}_i(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}$$

† E-mail:hongxing_0905@yahoo.com.cn

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial\dot{q}_s}\right),\tag{4}$$

式中 u_i 为分离或并入 m_i 的微粒 $\mathrm{d}m_i$ 相对于 m_i 的速度.

若系统处于约束上,即约束(2)取等号,假设系统非奇异,则可解出约束乘子 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,方程(3)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+P_s+\Lambda_s,\tag{5}$$

其中广义约束反力 $\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}$.

若系统脱离约束,即约束(2)式中不等号严格成立,则方程(3)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+P_s.\tag{6}$$

由方程(5)可解出广义加速度

$$\ddot{q}_s=\frac{M_{sk}}{D}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial t}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial q_j}\dot{q}_j+Q_s+P_s+\Lambda_s\right),$$

记作

$$\ddot{q}_s=A_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\tag{7}$$

式中 $D=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)$, M_{sk} 是行列式 D 中元素 $\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}$ 的代数余子式.

由方程(6)也可解出广义加速度

$$\ddot{q}_s=\frac{M_{sk}}{D}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial t}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial q_j}\dot{q}_j+Q_s+P_s\right),$$

记作

$$\ddot{q}_s=B_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\tag{8}$$

3. 力学系统的 Lie 对称性与精确不变量

取一般的无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\tau^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\tag{9}$$

其中 ε 为小参数, τ^0,ξ_s^0 为无限小生成元. 取无限小生成元向量

$$\tilde{X}^{(0)}=\tau^0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s^0\frac{\partial}{\partial q_s},\tag{10}$$

及其一次扩张为

$$\tilde{X}^{(1)}=\tau^0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s^0\frac{\partial}{\partial q_s}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s},\tag{11}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\begin{cases}A_k\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_k}, & \text{(在约束上)}\\ B_k\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_k}. & \text{(脱离约束)}\end{cases}\tag{12}$$

在无限小变换(9)下,若系统处于约束上,方程(7)的 Lie 对称性确定方程可表为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0-2A_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0=\tilde{X}_0^{(1)}(A_s),\tag{13}$$

而当系统脱离约束时,方程(8)的 Lie 对称性确定方程为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0-2B_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0=\tilde{X}_0^{(1)}(B_s).\tag{14}$$

定义 1 如果无限小变换的生成元 τ^0,ξ_s^0 满足确定方程(13)和(14),则称相应对称性为与变质量单面完整约束系统(2),(3)相应的变质量完整系统(5),(6)的 Lie 对称性.

单面完整约束(2)在无限小变换(9)下的不变性归为满足限制方程

$$\tilde{X}_0^{(1)}(f_\beta)=0,\text{(在约束上)}\tag{15}$$

定义 2 如果无限小生成元 τ^0,ξ_s^0 满足确定方程(13),(14),以及限制方程(15),则称相应对称性为变质量单面完整约束系统(2),(3)的弱 Lie 对称性.

约束(2)对系统虚位移的限制可表为如下附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}(\xi_s^0-\dot{q}_s\tau^0)=0,\text{(在约束上)}.\tag{16}$$

定义 3 如果无限小生成元 τ^0,ξ_s^0 满足确定方程(13),(14),限制方程(15),以及附加限制方程(16),则称相应对称性为变质量单面完整约束系统(2),(3)的强 Lie 对称性.

利用无限小变换(9),可以构建下面的定理

定理 1 如果无限小生成元 $\tau^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\xi_s^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足确定方程(13),(14),且存在函数 $\mu_0=\mu_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足下面的方程

$$\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu_0=0,(s=1,2,\cdots,n),$$
$$\text{(在约束上)},\tag{17}$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu_0=0,(s=1,2,\cdots,n),$$

（脱离约束），　(18)

则未受扰变质量单面完整系统相应变质量完整系统的 Lie 对称性直接导致如下守恒量：

$$I_0=\frac{\partial\tau^0}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s^0}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\right)+\tilde{X}_0^{(1)}\{\mathrm{n}\mu_0\}-\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0=\mathrm{const}. \tag{19}$$

证明　由方程(19)，得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_0=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial\tau^0}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s^0}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\right)+\tilde{X}_0^{(1)}\{\mathrm{n}\mu_0\}-\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\right\}. \tag{20}$$

当系统处于约束上时，容易证明下列运算：

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial A_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k},$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_s}=\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial A_k}{\partial q_s}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k},$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial}{\partial q_s}-\frac{\partial A_k}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}. \tag{21}$$

如果无限小生成元 τ^0,ξ_s^0 满足 Lie 对称性确定方程(13)，(14)，则对于任意函数 $\phi(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，关系成立，即

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tilde{X}_0^{(1)}(\phi)=\tilde{X}_0^{(1)}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\phi\right)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\phi. \tag{22}$$

利用(21)式，经直接的运算得到

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\tau^0}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s^0}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\right)\right]\\&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^0-2A_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\right)\\&\quad-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\{\tilde{X}_0^{(1)}(A_s)\}+\tilde{X}_0^{(1)}\left\{\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}\right\}.\end{aligned} \tag{23}$$

将(23)式代入(20)式，并利用(17)式，整理后得到

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_0&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\left(\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu_0\right)+\tilde{X}_0^{(1)}\left(\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu_0\right)\\&=0.\end{aligned} \tag{24}$$

同理可证，当系统脱离约束时，有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_0=0. \tag{25}$$

定理 2　对于变质量单面完整约束系统(2)，(3)，如果无限小生成元 τ^0,ξ_s^0 满足 Lie 对称性确定方程(13)，(14)，以及限制方程(15)，且存在函数 $\mu_0=\mu_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足条件(17)，(18)，则未受扰变质量单面完整系统的弱 Lie 对称性直接导致守恒量(19).

定理 3　对于变质量单面完整约束系统(2)，(3)，如果无限小生成元 τ^0,ξ_s^0 满足 Lie 对称性确定方程(13)，(14)，限制方程(15)，以及附加限制方程(16)，且存在函数 $\mu_0=\mu_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足条件(17)，(18)，则未受扰变质量单面完整系统的强 Lie 对称性直接导致守恒量(19).

于是，系统存在守恒量(19)，这是一个精确不变量，它揭示了未受扰的变质量单面完整约束系统的 Lie 对称性与不变量之间的关系.

4. Lie 对称性摄动与广义 Hojman 型绝热不变量

定义 4[19]　若 $I_z(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$是力学系统的一含有小参数 ε 的最高次幂为 z 的物理量，其对时间 t 的一阶导数正比于 ε^{z+1}，则称 I_z 为力学系统的 z 阶绝热不变量.

假设变质量单面完整约束力学系统(2)，(3)所对应方程(5)，(6)受到小扰动 εW_S 的作用，则系统的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+P_s+\Lambda_s+\varepsilon W_s,\text{（在约束上）}, \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+P_s+\varepsilon W_s,\text{（脱离约束）}, \tag{27}$$

展开方程(26)，有

$$\ddot{q}_s=A_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\frac{M_{sk}}{D}W_k, \tag{28}$$

展开方程(27)，有

$$\ddot{q}_s=B_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\frac{M_{sk}}{D}W_k. \tag{29}$$

在小扰动 εW_s 的作用下，系统原有的对称性与不变量相应的会发生改变.假设扰动后的无限小生成元 τ,ξ_s 是在系统无扰动的对称性变换生成元基础上发生的小摄动，取扰动后的一般无限小变换为

$$t^* = t + \varepsilon\tau(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{30}$$

且

$$\tau = \tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \varepsilon^2\tau^2 + \cdots,$$
$$\xi_s = \xi_s^0 + \varepsilon\xi_s^1 + \varepsilon^2\xi_s^2 + \cdots, \tag{31}$$

无限小生成元向量及其一次扩张为

$$\tilde{X}^{(0)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s},$$
$$\tilde{X}^{(1)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{32}$$

将(31)式代入(32)式,有

$$\tilde{X}^{(0)} = \varepsilon^m\tilde{X}_m^{(0)}, \tilde{X}^{(1)} = \varepsilon^m\tilde{X}_m^{(1)},$$
$$(m = 0,1,2,\cdots). \tag{33}$$

其中

$$\tilde{X}_m^{(0)} = \tau^m\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s^m\frac{\partial}{\partial q_s},$$
$$\tilde{X}_m^{(1)} = \tau^m\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s^m\frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^m - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{34}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k} + \left(A_k(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\frac{M_{kj}}{D}W_j\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}, \tag{35}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k} + \left(B_k(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\frac{M_{kj}}{D}W_j\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}. \tag{36}$$

当系统处于约束上时,扰动后的运动方程(26)在无限小变换(30)下的不变性归为如下 Lie 对称性确定方程:

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau - 2\left(A_s + \varepsilon\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau$$
$$= \tilde{X}^{(1)}(A_s) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right). \tag{37}$$

当系统脱离约束时,扰动后的运动方程(27)在无限小变换(30)下的不变性归为如下 Lie 对称性确定方程:

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau - 2\left(B_s + \varepsilon\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau$$
$$= \tilde{X}^{(1)}(B_s) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right). \tag{38}$$

将(31)式代入(37),(38)两式,并比较等式两边 ε^m 的系数,有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^m - 2A_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m$$
$$- 2\frac{M_{sk}}{D}W_k\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-1} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m$$
$$= \tilde{X}_m^{(1)}(A_s) + \tilde{X}_{m-1}^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right), \tag{39}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^m - 2B_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m$$
$$- 2\frac{M_{sk}}{D}W_k\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-1} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m$$
$$= \tilde{X}_m^{(1)}(B_s) + \tilde{X}_{m-1}^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right), \tag{40}$$

上式中 $m = 0$ 时,约定 $\tau^{-1} = \xi_s^{-1} = 0$.

定义 5 如果扰动后的无限小生成元 τ^m,ξ_s^m,满足确定方程(39),(40),则相应对称性为与扰动后变质量单面完整系统相应变质量完整系统(26),(27)的 Lie 对称性.

扰动后,约束(2)在无限小变换(30)下的不变性归为满足限制方程

$$\tilde{X}^{(0)}(f_\beta) = 0, (\text{在约束上}). \tag{41}$$

将(31)式代入(41)式,并比较等式两边 ε^m 的系数,有

$$\tilde{X}_m^{(0)}(f_\beta) = 0. \tag{42}$$

定义 6 如果扰动后的无限小生成元 τ^m,ξ_s^m 满足确定方程(39),(40),以及限制方程(42),则相应对称性为扰动后的变质量单面完整约束系统的弱 Lie 对称性.

扰动后,约束(2)对系统许位移的限制可表为如下附加限制方程,即

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}(\xi_s - \dot{q}_s\tau) = 0, (\text{在约束上}). \tag{43}$$

将(31)式代入(43)式,并比较等式两边 ε^m 的系数,有

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}(\xi_s^m - \dot{q}_s\tau^m) = 0. \tag{44}$$

定义 7 如果扰动后的无限小生成元 τ^m,ξ_s^m 满足确定方程(39),(40),限制方程(42),以及附加限制方程(44),则相应对称性为扰动后的变质量单面完整约束系统的强 Lie 对称性.

利用扰动后的无限小生成元 τ^m,ξ_s^m,得到如下定理.

定理 4 对于受到小扰动 εW_s 作用的变质量单面完整约束系统(26),(27),如果生成元 τ^m,ξ_s^m 满足确定方程(39),(40),且存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$,使得

$$\frac{\partial A_s}{\partial \dot{q}_s} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0,$$

$$(s=1,2,\cdots,n),(\text{在约束上}), \tag{45}$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_s}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0,$$

$$(s=1,2,\cdots,n),(\text{脱离约束}), \tag{46}$$

则相应变质量完整系统的 Lie 对称性导致广义 Hojman 型绝热不变量,形如

$$I_z=\varepsilon^m\left\{\frac{\partial\tau^m}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s^m}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^m-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\right)+\tilde{X}_m^{(1)}\{\mathrm{n}\mu\}-\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\right\}, \tag{47}$$

其中,$m=0$ 时,约定 $\mu=\mu_0$.

证明　由(47)式,得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_z=\varepsilon^m\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial\tau^m}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s^m}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^m-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\right)+\tilde{X}_m^{(1)}\{\mathrm{n}\mu\}-\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\right\}. \tag{48}$$

当系统处于约束上时,经直接运算

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\tau}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)\right]\\
&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}+\varepsilon\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-2A_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right.\\
&\quad-2\varepsilon\frac{M_{sk}}{D}W_k\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau-\tilde{X}^{(1)}(A_s)\\
&\quad\left.-\varepsilon\tilde{X}^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]+\tilde{X}^{(1)}\left(\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}\right)\\
&\quad+\varepsilon\tilde{X}^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right].\end{aligned} \tag{49}$$

将(31),(33)两式代入(49)式,并令等式两边 ε^m 的系数分别相等,有

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\tau^m}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s^m}{\partial q_s}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^m-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\right)\right]\\
&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-1}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^m-2A_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\right.\\
&\quad-2\frac{M_{sk}}{D}W_k\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-1}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m-\tilde{X}_m^{(1)}(A_s)\\
&\quad\left.-\tilde{X}_{m-1}^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]+\tilde{X}_m^{(1)}\left(\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}\right)\\
&\quad+\tilde{X}_{m-1}^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right].\end{aligned} \tag{50}$$

将(50)式代入(48)式,并利用(45)式和(39)式,得到

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_z&=\varepsilon^m\left\{\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-1}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right.\\
&\quad+\tilde{X}_m^{(1)}\left(\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}\right)+\tilde{X}_{m-1}^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]\\
&\quad\left.+\tilde{X}_m^{(1)}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu\right)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu\right\}\\
&=-\varepsilon^{z+1}\left\{\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^z\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right.\\
&\quad\left.+\tilde{X}_z^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{51}$$

当系统脱离约束时,同理可证

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_z&=-\varepsilon^{z+1}\left\{\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^z\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right.\\
&\quad\left.+\tilde{X}_z^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

证毕.

定理 6　对于受到小扰动 εW_s 作用的变质量单面完整约束系统(26),(27),如果生成元 τ^m,ξ_s^m 满足确定方程(39),(40),以及限制方程(42),且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,使得(45),(46)两式成立,则变质量单面完整系统的弱 Lie 对称性导致广义 Hojman 型的高阶绝热不变量(47).

定理 7　对于受到小扰动 εW_s 作用的变质量单面完整约束系统(26),(27),如果生成元 τ^m,ξ_s^m 满足确定方程(39),(40),限制方程(42),以及附加限制方程(44),且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,使得(45),(46)两式成立,则变质量单面完整系统的强 Lie 对称性导致广义 Hojman 型的高阶绝热不变量(47).

5. 算　　例

二自由度变质量系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(t)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-m(t)q_1. \tag{52}$$

质量变化规律为 $m=m_0\exp(t)$,非势广义力为 $Q_1=\dot{m}\dot{q}_1$,$Q_2=\dot{m}\dot{q}_2$,

微粒分离的相对速度为

$$\boldsymbol{u}=-\dot{\boldsymbol{r}}, \tag{53}$$

约束方程为

$$f=q_2-q_1\geqslant 0, \tag{54}$$

试研究系统的对称性的摄动与绝热不变量.

由(4)式知,$p_1 = p_2 = 0$.若系统处于约束上,即

$$f = q_2 - q_1 = 0, \tag{55}$$

则运动微分方程(5)给出

$$\dot{m}\dot{q}_1 + \dot{m}\ddot{q}_1 + m = \dot{m}\dot{q}_1 - \lambda,$$
$$\dot{m}\dot{q}_2 + \dot{m}\ddot{q}_2 = \dot{m}\dot{q}_2 + \lambda, \tag{56}$$

由(55)和(56)式,得

$$\lambda = -\frac{m}{2}, \tag{57}$$

于是有

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2}, \ddot{q}_2 = -\frac{1}{2}. \tag{58}$$

若系统脱离约束,则运动微分方程为

$$\dot{m}\ddot{q}_1 + m = 0, \dot{m}\ddot{q}_2 = 0. \tag{59}$$

$$\ddot{q}_1 = -1, \ddot{q}_2 = 0, \tag{60}$$

Lie 对称性确定方程(13),(14)有解

$$\tau^0 = 1, \xi_1^0 = 1, \xi_2^0 = 1. \tag{61}$$

生成元(61)满足限制方程(15)和附加限制方程(16),因此它对应系统的强(弱) Lie 对称性.(17),(18)式给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu_0 = 0, \tag{62}$$

(62)式有解

$$\mu_0 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)t - (q_1 + q_2) + \frac{1}{2}t^2. \tag{63}$$

由(61)式和(63)式,根据定理 2 或定理 3,系统存在如下精确不变量

$$I_0 = \frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t - 2}{(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)t - (q_1 + q_2) + \frac{1}{2}t^2} = \text{const}. \tag{64}$$

下面研究系统的广义 Hojman 型绝热不变量.由于系统受到小扰动

$$\varepsilon W_1 = -\varepsilon m\dot{q}_1,$$
$$\varepsilon W_2 = \varepsilon m\dot{q}_2, \tag{65}$$

若系统处于约束上,则系统的运动方程(26)为

$$\dot{m}\ddot{q}_1 + m = \frac{1}{2}m - \varepsilon m\dot{q}_1,$$
$$\dot{m}\ddot{q}_2 = -\frac{m}{2} + \varepsilon m\dot{q}_2, \tag{66}$$

即

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2} - \varepsilon\dot{q}_1,$$
$$\ddot{q}_2 = -\frac{1}{2} + \varepsilon\dot{q}_2, \tag{67}$$

若系统脱离约束,则系统的运动微分方程(27)给出

$$\dot{m}\ddot{q}_1 + m = -\varepsilon m\dot{q}_1, \dot{m}\ddot{q}_2 = \varepsilon m\dot{q}_2, \tag{68}$$

$$\ddot{q}_1 = -\varepsilon\dot{q}_1 - 1, \ddot{q}_2 = \varepsilon\dot{q}_2, \tag{69}$$

将(31)式,(67)式和(69)式代入确定方程(39),(40)得到

$$\xi_1^1 = \xi_2^1 = t, \tau^1 = 1, \tag{70}$$

其中,当 $m = 0$ 时,约定 $\xi_2^{-1} = \xi_1^{-1} = 0$.

生成元(70)满足限制方程(42)式,附加限制方程(44)式,则相应对称性为扰动后系统的强(弱) Lie 对称性.

(45)和(46)式给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu = 0, \tag{71}$$

(71)式有解

$$\mu = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \varepsilon(q_1 - q_2) + t, \tag{72}$$

由(70)和(72)式,根据定理 6 或定理 7,系统存在一阶广义 Hojman 型的绝热不变量

$$I_1 = \frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t - 2}{(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)t - (q_1 + q_2) + \frac{1}{2}t^2} + \frac{3\varepsilon}{\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \varepsilon(q_1 - q_2) + t}. \tag{73}$$

[1] Noether A E 1918 *Math. Phys*. KI Ⅱ **235**

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A*:*Math. Gen*. **12** 973

[3] Mei F X 1999 *Application of Li Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 科学出版社)]

[4] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京 北京理工大学出版社)]

[5] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol*. **9** 120

[6] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin*. **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[7] Li Y C, Zhang Y, Liang J H, Mei F X 2001 *Chin. Phys*. **10** 376

[8] Li Y C, Zhang Y, Liang J H 2002 *Acta Phys. Sin*. **51** 2186 (in Chinese) [李元成、张 毅、梁景辉 2002 物理学报 **51** 2186]

[9] Fang J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]

[10] Fu J L, Chen L Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 1349

[11] Qiao Y F, Zhang Y L, Han G C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1051 (in Chinese) [乔永芬、张耀良、韩广才 2003 物理学报 **52** 1051]

[12] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[13] Xu Z X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2423 (in Chinese) [许志新 2002 物理学报 **51** 2423]

[14] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[15] Pillay T, Leach P G L 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 6999

[16] Fang J H, Liao Y P, Zhang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4037 (in Chinese) [方建会、廖永潘、张　军 2004 物理学报 **53** 4037]

[17] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W, Gu S L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2489 (in Chinese) [张宏彬、陈立群、刘荣万、顾书龙 2005 物理学报 **54** 2489]

[18] Burgers J M 1917 *Annalen der Physik* **52** 195

[19] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechnical Systems* (Beijing: Science Press) P164 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与守恒量(北京: 科学出版社)第 164 页]

[20] Chen X W, Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 721

[21] Chen X W, Shang M, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 997

[22] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1666 (in Chinese) [张　毅 2002 物理学报 **51** 1666]

[23] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2417 (in Chinese) [张　毅 2002 物理学报 **51** 2417]

[24] Fu J L, Chen L Q, Xie F P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2664 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、谢凤萍 2003 物理学报 **52** 2664]

[25] Zhang Y, Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2368 (in Chinese) [张　毅、梅凤翔 2003 物理学报 **52** 2368]

[26] Chen X W, Li Y M 2005 *Chin. Phys.* **14** 663

[27] Chen X W, Liu C M, Li Y M 2006 *Chin. Phys.* **15** 470

[28] Zhang Y, Fan C X, Mei F X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3237 (in Chinese) [张　毅、范存新、梅凤翔 2006 物理学报 **55** 3237]

[29] Mei F X 1990 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 1 (in Chinese) [梅凤翔 1990 北京理工大学学报 **10** 1]

Perturbation of Lie symmetries and a type of generalized Hojman adiabatic invariants for variable mass systems with unilateral holonomic constraints

Jing Hong-Xing† Li Yuan-Cheng Xia Li-Li

(*College of Physics Science and Technology*, *China University of Petroleum* (*East China*), *Dongying* 257061, *China*)

(Received 1 October 2006; revised manuscript received 12 October 2006)

Abstract

In this paper, the perturbation problem of Lie symmetries and adiabatic invariants for variable mass systems with unilateral holonomic constraints are studied. Firstly, a type of generalized Hojman conserved quantity under general infinitesimal transformation is obtained. Then, based on the definition of high-order adiabatic invariants of a mechanical system, the perburbation of Lie symmetries for variable mass systems with unilateral holonomic constraints under small disturbance is discussed and a type of generalized Hojman adiabatic invariants are given. At last, an example to illustrate the application of the results is given.

Keywords: variable mass, unilateral holonomic constraints, symmetry, perturbation, adiabatic invariant

PACC: 0320

† E-mail: hongxing_0905@yahoo.com.cn